

В. А. ПАЛЬМОВ

ОБ ОДНОЙ ПРОСТЕЙШЕЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ
 ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

1. Рассматриваем опертый по концам прямой стержень, сжатый продольной силой P и прижатый к плоскому жесткому основанию поперечной нагрузкой q (фиг. 1а). В книгах В. И. Феодосьева [1], [2], [3] справедливо утверждается, что стержень «всегда устойчив в малом, но при достаточно большой силе P — неустойчив в большом» [1]. Очевидно, что аккуратному анализу устойчивости в большом для описанной консервативной системы должно предшествовать разыскание отличных от прямолинейной форм равновесия. Фактическому построению некоторых из них посвящена работа [4]. Ниже дается полный анализ криволинейных форм равновесия.

Уравнение для малых поперечных прогибов стержня w имеет вид (см. [3])

$$0 < x < 2L$$

$$w^{IV} + x^2 w'' = \frac{q_R - q}{EJ}$$

$$\left(x^2 = \frac{P}{EJ} \right) \quad (1.1)$$

причем q_R — реакция основания, EJ — изгибая жесткость стержня, а штрихами отмечены производные по продольной координате x .

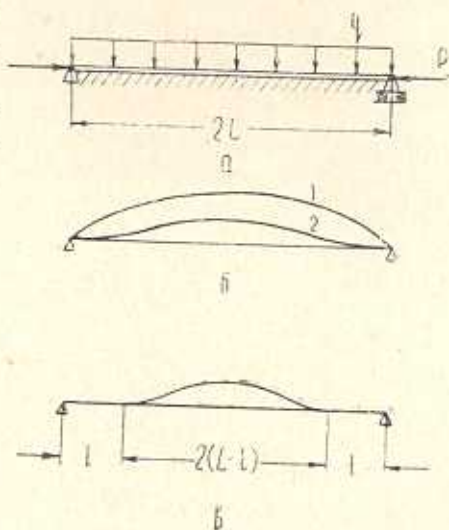
Граничные условия на опертых концах стержня таковы:

$$|x - L| = L, \quad w = w'' = 0 \quad (1.2)$$

Условия контакта стержня с основанием имеют вид

$$0 < x < 2L, \quad \begin{cases} w > 0, & q_R = 0 \\ w = 0, & q_R \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Первое из них — условие непроницаемости жесткого основания, второе — условие неотрицательности реакции основания при контакте с ним стержня.



Фиг. 1.

Допустим сначала, что контакт стержня с основанием отсутствует, то есть $q_R = 0$. Тогда решение граничной задачи (1.1), (1.2) имеет вид [4]

$$w = \frac{q}{Ej\alpha^3} \left[1 - \frac{\cos \alpha(L-x)}{\cos \alpha L} + \frac{\alpha^2}{2} x(2L-x) \right] \quad (1.4)$$

Теперь надлежит проверить выполнение условия непроницаемости основания (1.3). Для этого найдем выражение производной от (1.4) и ее значение на опоре $x = 0$

$$w' = \frac{q(L-x)}{Ej\alpha^2 \cos \alpha L} \left[\cos \alpha L - \frac{\sin \alpha(L-x)}{\alpha(L-x)} \right] \quad (1.5)$$

$$w'_0 = \frac{qL}{Ej\alpha^2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha L}{\alpha L} \right) = \frac{qL}{Ej\alpha^2 \cos \alpha L} \left(\cos \alpha L - \frac{\sin \alpha L}{\alpha L} \right) \quad (1.6)$$

Необходимым условием неотрицательности прогиба является условие $w'_0 \geq 0$. В силу (1.6) оно выполняется в интервалах

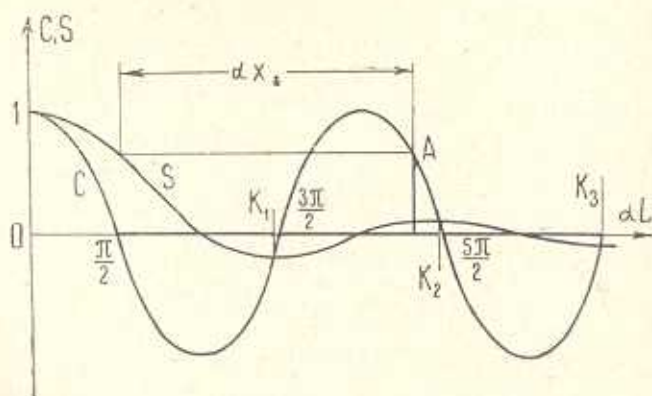
$$(2n-1)\pi/2 < \alpha L \leq k_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (1.7)$$

где k_n — расположенный в интервале $(\pi n, \pi n + \pi)$ корень уравнения

$$\operatorname{tg} k_n = k_n \quad (1.8)$$

Достаточным условием выполнения (1.3) является условие неотрицательности абсолютного минимума w . Координаты точек x_* , в которых достигаются экстремумы w , находятся по (1.5) из условия $w' = 0$. При их разыскании полезной оказывается приводимая графическая интерпретация. Рассмотрим фиг. 2. На ней изображены графики функций

$$c = \cos \alpha L, \quad s = \sin \alpha L / \alpha L$$



Фиг. 2.

