ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, №2, 1980 Механика

К. У. ОЛЬШЕВСКИЙ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИКИ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ

Система нелинейных уравнений для определения усилий при конечных перемещениях в первоначально прямолинейном стержне кругового поперечного сечения имеет вид [1]

$$\dot{\vec{q}} = -\vec{f}; \qquad \dot{\vec{m}} = [\vec{q}, \vec{\tau}]$$
$$\varepsilon\{[\vec{\tau}, \dot{\vec{\tau}}] + \varkappa T\vec{\tau}\} = \vec{m} \tag{1.1}$$

Для определения упругой линии стержня к системе (1.1) следует добавить уравнение $\dot{\vec{N}} = \vec{\tau}$. Безразмерные переменные и параметры определяются следующим образом: $\vec{q} = \vec{Q}(qL)^{-1}$; $\vec{m} = \vec{M}(qL^2)^{-1}$ — векторы приведенных сил и моментов в произвольном сечении стержня, $\vec{f} = \vec{F}(q)^{-1}$ — вектор распределенной нагрузки, $\varepsilon = EJ(qL^3)^{-1}$ — относительная жесткость на изгиб, $\varkappa$ — отношение жесткостей на кручение и изгиб, T — кривизна кручения осевой линии стержня, $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной к изогнутой оси стержня, $t = sL^{-1}$ — независимая переменная, s, L — длина дуги и полная длина стержня, q — характерный параметр распределенной нагрузки, например, погонный вес стержня. Здесь и далее $[\vec{a}, \vec{b}]$, $(\vec{a}, \vec{b})$ — векторное и скалярное произведение векторов.

Для нахождения асимптотического решения системы уравнений (1.1) применим один из вариантов метода сращиваемых асимптотических разложений [2]. Суть метода заключается в том, что равномерно пригодное решение для всей области изменения независимой переменной является суммой, состоящей из части, характеризуемой исходной независимой переменной, и части, характеризуемой увеличенной независимой переменной в области краевого эффекта.

Асимптотическое решение, характеризуемое исходной независимой переменной, является при $\varepsilon \to 0$ решением системы предельных уравнений.

$$\dot{\vec{q}} = -\vec{f}; \quad [\vec{q}, \vec{\tau}] = 0 \tag{1.2}$$

Система уравнений (1.2) описывает равновесие идеальной гибкой нити в потоке,

$$\vec{\tau} = \left(\vec{q}_0 - \int_0^t \vec{f} dt\right) \cdot |\vec{q}|^{-1} \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) непригодно в области краевого эффекта около точек опирания или действия сосредоточенных сил. Для того, чтобы получить решение, пригодное в области краевого эффекта, введем преобразование $t = \varepsilon^{1/2}\tilde{t}$. Система уравнений (1.1) примет вид

$$\begin{gathered} \vec{q}^{\,\cdot} = -\varepsilon^{1/2}\vec{f} \\ \{[\vec{\tau}_0, \vec{\tau}^{\,\cdot}] + \varkappa T\vec{\tau}\}^{\cdot} = [\vec{q}, \vec{\tau}] \end{gathered} \tag{1.4}$$

Для линеаризации системы нелинейных уравнений (1.4) полагаем, что в области краевого эффекта $\vec{\tau} = \vec{\tau}_0 + \vec{\tau}_*$, где $\vec{\tau}_0 = \vec{q}_0 \cdot |\vec{q}_0|^{-1}$ — значение единичного вектора касательной к оси идеальной гибкой нити (1.3) в точке опирания стержня $t = 0$, $|\vec{\tau}_*| \ll 1$. Систему предельных линеаризованных уравнений (1.4) при $\varepsilon \to 0$ можно привести к следующему уравнению:

$$[\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*^{\,\cdot\cdot}] + \varkappa T^{\cdot}\vec{\tau}_0 = [\vec{q}_0, \vec{\tau}_*]$$

Умножим векторно обе части последнего уравнения на $\vec{\tau}_0$. Используя формулу двойного векторного произведения

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = (\vec{a}, \vec{c})\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{c}$$

получим

$$(\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*^{\,\cdot\cdot})\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_* = (\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*)\vec{q}_0 - (\vec{\tau}_0, \vec{q}_0)\vec{\tau}_*$$

После выполнения повторно операции векторного умножения на $\vec{\tau}_0$ запишем

$$[\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*]^{\cdot\cdot} - (\vec{\tau}_0, \vec{q}_0)[\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*] = 0 \tag{1.5}$$

Решение уравнения (1.5) имеет вид

$$[\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_*] = \vec{c}_1 e^{-\lambda\tilde{t}} + \vec{c}_2 e^{\lambda\tilde{t}}$$

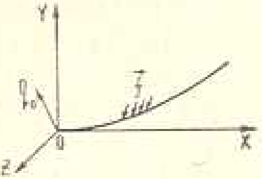
где $\lambda^2 = |\vec{q}_0|$. Из условия ограниченности вектора $\vec{\tau}_*$ в области краевого эффекта при $\tilde{t} \to \infty$ следует $\vec{c}_2 = 0$. Окончательно имеем

