ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 3, 1980 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, Л. А. МОВСИСЯН

УРАВНЕНИЯ МОДУЛЯЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ВОЛНАМ В ТОНКИХ ТЕЛАХ

Общий подход получения уравнений модуляций при помощи осредненного лангранжиана дан в [1]. В [2] дается применение метода [1] к исследованию изменения во времени, а также устойчивости групп волн. В работе [3] введением лучевых координат получены возмущенные относительно основной волны уравнения для медленных изменений амплитуд и фаз. Дается применение уравнений к дифракционной задаче вблизи границы света и тени. Аналогично при наличии также и падающей волны получены связанные уравнения для амплитуд и фаз падающей и отраженной волн.

В настоящей работе обобщением метода [1] на случай учета вторых производных от амплитуды для произвольной среды выводятся уравнения модуляции в пространственной задаче. Указано, что из них другим путем следуют результаты [3]. Записаны условия устойчивости, а также расширенные условия устойчивости волн. Приводится асимптотика линейного решения [1] и показано, что уравнения модуляций удовлетворяются. Дано сравнение с недиспергирующей средой. Дается постановка решения соответствующей нелинейной задачи. Полученные уравнения модуляций и условия устойчивости применены к задачам распространения изгибных волн в пластинах и оболочках.

1. *Вывод уравнений модуляций*

Уравнения для медленно изменяющихся амплитуды a и компонент α_i волнового вектора согласно [1] можно определить с помощью осредненного лагранжиана

$$\overline{L}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L\left(\Phi_t,\ \Phi_{x_i},\ \Phi\right) d\tau \tag{1.1}$$

где τ есть эйконал, x_i — координаты, t — время, $\dfrac{\partial\tau}{\partial x_i}=\alpha_i$, $-\dfrac{\partial\tau}{\partial t}=\omega$ — частота волны, Φ — искомое решение, которое для малых a приближенно можно записать в виде $\Phi=a\cos\tau$. Здесь и в дальнейшем индексами t, x_i, ω, α_i обозначены производные.

При наличии многих неизвестных функций Φ^ν в условиях рассматриваемой высокочастотной асимптотики можно в конечном счете с помощью варьирования по амплитудам a^ν выразить их через одну из них, поэтому без уменьшения общности при выводе уравнений рассматривается одна амплитуда a.

Для нелинейных волн малой амплитуды из (1.1) после подстановки $\Phi = a\cos\tau$ можно получить в адиабатическом приближении [1]

$$\overline{L} = G(\omega, \alpha_i, x_i)\, a^2 + \frac{1}{2} G_2(\alpha_i, x_i)\, a^4 \tag{1.2}$$

Первое слагаемое в правой части соответствует линейному приближению, причем

$$G(\omega_0, \alpha_i, x_i) = 0, \quad \omega_0 = \omega_0(\alpha_i, x_i) \tag{1.3}$$

дает дисперсионное соотношение линейной задачи.

Соответствующие (1.3) уравнения лучей

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_i}, \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial\omega_0}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

где $\dfrac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_i} = C_i$ — групповая скорость.

Соотношение (1.2) соответствует приближению нелинейной геометрической акустики [1].

Для дифракционных задач, а также в вопросах устойчивости волнового движения необходим более точный учет членов в $\overline{L}$, что достигается [1] введением двух времен t и τ, причем производные функции $\Phi = a\cos\tau$ берутся в виде

$$\partial\Phi/\partial t = a\sin\tau + \frac{\partial a}{\partial t}\cos\tau \tag{1.5}$$

$$\partial\Phi/\partial x_i = -\alpha_i a\sin\tau + \frac{\partial a}{\partial x_i}\cos\tau$$

Поскольку члены с производными от a относительно малы, их следует удерживать только в квадратичных слагаемых в L. Тогда в $\overline{L}$ члены, содержащие $a\dfrac{\partial a}{\partial t}$ и $a\dfrac{\partial a}{\partial x_i}$, выпадут при интегрировании и $\overline{L}$ можно получить из (1.1), заменяя в G $\omega \to \omega + \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial a}{\partial t}$, $\alpha_i \to \alpha_i - \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial a}{\partial x_i}$ и отбрасывая первые степени производных от a

$$\overline{L} = G(\omega, \alpha_i)\, a^2 + \frac{1}{2}\left\{ G_{\omega\omega}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 + G_{\alpha_i\alpha_j}\frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial a}{\partial x_j} - \right.$$

$$\left. - 2G_{\omega\alpha_i}\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial a}{\partial x_i}\right\} + \frac{1}{2} G_2 a^4 \tag{1.6}$$