В силу (1.6) абсциссы точек пересечения графиков дают k_n . Интервалы (1.7) показаны жирными линиями. Если теперь через точку αL оси абсцисс провести вертикаль до пересечения с кривой c , то ордината точки пересечения A даст значение $\cos \alpha L$. Если, далее, через точку A про-

вести влево горизонталь, то точки пересечения ее с кривой s в силу (1.5) дадут искомые координаты $\alpha(L - x_*)$ точек экстремумов. К ним следует присоединить точку $x=L$, в которой в силу (1.5) также имеется экстремум. Обратим теперь внимание на то, что выражение прогиба (1.4) представляет сумму гармоники и квадратичного трехчлена, имеющего положительные значения (при $0 < x < 2L$) и достигающего максимума в середине стержня ($x=L$). Следовательно, решающую роль играет прилегающий к каждой опоре участок стержня, протяженностью порядка длины волны гармоник: если на этом участке имеется минимум, то он неминуемо абсолютный, если же экстремумов нет, то прогиб положителен на всем протяжении стержня кроме собственно опор. Длину решающего участка определяем по фиг. 2 — это полторы длины волны гармоник s , то есть $3\lambda/\alpha$. Отметим, наконец, что внутри каждого из интервалов (1.7) значение производной прогиба на левой опоре положительно, так что ближайший к опоре экстремум является максимумом и только второй — абсолютным минимумом.

Для цельности интерпретации приводимого ниже анализа введем в рассмотрение норму прогиба

$$N = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} w dx \quad (1.9)$$

Для прогиба (1.4) она имеет выражение

$$\frac{N}{w_0} = \frac{1}{(\alpha L)^4} \left[1 - \frac{\text{tg } \alpha L}{\alpha L} + \frac{(\alpha L)^2}{3} \right], \quad w_0 = \frac{qL^4}{EJ} \quad (1.10)$$

Обозначая, наконец, P_* — эйлерово значение продольной силы

$$P_* = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{EJ}{L^2} \quad (1.11)$$

и учитывая обозначение (1.1), легко найдем

$$\frac{P}{P_*} = \left(\frac{2\alpha L}{\pi} \right)^2 \quad (1.12)$$

2. Рассмотрим первый из интервалов (1.7)

$$\pi/2 < \alpha L < k_1, \quad (k_1 = 4.493) \quad (2.1)$$

Учитывая высказанные выше общие соображения, находим только один экстремум — при $x=L$. Следовательно, это максимум. Поэтому выражение (1.4) удовлетворяет условию непроницаемости (1.3) во всех точках стержня. График зависимости N от αL по (1.10) показан на фиг. 3. Это кривая O_1A_1 . Типичная форма равновесия для этого интервала показана на фиг. 16 и отмечена значком 1. Правому концу интервала (2.1) соответствует форма равновесия, отмеченная значком 2. Из соображений непрерывности следует предположить, что при $\alpha L < k_1$, эта форма равновесия

трансформируется в форму, показанную на фиг. 1в: имеет место полный контакт стержня с основанием на концевых участках и отрыв на участке длиной $2(L-l)$ в средней части. Условия сопряжения участков отрыва и контакта имеют вид

$$|x-L| = L-l, \quad w = w'' = w' = 0 \quad (2.2)$$

Аналогия первых двух условий (2.2) и (1.2) показывает, что выражение прогиба на участке отрыва $|x-L| \leq L-l$ можно получить из (1.4) заменой L на $L-l$ и x на $x-l$, но дополнительно учесть последнее условие (2.2). Имеем

$$w = \frac{q}{EJ\alpha^4} \left[1 - \frac{\cos \alpha(L-x)}{\cos \alpha(L-l)} + \frac{\alpha^2}{2} (x-l)(2L-l-x) \right] \quad (2.3)$$

$$x = l,$$

$$w' = \frac{q(L-l)}{EJ\alpha^3} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha(L-l)}{\alpha(L-l)} \right] = 0 \quad (2.4)$$

Сравнивая (2.4) с (1.8), находим уравнение для определения длины участка отрыва

$$\alpha(L-l) = k_1 \quad (2.5)$$

Подставляя (2.3) в (1.9) и учитывая (2.4), (2.5), получаем

$$\frac{N}{w_0} = \frac{k_1^3}{3(\alpha L)^3}, \quad \alpha L = k_1 \frac{L}{L-l} \geq k_1 \quad (2.6)$$

График зависимости (2.5) представлен на фиг. 3 лучом A_1B_1 . Он непрерывно сопрягается с графиком O_1A_1 , зависимости (1.10).

