

Н. Х. АРУТЮНЯН, М. А. СУМБАТЯН

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ СЛОЯ

Рассматривается плоская задача теории установившейся ползучести о действии распределенной нагрузки на слой конечной толщины, лежащий без трения на жестком основании. Материал слоя считается несжимаемым и находящимся в условиях нелинейной ползучести, когда связь между интенсивностями напряжений и скоростей деформации выражается степенным законом.

Указанная задача для случая полуплоскости рассматривалась в [1]. В [2] построено решение этой задачи для тонкого слоя. В настоящей работе предлагается метод, позволяющий получить решение данной задачи для слоя произвольной толщины. Сущность его состоит в следующем.

Закон распределения касательных напряжений в слое представляется в форме (1.7), содержащей некоторую произвольную функцию  $f$  и параметр  $a$ . Такое представление является естественным обобщением соответствующего выражения (1.6) для касательных напряжений в слое в случае линейной теории.

Это позволяет построить решение рассматриваемой задачи, которое удовлетворяет уравнениям равновесия и граничным условиям, но не удовлетворяет уравнению неразрывности деформаций. Однако структура построенного решения такова, что, пользуясь вариационным принципом Кастилиано, можно так подобрать произвольную постоянную  $a$ , чтобы удовлетворить и уравнению совместности Сен-Венана. Таким образом, уравнение совместности удовлетворяется приближенно в вариационном смысле.

В линейном случае данный метод приводит к известному точному решению задачи о слое. В общем случае при стремлении толщины слоя к нулю получается решение [2].

1. Пусть на верхнюю грань слоя толщины  $h$ , покоящегося без трения на жестком основании, действует распределенная нормальная нагрузка  $p(x_1)$  (фиг. 1).

Слой находится в условиях нелинейной установившейся ползучести, а его материал несжимаем.

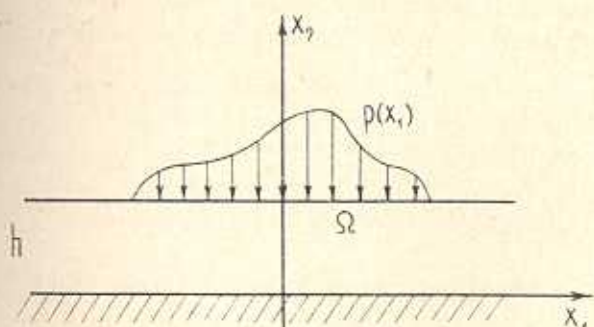
Тогда уравнения квазистатического равновесия

$$\begin{aligned}\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

Связь между напряжениями и скоростями деформации при плоской деформации

$$\varepsilon_{11} = \frac{\varepsilon_f}{\sigma_f} \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}, \quad \varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_f}{\sigma_f} \sigma_{12} \quad (1.2)$$

где  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  — интенсивности касательных напряжений и скоростей деформации.



Фиг. 1.

Пусть уравнение состояния для материала слоя выражается степенным законом [3, 4]

$$\varepsilon_i = A \sigma_i^m, \quad m > 1 \quad (1.3)$$

Тогда, чтобы получить полную систему уравнений задачи, нужно присоединить еще условие совместности скоростей деформации Сен-Венана

$$\varepsilon_{22, 11} - \varepsilon_{22, 22} = 2\varepsilon_{12, 12} \quad (1.4)$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } x_2 = 0 \quad \sigma_{12} = 0, \quad v_2 = 0 \\ \text{при } x_2 = h \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = \begin{cases} p(x_1), & x_1 \in \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\Omega$  — область действия нагрузки, а  $v_i$  ( $i = 1, 2$ ) — координаты вектора скоростей деформации.