Здесь и далее, если не оговорено, понимается суммирование по повторяющимся индексам. Варьируя (1.6) по a, можно получить уточненное нелинейное дисперсионное соотношение

$$G(\omega, \alpha_i) + G_2(\alpha_i)\, a^2 - \frac{1}{2a}\left(G_{\omega\omega} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} G_{\alpha_i \alpha_j} - 2G_{\omega\alpha_i} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial t} \right) = 0 \tag{1.7}$$

Те же результаты получаются для производной порядка n от Φ в лагранжиане. Предполагая, что имеются малые возмущения волны, характеризуемой эйконалом $\bar{\tau}$ и рассматривая малые модуляции волны $\tau = \bar{\tau} + \varphi$, можно для малой фазы φ из (1.7) получить уравнение, выведенное другим путем в [3].

При варьировании (1.6) по τ, если оставлять малые основного порядка [1], достаточно взять только первое слагаемое в правой части. Тогда из общего уравнения модуляций

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \alpha_i} = 0 \tag{1.8}$$

с использованием уравнений лучей (1.4) получится следующее соотношение

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial C_i a^2}{\partial x_i} - a^2 \frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial \omega_0 (\alpha_i, x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \omega_0}{\partial \alpha_i} \frac{\partial g (\alpha_i, x_i)}{\partial x_i} \right\} = 0 \tag{1.9}$$

где $g = G_\omega (\omega_0, \alpha_i)$.

Полагая, как и выше, $\tau = \bar{\tau} + \varphi$, можно из (1.9) получить уравнение для a^2, выведенное другим путем в [3].

Таким образом, из общих уравнений модуляций (1.7), (1.9), рассматривая малые возмущения относительно заданной волны, можно получить уравнения [3] и соответствующее нелинейное уравнение Шредингера для комплексной амплитуды $ae^{i\varphi}$.

Общие уравнения модуляции даются (1.9), к которому следует добавить уравнения сохранения числа волн [1]

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = 0 \qquad \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \Big|_{\alpha_j = \mathrm{const}} \right) \tag{1.10}$$

Согласно (1.7), в котором можно принять $G \approx G_\omega (\alpha_i)(\omega - \omega_0)$, имеет место

$$\omega - \omega_0 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 a^2 - \frac{1}{2a} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.11}$$

$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 = - \frac{G_2 (\alpha_i)}{G_\omega (\alpha_j)}$, что представляет дисперсионное соотношение. Тогда из (1.10) в основном порядке получится

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}+\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_j}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}+\frac{\partial a^2}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2a}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_k\partial\alpha_j}\frac{\partial^2 a}{\partial x_k\partial x_j}\right)+$$
$$+\frac{\partial\omega_0(\alpha_j,x_j)}{\partial x_i}=0 \qquad (1.12)$$

Таким образом, (1.9) и (1.12) составляют полную систему нелинейных уравнений модуляций.

При получении (1.11) из (1.7) учтено, что в силу малости вторых производных от a в них можно в основном порядке подставлять $\frac{\partial}{\partial t}\approx$ $\approx -C_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. Это соотношение выполняется в вышеуказанных задачах для малой амплитуды и высокой частоты.

2. *Условия устойчивости*

Отбрасывая в (1.12) вторые производные от a, получим уравнения в приближении нелинейной геометрической оптики. Тогда для (1.9) и (1.12) можно записать уравнения характеристик, вид которых не зависит от последних членов левых частей уравнений, то есть одинаков для однородной и неоднородной сред. Условие действительности характеристик $F(x_i, t)=0$ или нормальной скорости характеристики $\frac{\Omega}{k'}$ имеет вид

$$Y\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0>0 \qquad (2.1)$$

где

$$Y=\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}k_ik_j,\quad k_i=\frac{\partial F}{\partial x_i},\quad \Omega=-\frac{\partial F}{\partial t},\quad k'=\sqrt{\Sigma k_i^2}$$

