ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 3, 1980 Механика

О. М. САПОНДЖЯН

# ИЗГИБ ТОНКОЙ ПЛИТЫ ПРИ ЧАСТИЧНОМ НАГРЕВЕ

В задачах термоупругости тонкой плиты применяется линейный закон распределения температуры по толщине ($h$). При этом в определенных условиях такое температурное поле вызывает в плите деформации растяжения (сжатие) и изгиба. В настоящей работе рассматривается только деформация изгиба, поэтому закон распределения температуры принят в форме

$$T = \frac{2\tau(x, y)}{h}\xi, \quad \nabla^2\tau = 0, \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

где оси $x$ и $y$ отнесены к срединной плоскости плиты, а третья ось обозначена через $\xi$.

Целью настоящей работы является нахождение общего решения дифференциального уравнения изгиба плиты и решение некоторых задач в случае, когда функция $\tau(x, y)$ имеет постоянное значение $\tau_0$ в некоторой части ($G_0$) области плиты ($G$), а в ее остальной части ($G_1$) она равна нулю. При этом, поскольку $\tau(x, y)$ не зависит от координаты $\xi$, под областью плиты будем подразумевать соответствующую область ее срединной плоскости.

Рассмотренный случай нагревания плиты будем называть частичным нагреванием (очевидно, что соответствующее температурное поле можно создать, если термоизолировать друг от друга части плиты, соответствующие областям $G_0$ и $G_1$).

Отметим, что при нахождении указанного общего решения используется метод построения общего решения дифференциального уравнения изгиба плиты под действием частичной нагрузки [1].

## § 1. *Общее решение*

Обозначим прогибы в областях $G_0$ и $G_1$ соответственно через $w_0$ и $w_1$ и представим их в виде

$$w_0 = \Phi(x, y), \quad w_1 = f(x, y) + \Phi(x, y) \tag{1.1}$$

где $f(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ — бигармонические функции.

Назовем $f(x, y)$ частным решением дифференциального уравнения изгиба плиты при частичном нагреве. Эту функцию определим из следующих условий на $l$, разделяющей области $G_0$ и $G_1$:

փոխվում է գծայնորեն, իսկ այդ մասի ներքևի և վերևի նիստերում ունի միևնույն հաստատուն, բայց տարբեր նշանի արժեքներ։ Ուսումնասիրության նպատակն է նշված ջերմաստիճանային դաշտի պայմաններում որոշել սալի առաձգական մակերևույթի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը և լուծել կոնկրետ խնդիրներ։ (1.23) և (1.24) ընդհանուր լուծումը ստացվել է այն պայմանից, որ սալի տաքացվող և չտաքացվող մասերը սահմանափակող մակերևույթի բոլոր կետերում այդ մասերից մեկից մյուսն անցնելիս դեֆորմացիաները և ներքին ուժերը մնում են անընդհատ։

Վերջնական տեսքում ընդհանուր լուծումը, բացի հայտնի մասնակի լուծումից, որը հաշվի է առնում ջերմաստիճանի խզումը, պարունակում է նաև մեկ բիհարմոնիկ ֆունկցիա, որը որոշվում է խնդրի եզրային պայմաններից։

## BENDING OF A PARTIALLY HEATED PLATE

O. M. SAPONJIAN


### Summary

This paper is concerned with the thermoelastic problem for a plate in case when some part of the plate is heated while the temperature of its remaining part is zero. It is supposed that in the heated part the temperature is distributed linearly through the thickness of the plate and has the same constant values both on the upper and lower planes of the plate, minus and plus respectively.

The aim of this paper is to obtain the general solution to the plate differential equation and solve some particular problems. General solutions (1.23) and (1.24) are obtained from certain conditions, where at all the points of the surface dividing heated and unheated parts of the plate, deformations and inner forces remain continuous.

In its final form, the general solution contains the well-known partial solution reflecting discontinuity of temperature, as well as one biharmonic function which is determined from the boundary conditions for a particular problem.


### ЛИТЕРАТУРА


1. *Сапонджян О. М.* Изгиб тонких плит. Ереван, Изд. «Айастан», 1975.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., АН СССР, 1954.
3. *Галеркин Б. Г.* Собрание сочинений, т. II, М., АН СССР, 1953.

$$w_1 = w_0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \tag{1.2}$$

$$M_{1\nu} = M_{0\nu}, \quad H_{1\nu} = H_{0\nu}$$

$$Q_{1\nu} = Q_{0\nu}$$

где $\nu$ — нормаль к линии $l$, направленная от области $G_0$ к области $G_1$, или наоборот, а $M_\nu$, $H_\nu$ и $Q_\nu$ — соответственно изгибающий момент, крутящий момент и поперечная сила.