Как известно [5], в случае линейной теории закон распределения касательных напряжений  $\sigma_{12}$  в слое определяется выражением

$$\sigma_{12} = -\frac{2}{\pi} \int_{\Omega} p(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \frac{h \operatorname{ch} uh \operatorname{sh} ux_2 - x_2 \operatorname{ch} ux_2 \operatorname{sh} uh}{\operatorname{sh} 2uh + 2uh} u \sin u (x_1 - \xi) du \quad (1.6)$$

Основываясь на этом представлении, закон распределения тангенциальных напряжений в слое в рассматриваемой нами задаче возьмем в следующей форме:

$$\sigma_{12} = -\frac{2}{\pi} \int_{\Omega} p(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \frac{Q}{f(auh)} \frac{\sin u(x_1 - \xi)}{u} du \quad (1.7)$$

где  $Q = (auh)^{\nu} \operatorname{ch}(auh)^{\nu} [\operatorname{ch}(aux_2)^{\nu}]^{\nu} - (aux_2)^{\nu} [\operatorname{sh}(aux_2)^{\nu}]^{\nu} \operatorname{sh}(auh)^{\nu}$   
 $\nu = \frac{2}{m+1}$ ,  $a > 0$  — произвольная постоянная,  $f$  — некоторая функция, обладающая поведением на бесконечности, необходимым для сходимости несобственного интеграла в (1.7). При этом на верхней границе слоя  $\sigma_{12} = 0$ , а при  $x_2 = 0$   $\sigma_{12} = 0$  в том случае, если  $\nu > \frac{1}{2}$ . Поэтому в дальнейшем на  $\nu$  (и  $m$ ) налагаем условие

$$\frac{1}{2} < \nu < 1 \quad \text{или} \quad 1 < m < 3 \quad (1.8)$$

Функция  $f$ , а также постоянная  $a$ , которая зависит от  $m$ , будут определены ниже.

Пользуясь выражением (1.7) для  $\sigma_{12}$ , из 2-го уравнения равновесия (1.1) получим

$$\sigma_{22} = \frac{2}{\pi} \int_{\Omega} p(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \frac{Q'}{f(auh)} \cos u(x_1 - \xi) du \quad (1.9)$$

где

$$Q' = (auh)^{\nu} \operatorname{ch}(auh)^{\nu} \operatorname{ch}(aux_2)^{\nu} - (aux_2)^{\nu} \operatorname{sh}(aux_2)^{\nu} \operatorname{sh}(auh)^{\nu} + \\ + \operatorname{ch}(aux_2)^{\nu} \operatorname{sh}(auh)^{\nu}$$

Удовлетворяя граничному условию (1.5) для  $\sigma_{22}$  при  $x_2 = h$ , определяем функцию  $f$ . Она будет иметь вид

$$f(auh) = \operatorname{sh}[2(auh)^{\nu}] + 2(auh)^{\nu} \quad (1.10)$$

В этом случае внутренний интеграл в (1.9) равен  $\frac{\pi}{2} \delta(x_1 - \xi)$  ( $\delta$  — дельта-функция Дирака), откуда следует, что  $\sigma_{22} = p(x_1)$  при  $x_1 \in \Omega$ ,  $\sigma_{22} = 0$  вне  $\Omega$ .

Заметим, что при  $m = 1$  ( $\nu = 1$ )  $a = 1$ , и выражение (1.7) переходит в (1.6).

Решение первого уравнения равновесия дает

$$\sigma_{11} = -\frac{2}{\pi} \int_{\Omega} p(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \frac{Q''}{\operatorname{sh}[2(auh)^{\nu}] + 2(auh)^{\nu}} \frac{\cos u(x_1 - \xi)}{u^2} du \quad (1.11)$$

где  $Q'' = (auh)^{\nu} \operatorname{ch}(auh)^{\nu} [\operatorname{ch}(aux_2)^{\nu}]^{\nu} - \{ (aux_2)^{\nu} [\operatorname{sh}(aux_2)^{\nu}]^{\nu} \}^{\nu} \operatorname{sh}(auh)^{\nu}$

Заметим, что при выполнении условия (1.8) особенность, содержащаяся во внутреннем интеграле (1.11) при  $u = 0$ , является интегрируемой.