Учет вторых производных от a в (1.12) расширяет область устойчивости. Для простоты рассмотрим случай однородной среды. Пусть a_0, α_{i0} обозначают невозмущенные значения. Положим $a=a_0+a'$, $\alpha_i=\alpha_{i0}+\alpha_i'$. Тогда после линеаризации (1.9) и (1.12) возмущенные уравнения модуляций примут вид

$$\left.\frac{\partial a'}{\partial t}\right|_{\xi}+\frac{1}{2}a_0\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\frac{\partial\alpha_i'}{\partial x_j}=0 \qquad (2.2)$$
$$\left.\frac{\partial\alpha_i'}{\partial t}\right|_{\xi}+2a_0\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0\frac{\partial a'}{\partial x_i}-\frac{1}{2a_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_k\partial\alpha_j}\frac{\partial^2 a'}{\partial x_k\partial x_j}=0$$

где $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\xi}=\frac{\partial}{\partial t}+C_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ есть производные вдоль луча. Исключая из (2.2) α_i', получим

$$\frac{\partial^2 a'}{\partial t^2}\bigg|_{\xi} - a_0^2 \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\frac{\partial^2 a'}{\partial x_i\partial x_j} +$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_k\partial\alpha_p}\frac{\partial^2 a'}{\partial x_k\partial x_p}\right) = 0 \tag{2.3}$$

Полагая $a' = Ae^{i(\Omega t - k_j x_j)}$, из (2.3) можно получить уравнение для Ω, условие действительности которого имеет вид (для плоской волны можно полагать $F = k_j x_j - \Omega t = 0$)

$$4a_0^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 Y + Y^2 > 0 \tag{2.4}$$

Здесь, как и в (2.1), k_i обозначает волновой вектор волны (характеристики), задающей возмущения основного движения.

Последнее условие выполняется или в силу (2.1) или при выполнении соотношений

$$Y\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0, \qquad a_0^2 < -\frac{Y}{4\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0} \tag{2.5}$$

которые расширяют область устойчивости (2.1) на случай учета вторых производных от a.

3. *Исследование линейных и нелинейных волновых пакетов на больших расстояниях от источника и для больших моментов времени*

Для однородной диспергирующей среды решение задачи о начальных условиях получается применением метода стационарной фазы к интегралам Фурье и имеет вид [1]

$$a = \frac{\varphi(\alpha_i)}{t^{\frac{n}{2}}} \tag{3.1}$$

где n — число измерений пространства, а α_i получаются из уравнений стационарности фазы $\omega_0 t - \alpha_i x_i$ в виде уравнений лучей для однородной среды

$$x_i = \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_i} t = C_i t, \qquad C_i = C_i(\alpha_j) \tag{3.2}$$

Проверим, что (3.1) и (3.2) удовлетворяют уравнению (1.9) для однородной среды

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial C_i a^2}{\partial x_i} = 0 \tag{3.3}$$

Для этого заметим, что для произвольной функции $\Phi(\alpha_i)$ $\frac{\partial\Phi}{\partial t} + C_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = 0$ в силу (3.2), так как $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \sum \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial t}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}$.

Тогда (3.3), очевидно, удовлетворяется.

Для нелинейной задачи к (3.3) следует присоединить (1.12), записанное в виде, в котором вторые производные от a по (3.1) малы и могут быть опущены. Тогда (1.12) принимает вид

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial t} + C_j\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a^2}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 = 0 \tag{3.4}$$

Решение уравнений (3.3) имеет снова вид (3.1) с точностью до малых $O(a^4)$. Однако α_i определяются не по (3.2), а из уравнения (3.4).

Таким образом, для нелинейной задачи выполняются уравнения (3.3), (3.4), которые можно решать методом простых волн или переходом в плоскость годографа (в одномерном случае) [1]. Отметим, что для диспергирующей среды по (3.2) $\partial C_i/\partial x_i = n/t$. В то же время для недиспергирующей однородной среды в одномерной задаче $\frac{\partial C_1}{\partial x_1} = 0$, то есть имеет место вырождение условия, а для n измерений [4] $\frac{\partial C_i}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial \ln J}{\partial t}\right|_{\xi}$, где J есть якобиан перехода от x_i к лучевым координатам. При этом [5] $J = c_n\sum$, где c_n — нормальная скорость волны, $\sum$ — площадь фронта волны внутри лучевой трубки. Для однородной среды $\sum \sim t^{n-1}$, $\frac{\partial C_i}{\partial x_i} = \frac{n-1}{t}$, в отличие от случая диспергирующей среды.