Внутренние силовые факторы определяются обычными формулами изгиба тонкой плиты лишь с тем отличием, что для области $G_0$ к выражениям изгибающих моментов добавляется член

$$-\frac{2D(1+\mu)\alpha\tau_0}{h}$$

где $D$ — жесткость плиты, $\mu$ — коэффициент Пуассона, $\alpha$ — коэффициент теплового расширения.

С учетом (1.1), условия (1.2) приводятся к виду

$$f_l = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_l = 0 \tag{1.3}$$

$$(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{dz}{d\bar{z}} - \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}\right)_l = -2\varkappa \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial \bar{z}} dz - \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial \bar{z}^2} d\bar{z}\right)_l = 0 \tag{1.5}$$

где $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ — комплексные переменные, а

$$\varkappa = \frac{(1+\mu)\alpha\tau_0}{2h} \tag{1.6}$$

Важно отметить, что условия (1.3) равносильны условиям

$$f(z_0, \bar{z}_0) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_l = 0 \tag{1.7}$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$ — произвольно фиксированная на $l$ точка.

Для определения из (1.4)—(1.7) частного решения $f$, выразим его через две аналитические функции $u(z)$ и $v(z)$ формулой Гурса:

$$f = \bar{z}u(z) + z\overline{u(z)} + v(z) + \overline{v(z)} \tag{1.8}$$

Внеся (1.8) в (1.7), (1.4) и (1.5), получим

$$\bar{z}_0 u(z_0) + z_0\overline{u(z_0)} + v(z_0) + \overline{v(z_0)} = 0 \tag{1.9}$$

$$\bar{z}_l u'(z_l) + \overline{u(z_l)} + v'(z_l) = 0 \tag{1.10}$$

$$[\bar{z}_l u''(z_l) + v''(z_l)]\left(\frac{dz}{d\bar{z}}\right)_l - \frac{1+\mu}{1-\mu}[u'(z_l) + \overline{u'(z_l)}] = -\frac{2\varkappa}{1-\mu} \quad (1.11)$$

$$u''(z_l)\,dz_l - \overline{u''(z_l)}\,d\bar{z}_l = 0 \quad (1.12)$$

где штрихи над буквами обозначают производные соответствующего порядка.

Из (1.12) следует, что

$$u'(z_l) - \overline{u'(z_l)} = ic_0 \quad (1.13)$$

где $c_0$ — действительная постоянная.

Учитывая очевидные соотношения

$$\bar{z}_l u''(z_l)\left(\frac{dz}{d\bar{z}}\right)_l = \frac{d}{d\bar{z}_l}[\bar{z}u'(z_l)] - u'(z_l)$$

$$v''(z_l)\left(\frac{dz}{d\bar{z}}\right)_l = \frac{d}{d\bar{z}_l}[v'(z_l)]$$

из (1.10) получим

$$\frac{d}{d\bar{z}_l}[\bar{z}_l u'(z_l) + v'(z_l)] - \frac{2}{1-\mu}u'(z_l) - \frac{1+\mu}{1-\mu}\overline{u'(z_l)} = -\frac{2\varkappa}{1-\mu}$$

Внеся сюда значение функции $u'(z_l)$ из (1.13), после интегрирования будем иметь

$$\bar{z}_l u'(z_l) + v'(z_l) - \frac{3+\mu}{1-\mu}\overline{u(z_l)} = -\frac{2\varkappa}{1-\mu}\bar{z}_l + \frac{2ic_0\bar{z}_l}{1-\mu} + c_1 + ic_2 \quad (1.14)$$

где $c_1$ и $c_2$ — действительные постоянные.

Сопоставляя (1.10) и (1.14), приходим к результату

$$u(z_l) = \frac{\varkappa}{2}z_l + \frac{ic_0}{2}z_l - \frac{1-\mu}{4}(c_1 - ic_2) \quad (1.15)$$