Перейдем к нахождению скоростей деформации точек слоя. Из (1.2), (1.3) следует

$$\varepsilon_{11} = A\sigma_i^{m-1} \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}, \quad \varepsilon_{12} = A\sigma_i^{m-1} \sigma_{12}, \quad \varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11} \quad (1.12)$$

Интенсивность касательного напряжения  $\sigma_i$  имеет вид

$$\sigma_i = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \quad (1.13)$$

Поскольку касательное напряжение  $\sigma_{12}$  обращается в нуль на верхней и нижней гранях слоя, то оно будет мало по сравнению с нормальными напряжениями  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{11}$  всюду в слое. Поэтому без большой погрешности в формуле (1.13) можно пренебречь членом, содержащим  $\sigma_{12}$ . Тогда будем иметь

$$\sigma_i = \frac{|\sigma_{11} - \sigma_{22}|}{2} \quad (1.14)$$

С учетом (1.14) формулы (1.12) дают

$$\varepsilon_{22} = \frac{A}{2^m} |\sigma_{22} - \sigma_{11}|^m \operatorname{sign}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \quad (1.15)$$

или

$$|\varepsilon_{22}|^{\frac{1}{m}} \operatorname{sign} \varepsilon_{22} = A^{\frac{1}{m}} \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \quad \left( \mu = \frac{1}{m} \right)$$

что эквивалентно

$$|v_{2,2}|^{\mu} \operatorname{sign} \varepsilon_{22} = A^{\mu} \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \quad (1.16)$$

Для нахождения скорости  $v_2$  необходимо проинтегрировать это соотношение по  $x_2$ . Для этого поступим следующим образом. Используя известное неравенство Гельдера [6] для функций  $f = |v_{2,2}|^{\mu}$  и  $g = 1$  с показателями  $p = \frac{1}{\mu}$ ,  $q = \frac{1}{1-\mu}$  ( $1/p + 1/q = 1$ ), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{x_2} |v_{2,2}|^{\mu} dx_2 &\leq \left( \int_0^{x_2} |v_{2,2}| dx_2 \right)^{\mu} \left( \int_0^{x_2} dx_2 \right)^{1-\mu} = \\ &= [ |v_2(x_1, x_2)| - |v_2(x_1, 0)| ]^{\mu} x_2^{1-\mu} \end{aligned}$$

или, с учетом граничного условия  $v_2(x_1, 0) = 0$

$$\int_0^{x_2} |v_{2,2}|^{\mu} dx_2 \leq |v_2(x_1, x_2)|^{\mu} x_2^{1-\mu} \quad (1.17)$$

Легко видеть, что при крайних значениях  $\mu$ , а именно, при  $\mu = 0$  и  $\mu = 1$ , соотношение (1.17) переходит в равенство

$$\int_0^{x_2} |v_{2,2}|^\mu dx_2 = |v_2(x_1, x_2)|^\mu x_2^{1-\mu} \quad (1.18)$$

которое является точным.

В силу этого естественно предположить, что и для значений  $\mu$  в интервале  $0 < \mu < 1$  погрешность этого равенства невелика. Для истинных же значений скорости перемещения получаемое ниже выражение вида (1.20) является оценкой сверху.

