

В. Н. ЛОЖКИН

## ДИНАМИКА ПЬЕЗОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Упругое равновесие тонких анизотропных пластин, которые имеют плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости, хорошо изучено [1, 8, 16, 19].

Теория пластин с общим характером упругой анизотропии рассмотрена в работах [3, 20, 22]. В [20, 22] выведены статические уравнения в предположениях, при которых справедливы кинематические гипотезы Кирхгофа. В [3] получены уравнения статики и динамики пластин с общим характером неоднородности и упругой анизотропии в предположениях, менее жестких, чем в [20, 22], и указаны некоторые случаи, когда гипотезы Кирхгофа не имеют места.

Упругое равновесие тонких пьезокристаллических пластин, у которых имеется плоскость материальной симметрии, изучено в работах [5, 7, 11—13]. Общий случай материальной анизотропии рассмотрен в работе [14].

Общий подход к исследованию линейных задач магнитоупругости для проводящих пластин и оболочек изложен в монографии [2].

Некоторые задачи динамики пьезокристаллических пластин решены в работах [9, 10] и пьезокерамических пластин — в [17, 18, 21]. Обзор исследований по этой проблеме сделан в книге [15].

В предполагаемой работе асимптотический метод, предложенный в работе [6] и обобщенный на пьезоэлектрическую среду [13, 14], применен для изучения среднечастотных установившихся колебаний тонких пьезокристаллических пластин в трехмерной постановке. При этом под средними подразумеваются частоты установившихся колебаний тонкой пластины, которые с уменьшением ее толщины стремятся к некоторым постоянным величинам, отличным от нуля.

1. Рассмотрим в декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  пьезокристаллическую пластину постоянной толщины  $2h$ ,  $|x_3| \leq h$ . Срединная поверхность пластины занимает в плоскости  $x_3 = 0$  конечную область  $S$  с границей  $\Gamma$ . Материал пластины обладает общей материальной анизотропией.

Уравнения установившихся колебаний рассматриваемой пластины запишем так [4, 21]:

$$\begin{aligned} \Omega^2 y_1 + M_1 y_2 + \lambda^{-1} \partial_3 y_3 &= 0 \\ \Omega^2 w_3 + M_2 y_3 + \lambda^{-1} \partial_3 \tau_{33} &= 0, \quad M_3 y_2 + \lambda^{-1} \partial_3 d_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Термодинамические соотношения, связывающие линейной зависимостью упругие и электрические величины, возьмем в виде [4]

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1} \partial_3 w_3 &= A_{11} y_2 + A_{12} y_3 + m_{33} d_3 + l_{33} \tau_{33} \\
\lambda^{-1} \partial_3 y_1 + M_2^* w_3 &= A_{21} y_2 + A_{22} y_3 + A_{23}^* d_3 + A_{12}^* \tau_{33} \\
M_1^* y_1 + M_3^* \varphi &= A_{31} y_2 + A_{32}^* y_3 + A_{33}^* d_3 + A_{11}^* \tau_{33} \\
\lambda^{-1} \partial_3 \varphi &= A_{32} y_2 + A_{23} y_3 - n_{33} d_3 + m_{33} \tau_{33}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь звездочкой обозначено транспонирование матрицы,

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \|l_{13} \ l_{23} \ l_{33} \ m_{13} \ m_{23}\|, \quad A_{12} = \|l_{35} \ l_{34}\| \\
A_{23} &= \|m_{35} \ m_{34}\|, \quad A_{32} = \|m_{13} \ m_{23} \ m_{33} \ -n_{13} \ -n_{23}\| \\
M_1 &= \|\partial_1 \ \partial_2\|, \quad M_3 = \|0 \ 0 \ 0 \ \partial_1 \ \partial_2\| \\
y_1 &= \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}, \quad y_3 = \begin{vmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
A_{22} &= \begin{vmatrix} l_{35} & l_{45} \\ l_{45} & l_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{21} = \begin{vmatrix} l_{15} & l_{25} & l_{35} & m_{15} & m_{25} \\ l_{14} & l_{24} & l_{34} & m_{14} & m_{24} \end{vmatrix} \\
y_2 &= \begin{vmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \\ d_1 \\ d_2 \end{vmatrix}, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{16} & m_{11} & m_{21} \\ l_{12} & l_{22} & l_{26} & m_{12} & m_{22} \\ l_{16} & l_{26} & l_{66} & m_{16} & m_{26} \\ m_{11} & m_{12} & m_{16} & -n_{11} & -n_{12} \\ m_{21} & m_{22} & m_{26} & -n_{12} & -n_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Рассмотрим два варианта граничных условий на плоских гранях пластины, физическая сущность которых изложена в работе [21],