Очевидно, что

$$u(z) = [u(z_l)]_{z_l = z}$$

Тогда из (1.15) будем иметь

$$u(z) = \frac{\varkappa}{2}z + \frac{ic_0}{2}z - \frac{1-\mu}{4}(c_1 - ic_2)$$

Подчиним это выражение условию $u(0)=0$ [1] и, кроме того, учтем, что величина $\frac{ic_0}{2}z$ не вызывает прогиба. В результате получим

$$u(z) = \frac{\varkappa}{2}z \quad (1.16)$$

С учетом этой формулы из (1.10) находим

$$v'(z_l) = -\varkappa \bar{z}_l \tag{1.17}$$

Предположим, что уравнение линии $l$ задано в комплексной форме

$$\bar{z}_l = \Omega(z_l) \tag{1.18}$$

Тогда из (1.17) получим

$$v(z) = -\varkappa \int_{z_0}^{z} \Omega(z)\, dz + c_3 + ic_4 \tag{1.19}$$

где для упрощения дальнейших выкладок за нижний предел интеграла принята фиксированная на $l$ точка, в которой имеет место условие (1.9).

Внеся выражения (1.16) и (1.19) при $z=z_0$ в (1.9), находим

$$c_3 = -\frac{\varkappa}{2} z_0 \bar{z}_0 \tag{1.20}$$

Легко заметить, что постоянная $ic_4$, входящая в (1.19), не вызывает прогиба, поэтому примем $c_4=0$.

Тогда из (1.19), с учетом (1.20), получим

$$v(z) = -\varkappa \left[ \int_{z_0}^{z} \Omega(z)\, dz + \frac{z_0 \bar{z}_0}{2} \right] \tag{1.21}$$

Частное решение $f$ определяется согласно (1.8), с учетом (1.16) и (1.21)

$$f = \varkappa \left[ z\bar{z} - 2\mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \Omega(z)\, dz - z_0 \bar{z}_0 \right] \tag{1.22}$$

где Re — символ действительной части.

Внеся (1.22) в (1.1), будем иметь

$$w_0 = \Phi$$

$$w_1 = \varkappa \left[ z\bar{z} - 2\mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \Omega(z)\, dz - z_0 \bar{z}_0 \right] + \Phi$$

Для упрощения дальнейших выкладок заметим, что функцию

$$\varkappa (z\bar{z} - z_0 \bar{z}_0)$$

можно включить в состав функции Ф. Тогда предыдущие формулы примут вид

$$w_0 = -\varkappa (z\bar{z} - z_0 \bar{z}_0) + \Phi \tag{1.23}$$

$$w_1 = -2\varkappa \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \Omega(z)\, dz + \Phi \tag{1.24}$$

Этими формулами завершается построение общего решения дифференциального уравнения тонкой плиты при частичном нагреве.

Важно отметить, что функции $w_0$ и $w_1$ должны быть регулярными соответственно в областях $G_0 + l$ и $G_1 + l$. Если при этом интеграл

$$\int_{z_0}^{z} \Omega(z)\, dz \tag{1.25}$$

окажется аналитической функцией в области $G_1 + l$, то бигармоническая функция $\Phi$ будет регулярной[1] во всей области плиты.

## § 2. *Область $G_0$ есть круг*

Рассмотрим случай, когда область $G_0$ есть круг радиуса $r_0$ с центром в начале координат (фиг. 1). Уравнение окружности будет

$$\bar{z}_l = \frac{r_0^2}{z_l} \tag{2.1}$$

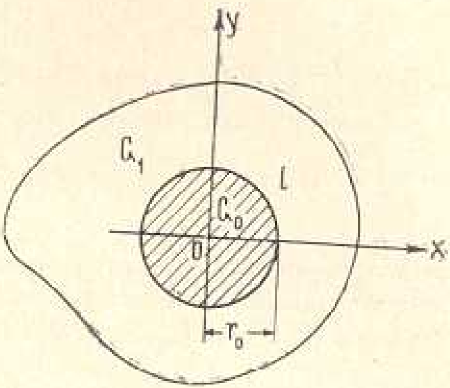
Сопоставление (2.1) с (1.18) дает

$$\Omega(z_l) = \frac{r_0^2}{z_l}$$

Следовательно,

$$\Omega(z) = \frac{r_0^2}{z} \tag{2.2}$$

Полагая для простоты $z_0 = r_0$, находим




Фиг. 1.

$$\int_{z_0}^{z} \Omega(z)\, dz = r_0^2 \ln \frac{z}{r_0}$$

Теперь общее решение (1.23) и (1.24) представится в виде

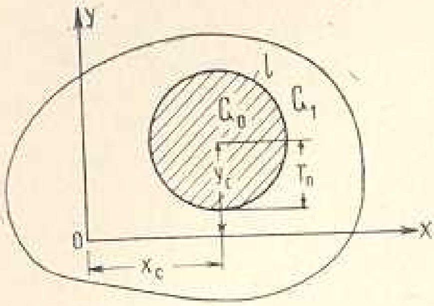
$$w_0 = -\varkappa (z\bar{z} - r_0^2) + \Phi \tag{2.3}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln \frac{z\bar{z}}{r_0^2} + \Phi \tag{2.4}$$

Из этих формул видно, что бигармоническая функция $\Phi$ будет регулярной во всей области плиты.