Теперь, с использованием последней формулы, из (1.16) можно определить скорость

$$|v_2(x_1, x_2)|^\mu = \frac{A^\mu}{x_2^{1-\mu}} \int_0^{x_2} \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} dx_2 \operatorname{sign} \varepsilon_{22} \quad (1.19)$$

Из (1.19) после проведения интегрирования в правой части с использованием формул (1.9) и (1.11), в частности, получаем выражение для скорости осадки поверхности слоя (при  $x_2 = h$ )

$$v_2(x_1, h)|^\mu = \frac{A^\mu}{h^{1-\mu}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty p(\xi) d\xi \int_0^\infty L(au) \cos\left(u \frac{x_1 - \xi}{h}\right) du \operatorname{sign} \varepsilon_{22} \quad (1.20)$$

$$L(u) = \frac{Q'''}{\operatorname{sh}(2u^\nu) + 2u^\nu}$$

где

$$Q''' = \frac{1}{2} \left[ \Phi\left(\frac{1}{\nu}, 1 + \frac{1}{\nu}; u^\nu\right) + \Phi\left(\frac{1}{\nu}, 1 + \frac{1}{\nu}; -u^\nu\right) \right] \left( u^\nu \operatorname{ch} u^\nu + \frac{1+\nu}{\nu} \operatorname{sh} u^\nu \right) - \frac{1}{\nu} \operatorname{ch} u^\nu \operatorname{sh} u^\nu$$

$\Phi(\alpha, \beta; x)$  — вырожденная гипергеометрическая функция [7].

Отметим следующие свойства функции  $L(u)$ :

1) Она положительна при  $u > 0$

2)  $L(0) = 1/2$  (1.21)

3)  $L(u) \sim \frac{1+\nu}{2\nu^\alpha} \frac{1}{u^\nu}$  при  $u \rightarrow +\infty$

Укажем общий подход, позволяющий определить постоянную  $a$ , входящую в решение задачи, из условия удовлетворения уравнению совместности Сен-Венана с помощью вариационного метода Кастилиано.

Известно [3], что вариационным эквивалентом тождества Сен-Венана является принцип Кастилиано, состоящий в том, что фактические зна-

чения напряжений в теле доставляют дополнительной работе  $R$  минимальное значение по сравнению со всеми соседними значениями напряжений, совместимыми с уравнениями равновесия и с граничными условиями. Легко показать, что в случае физической нелинейности вида (1.3) функция  $R$  имеет вид

$$R = \frac{2A}{m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^h \sigma_i^{m+1} dx_1 dx_2 \quad (1.22)$$

что с учетом формулы (1.14) дает следующее правило для нахождения постоянной  $a$ . Последняя должна быть найдена из условия минимизации функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^h |\sigma_{22} - \sigma_{11}|^{m+1} dx_1 dx_2 \quad (1.23)$$

где  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{11}$  даны выражениями (1.9) и (1.11). При этом необходимо выбирать то значение параметра  $a$ , реализующее минимум функции (1.23) (в случае, если  $a$  неединственно), которое получается непрерывным образом из значения  $a = 1$  при непрерывном изменении параметра  $m$  от 1 до заданного значения. Конкретная реализация указанного процесса минимизации функции (1.23) может быть осуществлена численно с использованием ЭВМ.

В пункте 2 будет указан способ, позволяющий определить неизвестную  $a$  совершенно другим путем.

2. Рассмотрим контактную задачу установившейся ползучести о вдавливании жесткого штампа в слой, физические свойства которого описаны в пункте 1. Трение в области контакта отсутствует.

Исследуем сначала вопрос о характере особенности контактного напряжения в окрестности угла штампа. Покажем, что особенность напряжений такая же, как и полученная в [8] для задачи о трещине в степенноупрочняющейся среде. Доказательство аналогично изложенному в [8], если доказать, что криволинейный  $J$  — интеграл [9]

$$J = \int_{\Gamma} \left[ W dx_2 - \bar{T} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} ds \right] \quad (2.1)$$

по контуру  $\Gamma$ , охватывающему вершину штампа  $O$ , не зависит от выбора пути интегрирования. Здесь