Таким образом, в диспергирующей и недиспергирующей средах (нелинейная оптика) лучевые решения существенно различаются, хотя уравнения модуляции (1.9), (1.12) по форме одинаковые. Этот факт недостаточно четко отмечен в [1].

4. *Конкретизация коэффициентов уравнений модуляций для изгибных волн в пластинах*

Можно рассматривать квазимонохроматические изгибные волны высокой частоты в пластинах. Предполагается, что хотя частота ω велика, но ωh невелико (h — толщина пластинки), что позволяет пользоваться известной классической теорией [6, 7]. Для несжимаемой среды* можно взять следующие соотношения для связи лагранжиана с компонентами $u_i (i = 1, 2, 3)$ перемещений по осям x_i, где ось x_3 направлена по нормали к пластинке

$$L = T - V, \quad T = \frac{1}{2}\rho h\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 \tag{4.1}$$

* Несжимаемость среды принята для упрощения записи соотношений.

$$V = \frac{3}{4} G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \psi_0^2 \left(1 + \frac{\gamma_2}{2} \psi_0^2\right) dx_3$$

$$\psi_0^2 = \frac{8}{3} \left(e_{x_1}^2 + e_{x_2}^2 + e_{x_1} e_{x_2} + \frac{e_{x_1 x_2}^2}{4} \right)$$

$$e_{x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}$$

$$e_{x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}$$

$$e_{x_1 x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - 2 x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}$$

где G — модуль сдвига ($E = 3G$), $G\gamma_2$ — нелинейный сдвиговой коэффициент [7].

Хотя при выводе (1.6) использовался лагранжиан (1.1), зависящий от первых производных искомой функции, форма (1.6) получается из левой части линейного дисперсионного соотношения $G(\omega, \alpha_i) = 0$, верного для зависимости лагранжиана от производных любого порядка, разложением по степеням $\frac{\partial a}{\partial t}$, $\frac{\partial a}{\partial x_i}$. Поэтому (1.6) верно и в общем случае, в чем можно убедиться на примере изгибных волн, вычисляя согласно (1.5) вторые производные от u_3.

Отыскивая

$$u_1 = u_0 + b \sin \tau + b_1 \sin 2\tau, \quad u_2 = v_0 + c \sin \tau + c_1 \sin 2\tau$$
$$u_3 = a \cos \tau + a_1 \cos 2\tau, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\omega, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_2} = \alpha_2 \tag{4.2}$$

и вводя в (4.1), можно получить осредненный лагранжиан в адиабатическом приближении

$$\overline{L} = \overline{L}(a, a_1, b, b_1, c, c_1, \omega, \alpha_i, u_0, v_0) \tag{4.3}$$

Приравнивая нулю производные $\overline{L}$ по амплитудам, можно получить систему шести уравнений, дающих дисперсионные соотношения. В полученных уравнениях для изгибных волн в нелинейном приближении можно считать до порядка a^4 $a_1 = b = c = 0$, что соответствует отсутствию взаимовлияния волн в первом порядке по a, и получить нелинейное дисперсионное соотношение. При этом уравнения для u_0 и v_0 имеют различные решения для типично дифракционных задач, для которых $\frac{\partial}{\partial x_1} \ll \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

и для одномерных по x_1 задач, в которых $\dfrac{\partial}{\partial x_2} = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial t} \approx -C\dfrac{\partial}{\partial x_1}$. Тогда получится следующее дисперсионное соотношение:

$$
\begin{gathered}
b_1\alpha_1 + c_1\alpha_2 = \frac{3a^2k^2}{2(12 - h^2k^2)}, \quad k^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad \omega_0 = G_1k^2 \\
G_1 = h\sqrt{\frac{G}{3\rho}}, \qquad \omega = \omega_0 + \frac{3a^2\omega_0\mu}{2h^2}, \qquad \mu = \gamma_2\frac{h^4k^4}{10} + \xi
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

где для первой задачи $\xi = 0.75$, и для второй $\xi = -\dfrac{3}{8}k^2h^2$.