[1] Регулярной в данной области будем называть бигармоническую функцию непрерывную вместе со своими производными до третьего порядка включительно в той же области.

Заменив в формулах (2.3) и (2.4) $z$ на $z-z_c$ и $\bar{z}$ на $\bar{z}-\bar{z}_c$, получим общее решение рассматриваемой задачи, когда центр круговой области $G_0$ находится в точке $z_c = x_c + iy_c$ (фиг. 2):




Фиг. 2.

$$w_0 = -\varkappa[(z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c) - r_0^2] + \Phi \tag{2.5}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln \frac{(z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c)}{r_0^2} + \Phi \tag{2.6}$$

Последнюю формулу преобразуем к виду

$$w_1 = -2\varkappa r_0^2\left(\ln\frac{r}{r_0} - \Gamma\right) - 2\varkappa r_0^2\Gamma + \Phi \tag{2.7}$$

где

$$r = \sqrt{(z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c)} = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2} \tag{2.8}$$

а $\Gamma(x, y; x_c, y_c)$ — функция Грина.

Гармоническая функция

$$\ln\frac{r}{r_0} - \Gamma$$

регулярна во всей области плиты и поэтому ее, с соответствующим множителем, можно включить в состав бигармонической функции $\Phi$. Тогда формулы (2.5) и (2.7), с учетом (2.8), заменятся следующими формулами:

$$w_0 = -\varkappa\left\{(z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c) - r_0^2\left[1 + \ln\frac{(z-z_c)(\bar{z}-\bar{z}_c)}{r_0^2} - 2\Gamma\right]\right\} + \Phi \tag{2.9}$$

$$w_1 = -2\varkappa r_0^2\Gamma + \Phi \tag{2.10}$$

Рассмотрим случай, когда область плиты односвязна и известна функция

$$z = \omega(\zeta) \quad (\omega(0) = 0) \tag{2.11}$$

конформно отображающая область единичного круга на область плиты $G$. Тогда функция Грина определится известной формулой

$$\Gamma = \frac{1}{2}\ln\frac{(\zeta-\zeta_c)(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_c)}{(1-\bar{\zeta}_c\zeta)(1-\zeta_c\bar{\zeta})} \tag{2.12}$$

где $\zeta_c$ — точка единичного круга, соответствующая центру круга $G_0$.

Учитывая (2.12), из (2.9) и (2.10) для односвязной плиты получим

$$w_0 = -\varkappa\left\{(z-z_c)(\bar z-\bar z_c) - r_0^2\left[1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ln\frac{(z-z_c)(\bar z-\bar z_c)(1-\bar\zeta_c\zeta)(1-\zeta_c\bar\zeta)}{r_0^2(\zeta-\zeta_c)(\bar\zeta-\bar\zeta_c)}\right]\right\}+\Phi \qquad (2.13)$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2\ln\frac{(\zeta-\zeta_c)(\bar\zeta-\bar\zeta_c)}{(1-\bar\zeta_c\zeta)(1-\zeta_c\bar\zeta)}+\Phi \qquad (2.14)$$

### § 3. *Области $G_0$ и $G_1$ разделены прямой линией*

Пусть линия раздела областей $G_0$ и $G_1$ есть прямая, проходящая через начало координат (фиг. 3).

Уравнение этой прямой будет иметь вид

$$\bar z_l = m z_l \qquad (3.1)$$

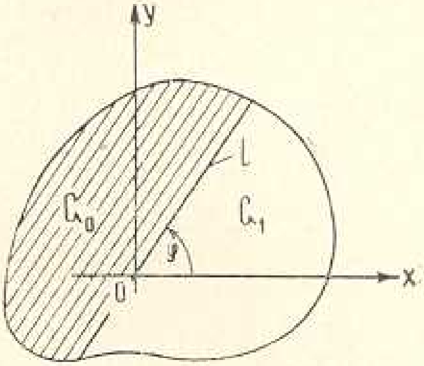
где

$$m = \frac{1-i\operatorname{tg}\varphi}{1+i\operatorname{tg}\varphi} \quad \left(\bar m = \frac{1+i\operatorname{tg}\varphi}{1-i\operatorname{tg}\varphi}\right) \qquad (3.2)$$

Здесь $\varphi$ — угол между $l$ и осью $x$.