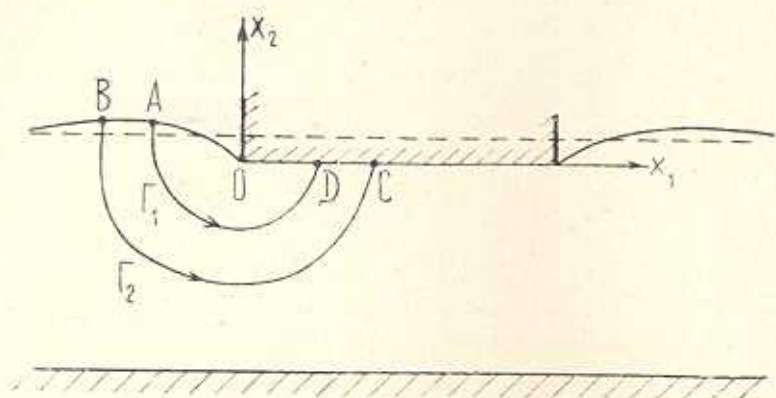
$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad T_i = \sigma_{ij} n_j$$

( $n_i$  — координаты единичной нормали к  $\Gamma$ ).

Поскольку рассматриваемая задача решается в рамках теории малых деформаций, то интегралы по отрезкам  $AB$  и  $CD$  поверхности слоя следует брать по невозмущенной поверхности.

На участке свободной поверхности  $AB$   $dx_2 = 0$ ,  $\bar{T} = 0$ , поэтому

$$\int_{AB} \left[ W dx_2 - \bar{T} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} ds \right] = 0$$



Фиг. 2.

На участке области контакта  $CD$   $dx_2 = 0$ , следовательно,

$$\int_{CD} W dx_2 = 0$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{CD} \bar{T} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} ds &= \int_{CD} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_1} n_j ds = \int_{CD} \left\{ \sigma_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} n_1 + \sigma_{12} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} n_2 + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{12} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} n_1 + \sigma_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} n_2 \right\} ds = 0 \end{aligned}$$

так как на  $CD$   $n_1 = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$  и  $\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0$

Таким образом,

$$J_2 - J_1 = \int_{ABCD} \left[ W dx_2 - \bar{T} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} ds \right]$$

и, переходя от криволинейного интеграла по замкнутому контуру  $ABCD$  к двойному интегралу по области, заключенной между кривыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , так же, как и в [9], получим, что

$$J_2 - J_1 = 0 \quad (2.2)$$

Таким образом,  $J$  — интеграл не зависит от выбора  $\Gamma$ .

Далее с использованием этого факта, аналогично [8], получаем

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \sim \frac{1}{r} \text{ при } r \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

( $r$  — расстояние до вершины  $O$ ).

А так как  $\varepsilon_{ij} \sim \sigma_{ij}^m$ , из (2.3) окончательно имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &\sim r^{-1/(m+1)} \\ \varepsilon_{ij} &\sim r^{-m/(m+1)} \quad \text{при } r \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

При  $m = 1$  из (2.4) получается корневая особенность напряжений и скоростей деформации, что совпадает с известным результатом линейной теории.

Найдем теперь распределение контактного напряжения  $p(x_1)$ , пользуясь решением плоской задачи установившейся ползучести, полученным в пункте 1.

В этом случае задача сводится к нахождению контактного давления  $p(x_1)$  из интегрального уравнения (1.20), рассматриваемого при  $x_1 \in \Omega$ , причем скорость внедрения основания штампа  $v_2(x_1, h)$  является заданной функцией и определяется формой основания штампа. Можно показать, что ядро рассматриваемого уравнения содержит слабую особенность вида  $|x_1 - \xi|^{-(1-\nu)}$ , и, следовательно, уравнение является фредгольмовым уравнением первого рода.

Пусть область контакта  $\Omega = (-b, b)$ . Для простоты ограничимся случаем плоского основания штампа. В этом случае  $v_2(x_1, h)$  постоянна по  $x_1$ .