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_0 + \vec{c}e^{-\lambda\tilde{t}} \tag{1.6}$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для области в окрестности другой опоры, введя преобразование $t = 1 - \varepsilon^{1/2}\bar{t}$. При $\bar{t} \to \infty$ значение вектора $\vec{\tau}$ совпадает со значением вектора τ, определяемого уравнением (1.3), при $t \to 0$. Из условия совпадения значений векторов $\vec{\tau}$ на границе области краевого эффекта и области, характеризуемой исходной независимой переменной, следует, что равномерно пригодное решение системы уравнений (1.1) во всей области изменения $t \in [0, 1]$ равно

$$\vec{\tau} = \vec{c}_1 e^{-\lambda\varepsilon^{-1/2} t} + \vec{c}_2 e^{-\lambda\varepsilon^{-1/2}(1-t)} + \left(\vec{q}_0 - \int_0^t \vec{f} dt\right) |\vec{q}|^{-1} \qquad (1.7)$$

Применим полученный результат для исследования изгиба стержня при безотрывном поперечном обтекании потоком жидкости. Рассмотрим случай, когда один конец стержня лежит на горизонтальной плоскости и удерживается лишь за счет трения, а второй расположен на значительном удалении от плоскости. Начало неподвижной декартовой системы координат расположим в точке касания провисшего участка стержня с опорной плоскостью. Положим, что часть стержня, лежащая на плоскости, прямолинейна и параллельна оси x, а к верхнему концу стержня приложено горизонтальное растягивающее усилие n в направлении оси x. Распределенная нагрузка, действующая на провисшую часть стержня, равна $\vec{f} = -\vec{j} - p\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные орты неподвижной декартовой системы координат.



Фиг. 1.

Отметим, что поскольку длина провисшей части стержня заранее неизвестна, то в качестве характерной длины можно принять расстояние от опорной плоскости до верхнего конца стержня H, то есть положить в выражениях для безразмерных параметров и переменных $L = H$.

В точке опирания провисшей части стержня с опорной плоскостью имеем следующие граничные условия: $\vec{\tau}(0) = \vec{i}$, $m(0) = 0$. В области стержня, расположенной около опорной плоскости

$$\vec{\tau} = \vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

где $|y|$, $|z| \ll 1$. Из формулы (1.7) следует

$$\vec{\tau} = \vec{c}_1 e^{-n^{1/2}\varepsilon^{-1/2}t} + (\vec{q}_0 - \vec{f}t)\, n^{-1}$$

где

$$\vec{c}_1 = \varepsilon^{1/2} n^{-3/2} (\vec{j} + p\vec{k})$$

$$\vec{q}_0 = n\vec{i} - \varepsilon^{1/2} n^{-1/2} (\vec{j} + p\vec{k})$$

Значения изгибающего момента определяются по формуле

$$|m| = \frac{\varepsilon}{n}(1+p^2)^{-1/2}(1-e^{-n^{1/2}\varepsilon^{-1/2}t})$$

Точность асимптотической формулы (1.7) растет с увеличением ε^{-1} и n. Численное решение плоской задачи изгиба стержня ($p=0$) показало, что при $\varepsilon = 0.001$ и $n = 1.7$ погрешность асимптотической формулы (1.7) не превышает 5%. При больших значениях ε эта же точность достигается увеличением значения n, например, при $\varepsilon = 0.03$, $n = 2.4$.

Киевский филиал ВНИИСТа

Поступила 4 VI 1979

Կ. Ու. ՕԼՇԵՎՍԿԻ

ՃԿՈՒՆ ՁՈՂԵՐԻ ՍՏԱՏԻԿԱՅԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Վերլուծությունների միաձուլման ասիմպտոտական մեթոդի օգնությամբ ուսումնասիրվում է կենտրոնացած ուժերի ազդման շրջանում սահմանային էֆեկտների ազդեցությունը։

Ստացված արդյունքները կիրառվում են հեղուկի համասեռ հոսանքում գտնվող ձողում ուժերի և մոմենտների որոշման համար։

A METHOD OF ASYMPTOTIC INVESTIGATION OF FLEXIBLE ROD STATICS

K. U. OLSHEVSKY

Summary

To find asymptotic solution of nonlinear equations a method of joined asymptotic expansions is proposed. The uniformly fitting solution obtained for the system of equations may be used to determine force and moments in the rod placed in a homogeneous fluid flow.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Е. П.* Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л.—М., Гостехиздат, 1948.
2. *Ван-Дейк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В мою статью «Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся нелинейной ползучести», опубликованной в журнале «Известия АН Армянской ССР, Механика», 1980 г., т. XXXIII, № 1, прошу внести следующие исправления:

1. Первая из формул (1.5) должна иметь вид

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_{11}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2}{3} + \varepsilon_{12}^2}$$

2. Формула, предшествующая формуле (4.9) и стоящая во второй строке на стр. 41, должна иметь вид

$$v_{1,2} = 2\varepsilon_{12} = 2A\,|\tau(x_1)|^m \operatorname{sgn}(\tau)$$

3. Формула (4.3) должна иметь вид

$$\sigma_{22} = (h - x_2)\,\tau'(x_1) + \frac{(h - x_2)^2}{2} f''(x_1)$$

4. Последняя из формул (4.5) должна иметь вид

$$\sigma_{22} = (h - x_2)\,\tau'(x_1) + \frac{\nu}{1-\nu} h \frac{(h - x_2)^2}{2} \tau'''(x_1) \approx \tau'(x_1)(h - x_2)$$

М. А. СУМБАТЯН