Согласно (1.18) и (3.1)

$$\Omega(z) = mz \qquad (3.3)$$




Фиг. 3.

Учитывая (3.3), общее решение (1.23) и (1.24) для рассматриваемого частичного нагрева представим в виде

$$w_0 = -\varkappa z\bar z + \Phi \qquad (3.4)$$

$$w_1 = -\frac{\varkappa}{2}(mz^2 + \bar m\bar z^2) + \Phi \qquad (3.5)$$

Из этих формул видно, что бигармоническая функция $\Phi$ будет регулярной во всей области плиты.

Решение (3.4) и (3.5) можно привести к следующему, более удобному для применений, виду:

$$w_0 = -\frac{\varkappa}{4}(2z\bar z - mz^2 - \bar m\bar z^2) + \Phi \qquad (3.6)$$

$$w_1 = \frac{\varkappa}{4}(2z\bar z - mz^2 - \bar m\bar z^2) + \Phi \qquad (3.7)$$

В частности, когда линия $l$ совпадает с осью $y$, будем иметь

$$w_0 = -\varkappa x^2 + \Phi \qquad (3.8)$$

$$w_1 = \varkappa x^2 + \Phi \qquad (3.9)$$

## § 4. Применение конформного отображения

Для вычисления интеграла, входящего в (1.24), можно воспользоваться методом конформного отображения.

Рассмотрим случай, когда $l$ есть замкнутая линия, расположенная в области плиты.

Поскольку область определения указанного интеграла есть $G_1 + l$ и, кроме того, этот интеграл не зависит от контурных условий плиты, указанную область можно расширить до бесконечности. Таким образом, можно принять, что область определения интеграла, входящего в (1.24), есть бесконечная односвязная область с отверстием, контуром которого является линия $l$. На эту область в плоскости $z$ и будем конформно отображать бесконечную область плоскости $\zeta$ с круговым отверстием.

Пусть такое отображение осуществляется с помощью соотношения

$$z = F(\zeta) \tag{4.1}$$

Примем для простоты, что радиус указанного круга равен 1, а центр его находится в начале координат плоскости $\zeta$. Обозначим через $\gamma$ контур круга.

Из (4.1) имеем

$$\bar{z}_l = \overline{F(\zeta_\gamma)} = \bar{F}(\bar{\zeta}_\gamma)$$

откуда, учитывая очевидное соотношение $\zeta_\gamma \bar{\zeta}_\gamma = 1$, получим

$$\bar{z}_l = \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta_\gamma}\right)$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (1.18), приходим к формуле

$$\Omega(z) = \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \tag{4.2}$$

Внеся это значение функции $\Omega(z)$ в (1.24) и для простоты полагая $z_0 = F(1)$, общее решение (1.23) и (1.24) представим в виде

$$w_0 = -\varkappa(z\bar{z} - z_0\bar{z}_0) + \Phi \tag{4.3}$$

$$w_1 = -2\varkappa \operatorname{Re}\int_1^{\zeta} \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) F'(\zeta)\, d\zeta + \Phi \tag{4.4}$$

В качестве примера применения этих формул рассмотрим случай, когда $G_0$ есть эллипс с полуосями $a$ и $b$.

Совместим оси $x$ и $y$ соответственно с большой и малой осями эллипса (фиг. 4).

Внешность единичного круга отображается на внешность эллипса соотношением

$$z = F(\zeta) = k\left(\zeta + \frac{\lambda}{\zeta}\right) \tag{4.5}$$

где

$$k = \frac{a+b}{2}, \qquad \lambda = \frac{a-b}{a+b}$$

Из (4.5) имеем

$$\overline{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = k\left(\frac{1}{\zeta} + \lambda\zeta\right), \qquad F'(\zeta) = k\left(1 - \frac{\lambda}{\zeta^2}\right)$$

Внеся эти значения в (4.4), общее решение (4.3) и (4.4) представим в окончательном виде

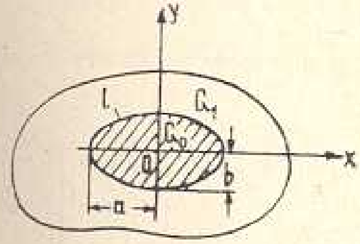
$$w_0 = -\varkappa(z\bar z - a^2) + \Phi \tag{4.6}$$

$$w_1 = -\varkappa k^2\left[(1-\lambda^2)\zeta\bar\zeta + \frac{\lambda}{2}\left(\zeta^2 + \bar\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\bar\zeta^2} - 4\right)\right] + \Phi \tag{4.7}$$