Положим  $\lambda = h/b$ . Поскольку по своей сути метод получения интегрального уравнения (1.20), изложенный в пункте 1, ориентирован на случай небольших относительных толщины слоя, будем решать рассматриваемое уравнение асимптотическим методом «малых  $\lambda$ » [5]. Для его успешной реализации осуществим аппроксимацию трансформанты ядра уравнения:

$$L(au) \approx \frac{1}{(B^2 + C^2 u^2)^{\nu/2}} \quad (2.5)$$

которая учитывает все ее свойства (1.21). Здесь

$$B = 2 \frac{m+1}{2}, \quad C = a \left( \frac{2\nu^2}{1+\nu} \right)^{\frac{m+1}{2}} \quad (2.6)$$

С учетом того, что под штампом деформация всюду сжимающая, а следовательно,  $\text{sign } \varepsilon_{22}$  совпадает со знаком  $p(x_1)$ , приходим к уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1/\lambda}^{1/\lambda} p(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(x-\xi)u} du}{(B^2 + C^2 u^2)^{\nu/2}} = W, \quad |x| < \frac{1}{\lambda} \quad (2.7)$$



в котором введена безразмерная координата  $x = x_1/h$  и обозначено

$$W = h^{1-n} |v_2(x_1, h)|^2 / A^n = \text{const}$$

Первый член асимптотики решения уравнения (2.7) методом «малых  $\lambda$ » может быть записан либо в мультипликативном

$$p(x) = q\left(\frac{1}{\lambda} + x\right) q\left(\frac{1}{\lambda} - x\right) / v(x), \quad |x| < \frac{1}{\lambda} \quad (2.8)$$

либо в аддитивном

$$p(x) = q\left(\frac{1}{\lambda} + x\right) + q\left(\frac{1}{\lambda} - x\right) - v(x), \quad |x| < \frac{1}{\lambda} \quad (2.9)$$

виде. Здесь  $v(x) = WB^x$  — решение уравнения (2.7) на оси в свертках, а  $q(x)$  — решение уравнения Винера-Хопфа на полуоси

$$\frac{1}{2\pi} \int_n^{\infty} q(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(x-z)u} du}{(B^2 + C^2 u^2)^{n/2}} = W, \quad x > 0 \quad (2.10)$$

которое строится известным методом факторизации [5] и имеет следующий вид

$$q(x) = W \frac{(BC)^{n/2}}{\Gamma\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)} \left[ x^{-\nu/2} e^{-\frac{B}{C}x} + \left(\frac{B}{C}\right)^{\nu/2} \gamma\left(1 - \frac{\nu}{2}, \frac{B}{C}x\right) \right] \quad (2.11)$$

Здесь  $\Gamma(\alpha)$  — гамма-функция Эйлера,  $\gamma(\alpha, x)$  — неполная гамма-функция [7].

Полученное решение имеет на концах штампа степенную особенность вида  $x^{-\nu/2}$  или  $x^{-1/(n+1)}$ , что соответствует (2.4). Таким образом, структура исходной аппроксимации (1.7) выбрана так, что решение на концах штампа имеет нужную особенность, то есть подобранная аппроксимация верно отражает эту важную характерную особенность задачи.

Укажем способ нахождения постоянной  $a$ , отличный от предложенного в пункте 1. Известно, что при малых  $\lambda$  основной вклад в решение задачи вблизи конца штампа вносит поведение трансформанты ядра интегрального уравнения на бесконечности, а вдали от концов — поведение этой трансформанты в нуле. Поскольку, как видно, например, из (2.6), постоянная  $a$  определяет поведение трансформанты  $L(au)$  лишь на бесконечности, а  $L(0)$  от  $a$  не зависит, то очевидно, что от значения этой постоянной зависит коэффициент при особенности решения на концах штампа. Поэтому  $a$  может быть найдено из условия приближенного удовлетворения уравнения Сен-Венана вблизи конца, где как раз наиболее велика возможность нарушения сплошности среды.