Рассмотрим случай пластины из однородного материала $\left(\dfrac{\partial\omega_0}{\partial x_i} = 0\right)$. Согласно (4.4) $\dfrac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j} = 2G_1\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символы Кронекера) и из (1.9), (1.12), получится

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial C_i a^2}{\partial x_i} = 0, \qquad C_i = \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha_i} = 2G_1\alpha_i \\
\frac{\partial\alpha_i}{\partial t} + C_j\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a^2}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 - G_1\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{a}\sum_1^3\frac{\partial^2 a}{\partial x_k^2}\right) = 0
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

где

$$
\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 = \frac{3\omega_0\mu}{2h^2} \tag{4.6}
$$

Из (4.6) видно, что значение коэффициента γ_2, характеризующего физическую нелинейность (для упругих сред $\gamma_2 < 0$, а для жидких $\gamma_2 > 0$), влияет на знак $\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$. Для металлов $\gamma_1^2 \approx -10^6$ [7], и, следовательно, для реальных значений $kh \approx 10^{-1}$ получается $\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$. Кроме того, для пластин согласно (2.1)

$$
Y = 2G_1(k')^2 \tag{4.7}
$$

где k' есть волновое число для возмущений, и согласно (2.1) имеет место неустойчивость в приближении геометрической оптики. Использование более точного условия (2.4) позволяет обеспечить устойчивость для амплитуд, удовлетворяющих (2.5), которое запишется в виде

$$
a_0^2 < -\frac{(k')^2h^2}{3k^2\mu} \tag{4.8}
$$

Здесь k — волновое число для невозмущенной волны. Таким образом, условие устойчивости налагает ограничение на амплитуду a_0 и отношение волновых чисел $\frac{k'}{k}$ возмущенного и исходного движений. При этом относительно коротковолновые возмущения ($k' \gg k$) всегда устойчивы.

В качестве примера решения линейных уравнений модуляций можно рассмотреть асимптотику одномерной задачи о начальных условиях.

Пусть при $t = 0$

$$u_3 = f(x_1)e^{ik_0x_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_3}{\partial t} = 0 \tag{4.9}$$

где $f(x_1)$ — медленно меняющаяся функция на длине волны $\left(\frac{2\pi}{k_0}\right)$. Решение находится методом Фурье и после применения метода стационарной фазы записывается в виде

$$u_3 = a\cos\left(\frac{x_1^2}{2G_1t} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad a = \frac{\overline{F}(\alpha)}{\sqrt{\pi G_1 t}} \tag{4.10}$$

где $\alpha = \frac{x}{2G_1t}$, $\overline{F}(\alpha)$ — преобразование Фурье от $\frac{1}{2}f(x_1)$. Также можно получить асимптотику двумерной задачи о нулевых начальных условиях и граничных условиях на краю пластинки:

$$u_3 = u_0\delta(x_1)\delta(t), \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0 \tag{4.11}$$

Асимптотика имеет вид

$$u_3 = a\cos\frac{2G_1r^2}{t}, \qquad a = \frac{u_0}{2\pi}\,\frac{x_2G_1}{t^2}, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 \tag{4.12}$$

Согласно уравнениям лучей (1.4)

$$x_i = 2G_1\alpha_i t \tag{4.13}$$

и поэтому

$$a = \frac{u_0}{\pi}G_1^2\frac{\alpha_2}{t} \tag{4.14}$$

Как видно, (4.10) и (4.14) являются частными примерами решения (3.1) при $n = 1$ и $n = 2$, и, следовательно, удовлетворяют (3.3).

Можно для пластин произвести более точный учет членов в лагранжиане, добавив слагаемые за счет поперечных сдвигов и инерции вращения, что необходимо для высокочастотных волн. Как показывает исследование, при малых αh вновь получится нелинейное дисперсионное соотношение (4.4).

В рассматриваемой классической модели пластин произведен учет физической и геометрической нелинейностей. Последняя дается коэффициентом γ_2 (4.4), причем для многих упругих материалов слагаемое с γ_2

в (4.4) является определяющим, что приводит к значениям $\mu < 0$ и неустойчивости волн. Если рассматривать только геометрическую нелинейность ($\gamma_2 = 0$), то $\mu > 0$ и волны устойчивы. При этом $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0$ из (4.4) при отбрасывании $k^2h^2 \ll 1$ совпадает со значением, полученным в [8].

5. *Изгибные волны в оболочках*

Для оболочек в выражении лагранжиана (4.1) связи деформация с перемещениями u_i имеют вид

$$e_{x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_3}{R_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \tag{5.1}$$

и т. д., где оси x_1, x_2 выбраны по главным линиям кривизны оболочки $\left(\text{с кривизнами } \frac{1}{R_1} \text{ и } \frac{1}{R_2}\right)$.