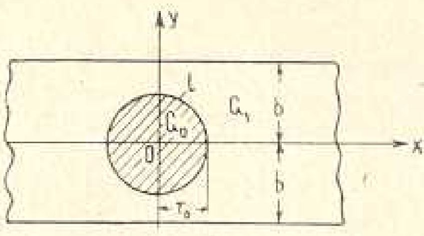
## § 5. *Задачи*

*1. Изгиб свободно опертой по контуру бесконечной полосы в случае, когда область $G_0$ есть круг с центром в произвольной точке продольной оси полосы*

Обозначим через $2b$ ширину полосы, а через $r_0$ — радиус области $G_0$ (фиг. 5).




Фиг. 4.




Фиг, 5.

Для определения прогибов полосы воспользуемся формулами (2.13) и (2.14) при $z_c = \bar z_c = 0$ $(\zeta_c = \bar\zeta_c = 0)$

$$w_0 = -\varkappa\left[z\bar z - r_0^2\left(1 + \ln\frac{z\bar z}{r_0^2}\right)\right] + \Phi \tag{5.1}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln \zeta\bar\zeta + \Phi \tag{5.2}$$

Контурными условиями полосы будут

$$w_1 = 0, \quad \nabla^2 w_1 = 0 \quad (y = \pm b) \tag{5.3}$$

Так как функция Грина $\left(\text{в данном случае } \frac{1}{2}\ln\zeta\bar{\zeta}\right)$ обращается в нуль на контуре плиты и, кроме того, она является гармонической функцией, то, в силу условий (5.3), из (5.2) получим для точек контура полосы

$$\Phi = 0, \quad \nabla^2\Phi = 0 \tag{5.4}$$

Поскольку $\Phi$ является регулярной бигармонической функцией во всей области полосы, то из (5.4) следует, что она тождественно равна нулю в указанной области. Следовательно, из (5.1) и (5.2) сразу получим решение рассматриваемой задачи

$$w_0 = -\varkappa\left[z\bar{z} - r_0^2\left(1 + \ln\frac{z\bar{z}}{r_0^2\zeta\bar{\zeta}}\right)\right] \tag{5.5}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln\zeta\bar{\zeta} \tag{5.6}$$

Область единичного круга отображается на область полосы с помощью функции

$$z = \omega(\zeta) = \frac{2b}{\pi}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \tag{5.7}$$

откуда

$$\zeta = \frac{e^{\frac{\pi z}{2b}} - 1}{e^{\frac{\pi z}{2b}} + 1} \tag{5.8}$$

Внеся (5.8) в (5.5) и (5.6) и перейдя к действительным переменным $x$ и $y$, приходим к окончательному результату

$$w_0 = -\varkappa\left\{x^2 + y^2 - r_0^2\left[1 + \ln\frac{(x^2+y^2)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} + \cos\frac{\pi y}{2b}\right)}{r_0^2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} - \cos\frac{\pi y}{2b}\right)}\right]\right\} \tag{5.9}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2 \ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} - \cos\frac{\pi y}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} + \cos\frac{\pi y}{2b}} \tag{5.10}$$

Учитывая, что

$$\lim_{\substack{y=0 \\ x\to 0}} \frac{(x^2+y)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} + \cos\frac{\pi y}{2b}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} - \cos\frac{\pi y}{2b}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} + 1\right)}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2b} - 1} = \left(\frac{4b}{\pi}\right)^2$$

из (5.9) находим прогиб центра области $G_0$

$$w_0 = \varkappa r_0^2 \left(1 + 2 \ln \frac{4b}{\pi r_0}\right) \tag{5.11}$$

## 2. *Изгиб свободно опертой по контуру правильной многоугольной плиты в случае, когда область $G_0$ есть круг, центр которого совпадает с центром многоугольника*

Центр многоугольника примем за начало координат, а ось $x$ проведем через одну из вершин многоугольника. Обозначим через $R$ радиус окружности, описанной вокруг многоугольника, а через $r_0$ — радиус круга $G_0$.

Прогибы многоугольника, как и в предыдущей задаче, будут определяться формулами (5.5) и (5.6).