С этой целью поступим следующим образом. Запишем уравнение сплошности (1.4) с использованием формул (1.12), (1.14) через напря-

жения. В результате получится нелинейное уравнение, содержащее  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  и их частные производные. Эти функции даются формулами (1.7), (1.9), (1.11) и получающимися из них дифференцированием, причем  $\rho(x_1)$  уже найдено. Устремляя во всех этих формулах  $x_2$  к  $h$ ,  $x_1$  к нулю, получим их представление при  $x_2 = h$  в окрестности точки  $x_1 = 0$  в виде степенных функций от  $x_1$  с некоторыми отрицательными показателями. Подставляя затем эти степенные функции в полученное нелинейное уравнение и пренебрегая в показателях членами вида  $1-\nu$ , после сокращения на  $x_1^{-1-2\nu}$  получим для определения величины  $c = a^{2\nu}$  кубическое уравнение с коэффициентами, зависящими только от  $\nu$ . Решение этого уравнения  $c(m)$ , непрерывно ответвляющееся от линейного значения  $c(1) = 1$ , определяет постоянную  $a$ .

Значения величины  $a$  для некоторых  $m$  приведены в табл. 1

Таблица 1

$\nu$	1	0.95	0.9	0.85	0.81
$m$	1	1.1053	1.2222	1.3529	1.4691
$a$	1	1.069	1.2374	1.6759	2.7511

Точное решение рассматриваемой здесь задачи связано с математическими трудностями принципиального характера. Для получения приближенного решения были приняты некоторые допущения, которые позволили решение нелинейной краевой задачи теории ползучести для слоя представить в аналитической форме.

Институт механики АН Армянской ССР  
Институт проблем механики АН СССР

Поступила 24 III 1980

Ն. Կ. ՀԱՐՈՒԹՅԱՆՆԵԱՆ, Մ. Ա. ՍՈՒՐԵԱԹՅԱՆ

### ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԿՆՅԻՐԸ

#### Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքում դիտարկվում է վերջավոր հաստությամբ շերտի վրա բաշխված նորմալ բեռի ազդեցության վերաբերյալ կայունացված ոչ զծային սողքի հարթ խնդիրը: Կառուցված լուծումը բավարարում է խնդրի բոլոր հավասարումներին և եզրային պայմաններին, բացի Սեն-Վենանի ղեֆորմացիաների համահիշտության հավասարումներից: Սակայն լուծման կառուցվածքում պարունակվող կամավոր  $\alpha$  հաստատունի առկայությունը հնարավորություն է տալիս Սեն-Վենանի հավասարումներին բավարարել մոտավոր վարիացիոն սկզբունքով:

Լուծվել է վերջավոր հաստությամբ շերտի մեջ կոշտ դրոշմի ներմղման կոնտակտային խնդիրը:

# THE PLANE PROBLEM IN THE CREEP THEORY FOR A FINITE THICKNESS LAYER

N. CH. HARUTUNIAN, M. A. SUMBATIAN

## S u m m a r y

The paper deals with the plane problem of a steady non-linear creep under the effect of a normal distributed load on a finite thickness layer. The solution obtained satisfies all the equations and boundary conditions of the problem, except the identity of the Saint-Venant consistency. Nevertheless, the presence of the arbitrary constant  $a$  in the solution's structure makes it possible to satisfy the latter equation approximately in a variational sense.

The contact problem for the rigid punch pressed into the finite thickness layer is also solved.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. Сумбатян М. А. Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся ползучести. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1980, т. 33, № 1.
3. Качанов Л. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
4. Glen J. W. The creep of polycrystalline ice. Proc. of the Royal Soc. of London. Ser. A., 1955, vol. 228, No. 1175, p. 519—538.
5. Ворошич И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., Наука, 1974.
6. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., Мир, 1979.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1—2. М., Наука, 1973—1974.
8. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. J. mechanics and physics of solids. 1968, vol. 16, No. 1, p. 1—12.
9. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения. В кн.: Разрушение, т. 2, М., Мир, 1975.