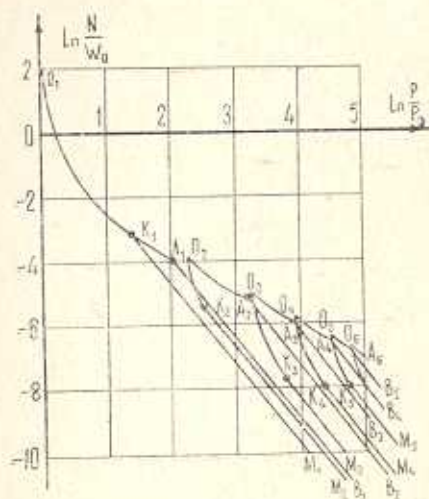
3. Рассмотрим второй интервал (1.7)

$$4.712 = 3\pi/2 < \alpha L \leq k_2, \quad (k_2 = 7.726) \quad (3.1)$$

На фиг. 2 как раз показана процедура определения координаты ближайшего к опоре экстремума. По сказанному выше абсолютный минимум прогиба достигается во втором экстремуме, то есть в середине стержня. Его значение таково:

$$w_m = \frac{w_0}{(\alpha L)^4} \left[1 + \frac{(\alpha L)^2}{2} - \frac{1}{\cos \alpha L} \right] \quad (3.2)$$

Легко видеть, что в середине интервала при $\alpha L = 2\pi$ прогиб (3.2) положителен. Вычисления показывают, что он меняет знак в точках



Фиг. 3.

$$\alpha L = u_2 = 4.793 > 3\pi/2, \quad \alpha L = 7.822 > k_2$$

Таким образом, в интервале

$$u_2 \leq \alpha L \leq k_2 \quad (3.3)$$

абсолютный минимум прогиба неотрицателен и, значит, опять справедливо решение (1.4). Зависимость (1.10) для этого интервала представлена на фиг. 3. Это кривая O_2A_2 .

Правому концу интервала (3.3) соответствует форма равновесия с нулевым значением производной на опорах. При $\alpha L > k_2$ форма равновесия (1.4) непрерывно переходит в форму равновесия, в которой отрыв имеет место только на участке $2(L-l) < 2L$ в середине стержня и полный контакт вне его пределов. Прогиб имеет выражение (2.3) при дополнительном условии (2.4). Из (2.4), (1.8) следует

$$\alpha(L-l) = k_2 \quad (3.4)$$

Норма прогиба находится по (1.9), (2.3), (3.4) и имеет значение

$$\frac{N}{w_0} = \frac{k_2^3}{3(\alpha L)^3}, \quad \alpha L = k_2 \frac{L}{L-l} \gg k_2 \quad (3.5)$$

Зависимость N от P по (3.5), (1.12) представлена на фиг. 3 лучом A_2B_2 .

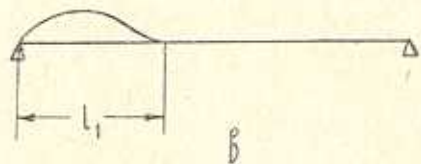
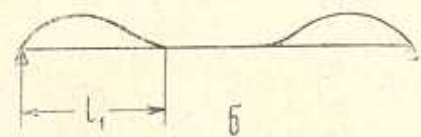
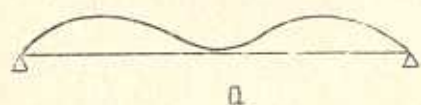
4. Левому концу интервала (3.3) $\alpha L = u_2$ соответствует форма равновесия, показанная на фиг. 4а: всюду прогиб положителен, в середине стержня он обратился в нуль. Представляется весьма правдоподобным, что при $\alpha L < u_2$ форма равновесия будет иметь такой же вид (появится только реакция основания в точке касания). Для ее построения необходимо найти неотрицательное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} x=0, 2L, \quad w = w'' = 0; \\ x=L, \quad w = w' = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Прогиб оказывается симметричным относительно середины стержня. Поэтому приводим его выражение только для левой половины стержня $0 \leq x \leq L$:

$$\begin{aligned} w = \frac{q}{EJ\alpha^4} \left\{ 1 - \frac{\cos[\alpha(L/2 - x)]}{\cos(\alpha L/2)} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{2} x(L-x) + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{\alpha L}{2} \operatorname{tg} \alpha L \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} / \frac{\alpha L}{2}}{1 - \operatorname{tg} \alpha L / \alpha L} \left(\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha L} - \frac{x}{L} \right) \right\} \quad (4.2)$$



Фиг. 4.