Отображающая функция дается формулой Кристоффеля-Шварца

$$z = \omega(\zeta) = c \int_0^{\zeta} (1 - t^n)^{-\frac{2}{n}} dt \tag{5.12}$$

Здесь $n$ — число сторон многоугольника, а постоянная $c$ определяется формулой [1]

$$c = \frac{R}{\int_0^1 (1 - t^n)^{-\frac{2}{n}} dt} = \frac{n\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{2}{n}\right)} \tag{5.13}$$

где $\Gamma$ — гамма-функция.

Некоторые значения для $\frac{c}{R}$ приведены в табл. 1.

*Таблица 1*

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c:R$ | 0.5661 | 0.7628 | 0.8514 | 0.8985 | 0.9442 | 0.9759 |

Функция (5.12) при $|\zeta| \leqslant 1$ разлагается в степенной ряд

$$\omega(\zeta) = c\left(\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn+1} \zeta^{kn+1}\right) \tag{5.14}$$

где

$$c_{kn+1} = \frac{2(n+2)(2n+2)\ldots[(k-1)n+2]}{n^k (kn+1) k!} \tag{5.15}$$

Пользуясь (5.14), из (5.5) и (5.6) можно определить прогибы в любой точке многоугольника. В частности, используя предельный переход

$$\lim_{\zeta\to 0}\frac{z}{\zeta}=\lim_{\zeta\to 0}\frac{\omega(\zeta)}{\zeta}=\omega'(0)=c$$

из (5.5) определим прогиб в центре правильного многоугольника

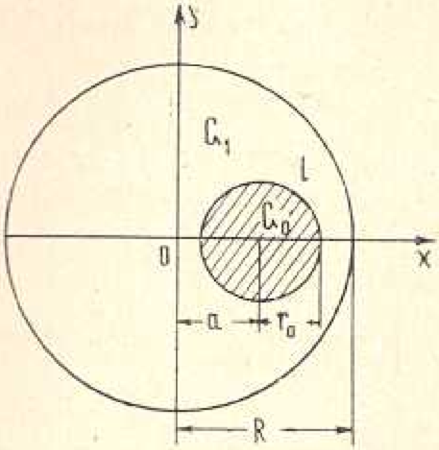
$$w_0=\varkappa r_0^2\left(1+2\ln\frac{c}{r_0}\right)$$

### 3. *Изгиб заделанной круглой плиты в случае, когда область $G_0$ есть круг, центр которого не совпадает с центром области плиты*

Центр круглой плиты примем за начало координат (фиг. 6) и обозначим через $R$ радиус этого круга, $r_0$ — радиус области $G_0$.

Без ограничения общности примем

$$x_c=a,\quad y_c=0\quad (z_c=\bar{z}_c=a)$$




Фиг. 6.

Имея в виду, что в рассматриваемом случае

$$z=\omega(\zeta)=R\zeta \tag{5.16}$$

из формул (2.13) и (2.14) получим

$$w_0=-\varkappa\left\{(z-a)(\bar{z}-a)-r_0^2\left[1+\ln\frac{(R^2-az)(R^2-a\bar{z})}{R^2r_0^2}\right]\right\}+\Phi \tag{5.17}$$

$$w_1=-\varkappa r_0^2\ln\frac{R^2(z-a)(\bar{z}-a)}{(R^2-az)(R^2-a\bar{z})}+\Phi \tag{5.18}$$

Из контурных условий плиты с применением интеграла типа Коши [2] для бигармонической функции $\Phi$ имеем

$$\Phi=-\varkappa\frac{r_0^2(R^2-r^2)(R^4-a^2r^2)}{R^2(R^4-2R^2ar\cos\theta+a^2r^2)} \tag{5.19}$$

где $r$ и $\theta$ — полярные координаты.

Представим теперь прогибы (5.17) и (5.18) в окончательном виде

$$w_0=-\varkappa\left[r^2-2ar\cos\theta-r_0^2\left(1+\ln\frac{R^4-2R^2ar\cos\theta+a^2r^2}{R^2r_0^2}\right)+\frac{r_0^2(R^2-r^2)(R^4-a^2r^2)}{R^2(R^4-2R^2ar\cos\theta+a^2r^2)}\right] \tag{5.20}$$

$$w_1=-\varkappa r_0^2\left[\ln\frac{R^2(r^2-2ar\cos\theta+a^2)}{R^4-2R^2ar\cos\theta+a^2r^2}+\frac{(R^2-r^2)(R^4-a^2r^2)}{R^2(R^4-2R^2ar\cos\theta+a^2r^2)}\right] \tag{5.21}$$