$$y_3 = Q_{\pm}, \quad d_3 = \sigma_{\pm}, \quad \tau_{33} = q_{\pm}, \quad \xi_3 = \pm 1 \tag{1.4}$$

$$\varphi = \psi_{\pm}, \quad y_3 = Q_{\pm}, \quad \tau_{33} = q_{\pm}, \quad \xi_3 = \pm 1 \tag{1.5}$$

Граничные условия на боковой поверхности пластины пока конкретизировать не будем.

В равенствах (1.1)—(1.5) введены следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a \xi_1, \quad x_2 = a \xi_2, \quad x_3 = h \xi_3, \quad h = a \lambda, \quad \partial_j = \partial / \partial \xi_j \\
u_j &= a w_j, \quad v = v_0 \varphi, \quad t_0 \Omega^2 = a^2 \rho \omega^2 \\
t_{jq} &= t_0 \tau_{jq}, \quad a t_0 d_j = v_0 D_j \\
l_{jq} &= t_0 s_{jq}^D, \quad v_0 m_{jq} = a t_0 g_{jq}, \quad v_0^2 n_{jq} = a^2 t_0 \beta_{jq}^t
\end{aligned}$$

где  $u_j e^{i\omega t}$  — компоненты вектора смещения,  $t_{jq} e^{i\omega t}$  — компоненты тензора упругих напряжений,  $v e^{i\omega t}$  — электрический потенциал,  $D_j e^{i\omega t}$  — компоненты вектора электрического смещения,  $s_{jq}^D$ ,  $g_{jq}$ ,  $\beta_{jq}^t$  — материальные постоянные [4];  $\rho$  — удельная плотность материала пластины;

$a$  — линейный параметр пластины в области  $S$ ;  $\omega$  — частота установившихся колебаний;  $t_0$  и  $\varepsilon_0$  — постоянные, имеющие размерности упругого напряжения и электрического потенциала соответственно.

2. Материал пластины обладает общей анизотропией. Поэтому при малых значениях  $\lambda$  представим величину  $\Omega^2$  так:

$$\Omega^2 = \sum_{n=0}^N \lambda^n \Omega_n^2, \quad \Omega_0^2 \neq 0 \quad (2.1)$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что для функций, входящих в условия (1.4), имеют место равенства

$$(Q_{\pm}, \sigma_{\pm}, q_{\pm}) = \sum_{n=0}^N \lambda^{n+\nu} (Q_{\pm}^{(n)}, \sigma_{\pm}^{(n)}, q_{\pm}^{(n)}) \quad (2.2)$$

Чтобы построить непротиворечивый основной итерационный процесс [6, 13, 14] для задачи (1.1), (1.2), (1.4), необходимо предположить, что асимптотические разложения электроупругих характеристик должны начинаться со следующих степеней  $\lambda$ :

$$y_1, \varphi, y_2 \sim \lambda^{-2}; \quad w_3, y_3, d_3 \sim \lambda^{-1}; \quad \varepsilon_{33} \sim \lambda^2 \quad (2.3)$$

Для первых двух приближений ( $m = 0, 1$ ) этого процесса найдем

$$y_1^{(m)} = y_1^{(m,0)}(\xi) + \xi_3 A_{21} y_2^{(m-1,0)}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

$$\varphi^{(m)} = \varphi^{(m,0)}(\xi) + \xi_3 A_{32} y_2^{(m-1,0)}$$

$$y_2^{(m)} = y_2^{(m,0)} + \xi_3 y_2^{(m-1,1)}$$

$$y_2^{(m,0)} = A_{31}^{-1} (M_1^* y_1^{(m,0)} + M_3^* \varphi^{(m,0)})$$

$$y_2^{(m,1)} = A_{31}^{-1} (M_1^* A_{21} + M_3^* A_{32}) y_2^{(m,0)}$$

$$w_3^{(m)} = w_3^{(m,0)} + \xi_3 A_{11} y_2^{(m,0)} + \frac{1}{2} (1 - \xi_3^2) A_{11} y_2^{(m-1,1)} \quad (2.4)$$