Реакция основания в данном случае сводится к одной сосредоточенной силе R , приложенной в середине стержня. Она равна удвоенной перерезывающей силе, вычисленной в сечении $x = L$ левой половины стержня. Имеем

$$R = \frac{2q}{\alpha^2 L} \left[1 + \frac{(\alpha L)^2}{2} - \frac{1}{\cos \alpha L} \right] \left/ \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha L}{\alpha L} \right) \right. \quad (4.3)$$

Специфика контактной задачи состоит в требовании $R \geq 0$. Проверим это. По сказанному в п. 3 при $3\pi/2 < \alpha L < u_1$ числитель в (4.3) становится отрицательным, знаменатель же сохраняет положительное значение. Следовательно, при $3\pi/2 < \alpha L < u_2$ (а точнее, при $k_1 < \alpha L < u_2$) имеем $R < 0$, а это означает, что прогиб (4.2) не удовлетворяет условию (1.3) и не представляет форму равновесия контактной задачи. Но ведь реакция R будет положительной во всем интервале (3.3)! Так что выражение (4.2) может представлять в нем новую форму равновесия, отличную от (1.4). Надлежит, правда, проверить удовлетворяется ли условие непроницаемости основания (1.3). Необходимые (и как оказывается, достаточные) условия его выполнения имеют вид

$$w' \Big|_{x=0} \geq 0, \quad w'' \Big|_{x=L-0} \geq 0$$

Подставляя сюда значение производных, приходим к неравенствам

$$\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} \Big/ \frac{\alpha L}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha L} \frac{1 - \sin \alpha L / \alpha L}{1 - \operatorname{tg} \alpha L / \alpha L} \right) \geq 0 \quad (4.4)$$

$$\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} \Big/ \frac{\alpha L}{2} \right) \frac{\operatorname{tg} \alpha L}{1 - \operatorname{tg} \alpha L / \alpha L} \leq 0 \quad (4.5)$$

Элементарный анализ показывает, что неравенства (4.4), (4.5) выполняются, соответственно, в следующих интервалах, имеющих общие точки с (3.3) (где $R \geq 0$)

$$k_1 < \alpha L < k_2, \quad k_1 < \alpha L < 2\pi \quad (4.6)$$

Объединяя (4.6) и (3.3), находим, что все условия (1.3) выполняются в интервале

$$u_2 \leq \alpha L \leq 2\pi \quad (4.7)$$

Норма прогиба (4.2) имеет выражение

$$N = \frac{w_0}{(\alpha L)^4} \left[1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} \Big/ \frac{\alpha L}{2} + \frac{(\alpha L)^2}{12} - \frac{\alpha L}{4} \frac{\operatorname{tg} \alpha L}{1 - \operatorname{tg} \alpha L / \alpha L} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} \Big/ \frac{\alpha L}{2} \right)^2 \right] \quad (4.8)$$

График зависимости N от P по (4.8), (1.12) для интервала значений (4.7) представлен на фиг. 3. Это кривая $O_2 K_2$.

Верхней границе интервала (4.7) соответствует форма равновесия (4.2) с нулевым значением прогиба и его двух производных в середине стержня. Теперь уже естественно предположить, что при $\alpha L > 2\pi$ форма (4.2) непрерывно перейдет в изображенную на фиг. 4б: в середине стержня имеется участок полного контакта длиной $2(L-l)$, а слева и справа от него симметричные участки отрыва стержня длиной l . Граничные условия для левого участка отрыва таковы:

$$x=0, \quad w=w''=0; \quad x=l_1, \quad w=w'=w''=0 \quad (4.9)$$

Последнее равенство — это условие непрерывности изгибающего момента при переходе в зону полного контакта. Первым четырем граничным условиям удовлетворит решение (4.2), если в нем заменить L на l_1 . Последнее, пятое условие в силу (4.5) также удовлетворится, если принять $\alpha l_1 = 2\pi$. Таким образом, имеем для левого участка отрыва

$$w = \frac{q}{EJx^4} \left[1 - \cos \alpha x + \frac{\alpha^2}{2} x(l_1 - x) + \pi \sin \alpha x \right], \quad \alpha l_1 = 2\pi \quad (4.10)$$

Норма прогиба (4.10) имеет значение

$$N = \frac{1}{L} \int_0^{l_1} w dx = \frac{2\pi w_0}{(\alpha L)^5} \left(1 + \frac{\pi^2}{3} \right), \quad \alpha L = 2\pi \frac{L}{l_1} \geq 2\pi \quad (4.11)$$

График зависимости (4.11) показан на фиг. 3. Это луч $K_2 M_2$.