В частном случае, когда $a = 0$, будем иметь

$$w_0 = -\varkappa\left[r^2 - r_0^2\left(1 + 2\ln\frac{R}{r_0}\right) + \frac{r_0^2(R^2 - r^2)}{R^2}\right] \tag{5.22}$$

$$w_1 = -\varkappa r_0^2\left(2\ln\frac{r}{R} + 1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{5.23}$$

При $r_0 = R$ из (5.22) и (5.23) будем иметь

$$w_0 = 0, \quad w_1 = 0$$

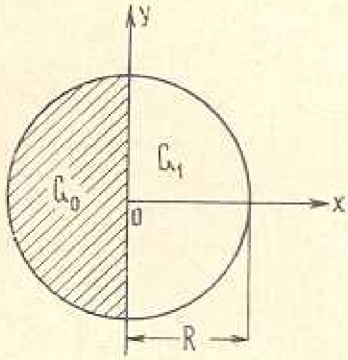
что совпадает с известным результатом [3].

### 4. *Изгиб свободно опертой по контуру круглой плиты в случае, когда области $G_0$ и $G_1$ разделены прямой линией, делящей область плиты на две равные части*

Линию раздела областей $G_0$ и $G_1$ совместим с осью $y$, а центр области плиты примем за начало координат (фиг. 7).

Для рассматриваемого случая общее решение представится формулами (3.8) и (3.9), которые в полярных координатах будут иметь вид

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{\varkappa}{2} r^2 (1 + \cos 2\theta) + \Phi \\ w_1 &= \frac{\varkappa}{2} r^2 (1 + \cos 2\theta) + \Phi \end{aligned} \tag{5.24}$$




Фиг. 7.

Бигармоническая функция $\Phi$ в области плиты разлагается в ряд

$$\Phi = A_0 + B_2 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_{2n-1} r^{2n-1} + B_{2n-1} r^{2n+1}) \cos (2n-1)\theta \tag{5.25}$$

Коэффициенты этого ряда подлежат определению из контурных условий.

Из условий равенства нулю на контуре соответственно прогиба и изгибающего момента имеем

$$\Phi(R, \theta) = \begin{cases} -\dfrac{\varkappa}{2} R^2 (1 + \cos 2\theta) & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\varkappa}{2} R^2 (1 + \cos 2\theta) & \text{при } \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \tag{5.26}$$

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=R} = \begin{cases} -(1+\mu)\varkappa(1 + \cos 2\theta) & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ (1+\mu)\varkappa(1 + \cos 2\theta) - 4\varkappa & \text{при } \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \tag{5.27}$$

Внеся (5.25) в (5.26) и (5.27), определим указанные коэффициенты $A_k$, $B_k$. Далее, подставив найденные значения этих коэффициентов в (5.25), после некоторых преобразований получим

$$\Phi = \frac{\varkappa}{1+\mu}(R^2 - r^2) - \frac{4\varkappa}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-1}}{(4n^2-1)(4n+\mu-1)}\Big[(1-\mu)r^2 +$$

$$+ \frac{2n(3+\mu)+1-\mu}{2n-3}R^2\Big]\cos(2n-1)\theta \tag{5.28}$$

С учетом этого выражения прогибы (5.24) представим в окончательном виде

$$w = \mp\frac{\varkappa}{2}r^2(1+\cos 2\theta) + \frac{\varkappa}{1+\mu}(R^2 - r^2) -$$

$$-\frac{4\varkappa}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-1}}{(4n^2-1)(4n+\mu-1)}\Big[(1-\mu)r^2 +$$

$$+ \frac{2(3+\mu)n+1-\mu}{2n-3}R^2\Big]\cos(2n-1)\theta \tag{5.29}$$

где из двух знаков верхний относится к области $G_0 + l$, а нижний — к области $G_1 + l$.

Заметим, что когда температура $\tau(x, y)$ имеет постоянное значение $\tau_0$ во всей области плиты $G$, прогибы определяются формулой [3]

$$w = \frac{2\varkappa}{1+\mu}(R^2 - r^2)$$

При этом плита остается ненапряженной

$$M_r = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + 4\varkappa\right) \equiv 0$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 30 XI 1979

Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ

## ԲԱՐԱԿ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ՏԱՔԱՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Դիտվում է սալի ծռման ջերմաառաձգական խնդրի այն դեպքը, երբ նրա մի մասը տաքացվում է, իսկ մյուս մասի ջերմաստիճանը պահվում է հավասար զրոյի։ Տաքացման մասում ջերմաստիճանը ըստ սալի հաստության փո-*