$$w_3^{(m,0)} = -\frac{1}{2} \Omega_0^{-2} [q_+^{(m)} - q_-^{(m)} + M_2 (Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) + 2\Omega_1^2 w_3^{(m-1,0)}] -$$

$$-\frac{1}{3} [(\Omega_0^{-2} M_2 M_1 - A_{11}) y_2^{(m-1,1)} + M_2 A_{21} y_2^{(m-1,0)}]$$

$$y_3^{(m)} = \frac{1}{2} (Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) + \frac{1}{2} \xi_3 (Q_+^{(m-1)} - Q_-^{(m-1)}) +$$

$$+ \frac{1}{2} (1 - \xi_3^2) M_1 y_2^{(m-1,1)} + \Omega_0^2 A_{21} y_2^{(m-1,0)}$$

$$d_3^{(m)} = \frac{1}{2} (\sigma_+^{(m-1)} + \sigma_-^{(m-1)}) + \frac{1}{2} \xi_3 (\sigma_+^{(m-1)} - \sigma_-^{(m-1)}) + \frac{1}{2} (1 - \xi_3^2) M_3 y_2^{(m-1,1)}$$

$$\begin{aligned} \tau_{33}^{(m)} &= \frac{1}{2} (q_+^{(m)} + q_-^{(m)}) + \frac{1}{2} \xi_3 (q_+^{(m)} - q_-^{(m)}) + \\ &+ \frac{1}{2} (1 - \xi_3^2) \left[ \frac{1}{2} M_2 (Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) + A_{11} (\Omega_0^2 y_2^{(m,0)} + \Omega_1^2 y_2^{(m-1,0)}) \right] - \\ &- \frac{1}{6} (\xi_3 - \xi_3^3) [(M_2 M_1 - \Omega_0^2 A_{11}) y_2^{(m-1,1)} + \Omega_0^2 M_2 A_{21} y_2^{(m-1,0)}] \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $y_1^{(m,0)}$  и  $\varphi^{(m,0)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} M_1 A_{31}^{-1} (M_1^* y_1^{(m,0)} + M_3^* \varphi^{(m,0)}) + \Omega_0^2 y_1^{(m,0)} &= \\ = -\frac{1}{2} (Q_+^{(m-1)} - Q_-^{(m-1)}) - \Omega_1^2 y_1^{(m-1,0)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$M_3 A_{31}^{-1} (M_1^* y_1^{(m,0)} + M_3^* \varphi^{(m,0)}) = -\frac{1}{2} (\varphi_+^{(m-1)} - \varphi_-^{(m-1)})$$

Предположим, что для функций, входящих в условия (1.5), при малых значениях  $\lambda$  справедливы представления

$$(\psi_{\pm}, Q_{\pm}, q_{\pm}) = \sum_{n=0}^N \lambda^{n+\nu} (\psi_{\pm}^{(n)}, Q_{\pm}^{(n)}, q_{\pm}^{(n)}) \quad (2.6)$$

Тогда асимптотические разложения электроупругих характеристик должны начинаться со следующих степеней  $\lambda$ :

$$y_1, y_2, d_3 \sim \lambda^{\nu-2}; \quad w_3, \varphi, y_3 \sim \lambda^{\nu-1}; \quad \tau_{33} \sim \lambda^{\nu} \quad (2.7)$$

Для первых двух приближений основного итерационного процесса задачи (1.1), (1.2), (1.5) получим