Обратимся теперь к фиг. 4а. На нем изображена несимметричная форма равновесия, которой соответствует зона полного контакта длиной $2L-l_1$ и зона отрыва стержня длиной l_1 . Граничные условия для зоны отрыва имеют вид (4.9). Следовательно, прогиб дается выражением (4.10), с той только разницей, что теперь l_1 может стать больше L , но разумеется, не может превзойти длину стержня $2L$. Норма прогиба имеет выражение

$$N = \frac{1}{2L} \int_0^{l_1} w dx = \frac{\pi w_0}{(\alpha L)^5} \left(1 + \frac{\pi^2}{2} \right), \quad \alpha L = 2\pi \frac{L}{l_1} > \pi \quad (4.12)$$

График зависимости (4.12), (4.12) представлен на фиг. 3 лучом $K_1 M_1$.

5. Рассмотрим, наконец, типичный интервал (1.7)

$$(2n-1)\pi/2 < \alpha L \leq k_n, \quad n \geq 3 \quad (5.1)$$

Исследование начнем с определения координаты точки абсолютного минимума. Прежде всего отметим, что функция $s = \sin \alpha L / \alpha L$ имеет экстремумы в точках $\alpha L = k_n$, то есть в точках пересечения графиков функций s и s' на фиг. 2. Обращаясь теперь к фиг. 2, замечаем, что если

$$|\cos \alpha L| > |\cos k_{n-2}| \quad (5.2)$$

то есть

$$2\pi n - (k_{n-2} + 2\pi) < \alpha L < k_{n-2} + 2\pi \quad (5.3)$$

то построение не дает ни одной точки экстремума в критическом участке $3\pi/\alpha$ вблизи опор стержня. По сказанному в п. 1 в этом случае прогиб (1.4) всюду положителен.

Пусть теперь

$$|\cos \alpha L| \leq |\cos k_{n-2}| \quad (5.4)$$

то есть

$$(2n-1)\pi/2 < \alpha L \leq 2\pi n - (k_{n-2} + 2\pi) \quad (5.5)$$

$$k_{n-2} + 2\pi \leq \alpha L \leq k_n \quad (5.6)$$

В этом случае имеются минимумы, расположенные в критических зонах вблизи опор. Рассмотрим интервал (5.6) значений αL , близких к правому концу интервала (5.1). Из фиг. 2 видно, что тогда справедливы неравенства

$$|\cos \alpha L| \geq |\cos k_n|, \quad |\sin k_n| > 1/2$$

и что $\cos \alpha(L-x_*)$ для абсолютного минимума имеет тот же знак, что и $\cos \alpha L$. Следовательно, с учетом (1.8) находим

$$0 < \frac{\cos \alpha(L-x_*)}{\cos \alpha L} \leq \frac{1}{|\cos k_n|} = \frac{k_n}{|\sin k_n|} < 2k_n \quad (5.7)$$

Обращаясь опять к фиг. 2, замечаем, что увеличению αL в интервале (5.6) соответствует увеличение αx_* . Рассмотрим положительные слагаемые в скобке выражения (1.4). Их сумма представляет квадратичный трехчлен относительно αx , принимающий положительные значения (в пределах длины стержня) и достигающий максимума в середине стержня. Следовательно, положительные слагаемые в скобке (1.4) при $x=x_*$ увеличиваются с ростом αL , а значит их сумма больше своего значения для левого конца (5.6). На самом конце интервала координата ближайшего к опоре минимума находится по уравнению

$$\frac{\sin \alpha(L-x_*)}{\alpha(L-x_*)} = \cos \alpha(L-x_*) = \cos k_{n-2} \quad (5.8)$$

и имеет значение $\alpha x_* = 2\pi$.