Для квазимонохроматических волн можно искать u_i в виде (4.2) и получить осредненный лагранжиан.

Для простоты, ограничиваясь случаем одномерных (x_1) изгибных волн для цилиндрической оболочки, можно получить дисперсионное уравнение

$$\omega = \omega_0(\alpha) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{G}{\rho}\left\{\frac{3}{R_2^2} + \frac{h^2\alpha^4}{3}\left(1 - \frac{1}{3}h^2\alpha^2\right)\right\}$$

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 = \frac{G\alpha^4}{2\rho\omega_0}\mu \tag{5.2}$$

$$\mu = -\frac{3}{8}\alpha^2 h^2 + \frac{9}{2}\gamma_2 \frac{1}{R_2^4\alpha^4} + \gamma_2 \frac{h^2}{R_2^2} + \frac{1}{10}\gamma_2 h^4\alpha^4$$

(В ω_0 учтены также поперечные сдвиги).

Рассмотрим условия устойчивости. Вычисление дает

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial \alpha} = \frac{Gh^2\alpha^3}{3\omega_0\rho}(2 - h^2\alpha^2) > 0$$

$$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha^2} = \frac{Gh^2}{3\rho\omega_0^3}\left\{\frac{3\alpha^2}{R_2^2}(6 - 5h^2\alpha^2) + \frac{\alpha^6 h^2}{3}\left(2 - 3\alpha^2h^2 + \frac{2}{3}h^4\alpha^4\right)\right\} > 0 \tag{5.3}$$

Тогда $J = \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha^2}(k')^2 > 0$. Можно видеть, что, как и для пластин, согласно (5.2) $\mu < 0$, $\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$, то есть из (2.1) получается неустойчивость.

По более точным формулам (2.5) получится условие устойчивости в виде

$$a_0^2 < -\frac{\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha^2}(k')^2}{4\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0} \tag{5.4}$$

Отбрасывая в (5.3) в скобках малые добавки $\sim (\alpha h)^2$, можно видеть, что правая часть (5.4) для оболочек больше, чем для пластин при выполнении приближенного условия

$$(\alpha h)^4 > \frac{5}{2}\left(\frac{h}{R_2}\right)^2 \quad (\alpha h \ll 1)$$

При этом допустимые значения амплитуды для оболочек больше, чем для пластин.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 IV 1979

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՍՊԵՐՍԻՈՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ՄՈԴՈՒԼԱՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԱՐԱԿ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐՈՒՄ ՏԱՐԱԾՎՈՂ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ոչ գծային դիսպերսիոն միջավայրերի համար տարածական խնդրում միջինացված լագրանժիանի օգնությամբ դուրս են բերվում մոդուլյացիաների հավասարումները ամպլիտուդաների երկրորդ ածանցյալների հաշվառումով։ Բերվում են ալիքների կայունության ընդլայնված պայմանները։

Ստացված մոդուլյացիաների հավասարումները և կայունության պայմանները կիրառվում են ոչ-գծային առաձգական մեծ տեղափոխություններով սալերի և թաղանթների մեջ ծռման ալիքների տարածական խնդիրներում։

THE MODULATION EQUATIONS IN NONLINEAR DISPERSIVE MEDIA AND THEIR APPLICATION TO THE WAVE PROPOGATION IN THIN BODIES

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISYAN

S u m m a r y

By means of the averaged Lagrangian the equations of modulation in a space problem for nonlinear dispersive media, considering the second derivatives of amplitude, are deriv ed. The generalized relations of wave stability are written.

The obtained modulation equations and stability conditions are applied to the problem of propagation of bending waves in nonlinear elastic plates and shells.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
2. *Лайтхилл М. Дж.* Некоторые частные случаи применения теории Уизема. Нелинейная теория распространения волн. М., «Мир», 1970.
3. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 30, № 6.
4. *Лерe Ж., Гординг Л., Котаке Т.* Задача Коши. М., «Мир», 1967.
5. *Jeffrey A., Tanuiti T.* Nonlinear wave propagation. New-York—London, Academ Press., 1964.
6. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек, т. 5, М., «Наука», 1973.
7. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М., ИЛ, 1961.
8. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.