$$\begin{aligned} y_1^{(m)} &= y_1^{(m,0)}(\xi) + \xi_3 (A_{21} y_2^{(m-1,0)} + A_{23}^* d_3^{(m-1,0)}) \\ d_3^{(m)} &= d_3^{(m,0)} - \xi_3 M_2 y_2^{(m-1,0)} \\ d_3^{(m,0)} &= (n_{33} + A_{32} A_{31}^{-1} A_{32}^*)^{-1} \left[ A_{32} A_{31}^{-1} M_1^* y_1^{(m,0)} - \frac{1}{2} (\psi_+^{(m-1)} - \psi_-^{(m-1)}) \right] \\ y_2^{(m)} &= y_2^{(m,0)} + \xi_4 y_2^{(m-1,1)} \\ y_2^{(m,0)} &= A_{11}^{-1} (M_1^* y_1^{(m,0)} - A_{32}^* d_3^{(m,0)}) \\ y_2^{(m,1)} &= A_{31}^{-1} [(M_1^* A_{21} + A_{32}^* M_3) y_2^{(m,0)} + M_1^* A_{23}^* d_3^{(m,0)}] \\ w_3^{(m)} &= w_3^{(m,0)} + \xi_3 (A_{11} y_2^{(m,0)} + m_{33} d_3^{(m,0)}) - \\ &- \frac{1}{2} (1 - \xi_3^2) (A_{11} y_2^{(m-1,1)} - m_{33} M_3 y_2^{(m-1,0)}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
w_3^{(m, 0)} = & -\frac{1}{2} \Omega_0^{-2} [q_+^{(m)} - q_-^{(m)} + M_2 (Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) + 2\Omega_1^2 w_3^{(m-1, 0)}] - \\
& -\frac{1}{3} [(\Omega_0^{-2} M_2 M_1 - A_{11}) y_2^{(m-1, 1)} + \\
& + (m_{33} M_3 + M_2 A_{21}) y_2^{(m-1, 0)} + M_2^* A_{23}^* d_3^{(m-1, 0)}] \\
\varphi^{(m)} = & \frac{1}{2} (\psi_+^{(m-1)} + \psi_-^{(m-1)}) + \frac{1}{2} \xi_3 (\psi_+^{(m-1)} - \psi_-^{(m-1)}) - \\
& -\frac{1}{2} (1 - \xi_3^2) (A_{32} y_2^{(m-1, 1)} + m_{33} M_3 y_2^{(m-1, 0)}) \\
y_3^{(m)} = & \frac{1}{2} (Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) + \frac{1}{2} \xi_3 (Q_+^{(m-1)} - Q_-^{(m-1)}) + \\
& + \frac{1}{2} (1 - \xi_3^2) [M_3 y_2^{(m-1, 1)} + \Omega_0^2 (A_{21} y_2^{(m-1, 0)} + A_{23}^* d_3^{(m-1, 0)})] \\
\tau_3^{(m)} = & \frac{1}{2} (q_+^{(m)} + q_-^{(m)}) + \frac{1}{2} \xi_3 (q_+^{(m)} - q_-^{(m)}) + \\
& + \frac{1}{2} (1 - \xi_3^2) \left[ \frac{1}{2} M_2 (Q_+^{(m-1)} + Q_-^{(m-1)}) + \right. \\
& \left. + \Omega_0^2 (A_{11} y_2^{(m, 0)} + m_{33} d_3^{(m, 0)}) + \Omega_1^2 (A_{11} y_2^{(m-1, 0)} + m_{33} d_3^{(m-1, 0)}) \right] - \\
& -\frac{1}{6} (\xi_3 - \xi_3^3) \Omega_0^2 [(\Omega_0^{-2} M_2 M_1 - A_{11}) y_2^{(m-1, 1)} + \\
& + (m_{33} M_3 + M_2 A_{21}) y_2^{(m-1, 0)} + M_2^* A_{23}^* d_3^{(m-1, 0)}]
\end{aligned}$$

Разрешающее уравнение основного процесса будет таким:

$$\begin{aligned}
[M_1 A_{31}^{-1} M_1^* - (n_{33} + A_{32} A_{31}^{-1} A_{32}^*)^{-1} M_1 A_{31}^{-1} A_{32}^* A_{32} A_{31}^{-1} M_1^* + \Omega_0^2] y_1^{(m, 0)} = \\
= -\frac{1}{2} [Q_+^{(m-1)} - Q_-^{(m-1)} + 2\Omega_1^2 y_1^{(m-1, 0)} + \\
+ (n_{33} + A_{32} A_{31}^{-1} A_{32}^*)^{-1} M_1 A_{31}^{-1} A_{32}^* (\psi_+^{(m-1)} - \psi_-^{(m-1)})]
\end{aligned} \quad (2.9)$$

В соотношениях (2.4), (2.5), (2.8), (2.9) величины с индексом  $m$  равны нулю при  $m < 0$ .