Формальная запись последних двух сообщенных фактов даст неравенство

$$1 + \frac{\alpha^2}{2} x_*^2 (2L - x_*) \geq 1 + 2\pi(k_{n-2} + \pi) \quad (5.9)$$

Комбинируя теперь (5.6), (5.7), (5.9), приходим к неравенству для значения прогиба в точке абсолютного минимума

$$w_m > w_0 [1 + 2\pi(k_{n-2} + \pi) - 2k_n]/k_n^4 \quad (5.10)$$

Усиливая его с помощью грубого неравенства

$$k_n - k_{n-2} < 3\pi \quad (5.11)$$

получаем окончательно

$$w_m > w_0 [1 + \pi(2\pi - 6)]/k_n^4 \quad (5.12)$$

Минимальный прогиб оказался положительным, так что условие непроницаемости основания (1.3) для решения (1.4) удовлетворяется вплоть до правого конца интервала (5.1). При $\alpha L = k_n$ обращается в нуль производная прогиба на опорах. При $\alpha L > k_n$ форма равновесия (1.4) непрерывно переходит в форму (2.3) с участками полного контакта на концах стержня. Следует только иметь в виду, что теперь длина участка отрыва $2(L-l)$ находится по уравнению

$$\alpha(L-l) = k_n \quad (5.13)$$

Поэтому норма прогиба (2.3) имеет значение

$$\frac{N}{w_0} = \frac{k_n^3}{3(\alpha L)^3}, \quad \alpha L = k_n \frac{L}{l} > k_n \quad (5.14)$$

Графики зависимостей (5.14) представлены на фиг. 3 лучами $A_n B_n$.

Рассмотрим теперь интервал (5.5). На правом конце его абсолютный минимум положителен, поскольку он положителен в соседнем интервале (5.3). Вблизи левого конца абсолютный минимум отрицателен, поскольку трансцендентное слагаемое в скобке (1.4) принимает неограниченное по величине отрицательное значение. Следовательно, в пределах интервала (5.5) абсолютный минимум прогиба обращается в нуль. Соответствующие значения $\alpha L = u_n$ и $\alpha x_n = X_n$ находятся из условия обращения в нуль прогиба (1.4) и его производной (1.5) во втором от опоры экстремуме. Это приводит к системе трансцендентных уравнений

$$\frac{\cos z_n}{\cos u_n} = 1 + \frac{u_n^2 - z_n^2}{2}, \quad \cos u_n = \frac{\sin z_n}{z_n} \quad (5.15)$$

в которой

$$z_n = u_n - X_n, \quad X_n < 3\pi \quad (5.16)$$

а u_n заключены в интервалах (5.1) или (5.5).

Систему уравнений (5.15) можно переписать в форме

$$u_n = \pi n - \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\sin [z_n - \pi(n-2)]}{z_n} \quad (5.17)$$

$$z_n = \pi(n-2) + \arctg \frac{z_n}{1 + (u_n^2 - z_n^2)/2}$$

удобной для вычислений методом итераций и для анализа асимптотики при больших n . Приводим табл. 1 первых значений k_n , u_n , z_n , X_n и асимптотические формулы

$$z_n = \pi(n-2) + \arctg(2/3\pi)$$

$$u_n = \pi n - \pi/2 + (1/\pi n) \arctg(2/3\pi) \quad (5.18)$$

$$k_n = \pi n + \pi/2 - 1/\pi n, \quad X_n = 3\pi/2 - \arctg(2/3\pi)$$

Подводя итог проведенному анализу, заключаем, что прогиб (1.4) удовлетворяет условию непроницаемости основания (1.3) в интервалах

$$u_n \leq \alpha L \leq k_n \quad (5.19)$$

Зависимости (1.10) для интервалов (5.19) изображены графически на фиг. 3. Это кривые $O_n A_n (n \geq 3)$.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6
k_n	4.493	7.726	10.905	14.066	17.221	20.371
u_n	—	4.793	7.891	11.019	14.155	17.293
z_n	—	—	3.263	6.436	9.597	12.738
X_n	—	4.793	4.628	4.583	4.558	4.555

6. Проследим за эволюцией форм равновесия (1.4) при переходе через левую границу интервала (5.19). Значению $\alpha L = u_n$ соответствует форма равновесия, показанная на фиг. 5а: всюду прогиб положителен, в двух, симметрично расположенных точках стержень касается основания. Полагая, что при некотором изменении αL форма равновесия сохранит

свой вид, имеем следующие граничные условия на концах участков отрыва стержня:

$$x = 0, \quad w = w'' = 0$$

$$x = L_n, \quad w = w' = 0 \quad (6.1)$$

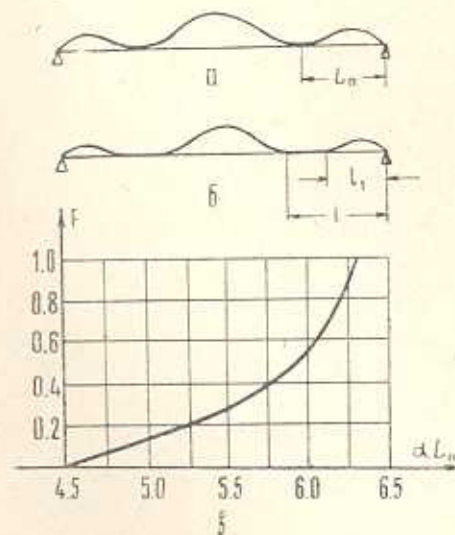
$$x = 2L, \quad w = w'' = 0$$

$$x = 2L - L_n, \quad w = w' = 0 \quad (6.2)$$

Сходство условий (6.1) с (4.1) позволяет по аналогии с (4.2) написать для $0 < x < L_n$

$$w = \frac{q}{EJz^4} \left\{ 1 - \frac{\cos[z(L_n/2 - x)]}{\cos(zL_n/2)} + \frac{\alpha^2}{2} x(L_n - x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha L_n}{2} \operatorname{tg} \alpha L_n \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha L_n}{2} \left| \frac{\alpha L_n}{2} \right.}{1 - \operatorname{tg} \alpha L_n / \alpha L_n} \left(\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha L_n} - \frac{x}{L_n} \right) \right\} \quad (6.3)$$



Фиг. 5.

Для среднего участка стержня $L_n < x < 2L - L_n$ находим

$$w = \frac{q}{Ejz^3} \left\{ \frac{z^2}{2} (x - L_n) (2L - L_n - x) + \right. \\ \left. + \frac{z(L - L_n)}{\operatorname{tg} z(L - L_n)} \left[1 - \frac{\cos z(L - x)}{\cos z(L - L_n)} \right] \right\} \quad (6.4)$$

На стыках участков отрыва должны быть выполнены условия непрерывности изгибающего момента и условие неотрицательности опорной реакции R .

Эти требования приводят к соотношениям

$$1 - \frac{z(L - L_n)}{\operatorname{tg} z(L - L_n)} = \frac{zL_n}{2} \operatorname{tg} zL_n \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{zL_n}{2} \left| \frac{zL_n}{2} \right.}{1 - \operatorname{tg} zL_n/zL_n} \quad (6.5)$$

$$z(L - L_n) + \frac{1}{zL_n} \frac{1 + (zL_n)^2/2 - 1/\cos zL_n}{1 - \operatorname{tg} zL_n/zL_n} > 0 \quad (6.6)$$

Необходимые (как оказывается и достаточные) условия непроницаемости основания имеют вид

$$w'|_{z=0} \geq 0, \quad w''|_{x=L_n} \geq 0 \quad (6.7)$$

Подстановка сюда выражения (6.3) приводит к неравенствам (4.4) и (4.5), в которых вместо L стоит L_n . По аналогии с (4.6) находим, что они выполняются при

$$k_1 < zL_n \leq 2\pi \quad (6.8)$$

причем в этот диапазон значений попадают все X_n (см. табл. 1 и асимптотические формулы). На правом конце (6.8) обращается в нуль $w''|_{x=L_n}$.

Рассмотрим уравнение (6.5). Из него находим

$$\frac{\operatorname{tg} z(L - L_n)}{z(L - L_n)} = F \equiv \frac{\operatorname{tg} zL_n/zL_n - 1}{[1 + (zL_n)^2/2] \operatorname{tg} zL_n/zL_n - 1/\cos zL_n} \quad (6.9)$$

График зависимости F от zL_n для диапазона (6.8) представлен на фиг. 5в. В силу непрерывности этой зависимости и поскольку при $zL_n = X_n$ имеем $z(L - L_n) = z_n$, можно написать, сославшись на (5.18)

$$z(L - L_n) = \pi(n - 2) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} [z(L - L_n)F] \quad (6.10)$$

Далее из фиг. 5в видно, что росту zL_n соответствует увеличение F , и в силу (6.9) — рост $z(L - L_n)$ и zL . На левом конце интервала (6.8) $F=0$, и значит $z(L - L_n) = \pi(n - 2)$, на правом $F=1$, и значит $z(L - L_n) = k_{n-2}$. Следовательно, интервалу (6.8) соответствует следующий интервал изменения zL :

$$\pi(n - 2) + k_1 < zL \leq k_{n-2} + 2\pi \quad (6.11)$$

Обратимся к неравенству (6.6). Соображения о непрерывности изменения опорной реакции R в точке касания при изменении αL , а также прямые вычисления демонстрируют, что при $\alpha L_n = X_n$, $\alpha L = u_n$ условие (6.6) выполняется со знаком равенства. Прямые вычисления показывают также, что оно удовлетворяется со знаком неравенства и вплоть до самого конца интервала (6.8). Таким образом, при

$$X_n \leq \alpha L_n \leq 2\pi, \quad u_n \leq \alpha L \leq k_{n-2} + 2\pi \quad (6.12)$$

выполняются все три неравенства (6.6), (6.7).

Приводим в заключение выражение нормы прогиба (6.3), (6.4)

$$\begin{aligned} \frac{N}{w_0} = & \frac{\alpha L_n}{(\alpha L)^5} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha L_n}{2} \left/ \frac{\alpha L_n}{2} \right. \right) \left[1 + \frac{\alpha(L-L_n)}{\operatorname{tg} \alpha(L-L_n)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{(\alpha L_n)^2}{12} + \frac{\alpha(L-L_n)}{\alpha L_n} \left[\frac{[\alpha(L-L_n)]^2}{3} - \left(1 - \frac{\alpha(L-L_n)}{\operatorname{tg} \alpha(L-L_n)} \right) \right] \right\} \quad (6.13) \end{aligned}$$

Графики зависимостей (6.13) помещены на фиг. 3. Это кривые $O_n K_n$ ($n \geq 3$).

Правым концом интервалов (6.12) соответствует форма равновесия, показанная на фиг. 5а, у которой в точке касания стержня с основанием обратилась в нуль вторая производная прогиба. Всего ранее сказанного достаточно для заключения о том, что с ростом αL форма трансформируется в показанную на фиг. 5б: появляются два симметрично расположенных участка полного контакта. На левом участке отрыва прогиб имеет выражение (4.9), на среднем — (2.3) при дополнительном условии $\alpha(L-l) = k_{n-2}$. Анализ, проведенный в п. 2 и п. 4, гарантирует выполнение условий контакта (1.3).

Выражение нормы прогиба таково:

$$\frac{N}{w_0} = \frac{1}{(\alpha L)^5} \left[2\pi \left(1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + \frac{k_{n-2}^3}{3} \right], \quad \alpha L \geq k_{n-2} + 2\pi \quad (6.14)$$

Графики зависимостей (6.14) показаны на фиг. 3. Это лучи $K_n M_n$.

7. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

а) отличные от прямолинейной формы равновесия появляются при эйлеровом значении продольной силы P_* . Бесконечно близких к прямолинейной форме равновесия нет;

б) каждому значению продольной силы $P > P_*$ соответствует одна или несколько различных форм равновесия (фиг. 3);

в) наибольшее практическое значение имеет самая нижняя кривая O, K, M , на фиг. 3. Допустим, что стержню задано некоторое начальное отклонение и затем ему предоставлена возможность двигаться при наличии сопротивления.

К чему приведет динамический процесс?

Правдоподобно утверждение: стержень вернется к прямолинейной форме, если норма начального отклонения меньше того значения, которое предписывается кривой O, K, M , (при заданной продольной силе P и поперечной нагрузке q), и может иметь катастрофически нарастающий во

времени прогиб, если больше. При $P_* < P < 4P_*$ критическая норма определяется зависимостью (1.10). Это практически совпадает с рекомендациями работы [4]. При $P > 4P_*$ критическая норма дается формулой (4.12), что заметно меньше, чем определено в работе [4] (например, при $\alpha L = k_1$, то есть при $P = 8.18 P_*$ — в 2,24 раза). Доказательство сформулированного утверждения выходит за рамки целей настоящей работы.

Ленинградский ордена Ленина
политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступила 16 XI 1979

Վ. Ա. ՊԱԼՄՈՎ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՀԱՍՏԱՐԱԿ
ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է ուղիղ առաձգական ձող, որը սեղմված է առանցքային և հալաշարժաժի բաշխված բևռով կոշտ հարթ հիմքին: Ներկայացվում է հալաշարժալիզոսթիան կորագիծ ձևերի ուսումնասիրությունը:

THE SIMPLEST CONTACT PROBLEM IN THE ELASTIC STABILITY THEORY

V. A. PALMOV

S u m m a r y

The paper deals with a straight elastic rod compressed by axial force and pressed by uniform transverse load to a rigid plane foundation. Curvilinear modes of equilibrium are also discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М., «Наука», 1969.
2. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М., «Наука», 1967.
3. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М., «Наука», 1970.
4. Туренко И. И., Харлаб В. Д. Об устойчивости балки, лежащей на жестком основании. Сб. тр. Ленинградского инженерно-строительного института, 1975, № 113.