Из разрешающих уравнений основного итерационного процесса (2.5) и (2.9) видно, что среднечастотная динамика определяется установившимися колебаниями, параллельными плоскости  $S$  пластины.

Вспомогательные итерационные процессы [6] для рассматриваемых граничных задач при предположении (2.1) совпадают по виду с аналогич-

ными процессами статики исследуемых пластин и поэтому характеризуют их электроупругое состояние типа пограничного слоя.

3. Рассмотрим свободные колебания тонкой пластины ( $a \times b \times 2h$ ), являющейся  $Y$ -срезом кварца [4]. Предположим, что на плоских гранях пластины выполняются однородные условия (1.4)

$$\tau_{13} = \tau_{23} = d_3 = \tau_{33} = 0, \quad \xi_3 = \pm 1 \quad (3.1)$$

а на боковой поверхности задан один из вариантов условий свободного опирания [6] и такие электрические условия:

$$\begin{aligned} w_2 = w_3 = \tau_{11} = d_1 = 0, \quad \xi_1 = 0, 1 \\ w_1 = w_2 = \tau_{22} = \varphi = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \varepsilon^{-1}, \quad z = \frac{a}{b} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Исходя из соотношений (2.4) и (2.5) для начального приближения будем иметь

$$\begin{aligned} w_1^{(0)} &= \gamma_1 \cos k_1 \xi_1 \sin k_2 \xi_2, & w_2^{(0)} &= \gamma_2 \sin k_1 \xi_1 \cos k_2 \xi_2 \\ \varphi^{(0)} &= \gamma_3 \cos k_1 \xi_1 \sin k_2 \xi_2, & k_1 &= m\pi, \quad k_2 = n\pi \\ w_3^{(0)} &= -\xi_3 [(a_{11}l_{12} + a_{12}l_{21} + b_{11}m_{12})k_1\gamma_1 + (a_{12}l_{12} + a_{22}l_{21} + b_{12}m_{12})k_2\gamma_2 + \\ &\quad + (b_{11}l_{12} + b_{12}l_{21} - c_{11}m_{12})k_1\gamma_3] \sin k_1 \xi_1 \sin k_2 \xi_2 \\ \tau_{11}^{(0)} &= -(a_{11}k_1\gamma_1 + a_{12}k_2\gamma_2 + b_{11}k_1\gamma_3) \sin k_1 \xi_1 \sin k_2 \xi_2 \\ \tau_{22}^{(0)} &= -(a_{12}k_1\gamma_1 + a_{22}k_2\gamma_2 + b_{12}k_1\gamma_3) \sin k_1 \xi_1 \sin k_2 \xi_2 \\ \tau_{12}^{(0)} &= a_{66}(k_2\gamma_1 + k_1\gamma_2) \cos k_1 \xi_1 \cos k_2 \xi_2 \\ d_1^{(0)} &= -(b_{11}k_1\gamma_1 + b_{12}k_2\gamma_2 - c_{11}k_1\gamma_3) \sin k_1 \xi_1 \sin k_2 \xi_2 \\ d_2^{(0)} &= c_{22}k_2\gamma_2 \cos k_1 \xi_1 \cos k_2 \xi_2, & \tau_{13}^{(0)} = \tau_{23}^{(0)} = d_3^{(0)} &= 0 \\ \tau_{33}^{(0)} &= -\frac{1}{2}(1 - \xi_3^2) \Omega_0^2 [(a_{11}l_{12} + a_{12}l_{21} + b_{11}m_{12})k_1\gamma_1 + (a_{12}l_{12} + a_{22}l_{21} + \\ &\quad + b_{12}m_{12})k_2\gamma_2 + (b_{11}l_{12} + b_{12}l_{21} - c_{11}m_{12})k_1\gamma_3] \sin k_1 \xi_1 \sin k_2 \xi_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \Omega_0^2 - a_{66}k_1^2 - (a_{22} + b_{12}^2\Delta_1^{-1}k_1^2)k_2^2 \\ \gamma_2 &= (a_{12} + a_{66} + b_{11}b_{12}\Delta_1^{-1}k_1^2)k_1k_2 \\ \gamma_3 &= (b_{11}k_1^2\gamma_1 + b_{12}k_2^2\gamma_2)\Delta_1^{-1}, \quad \Delta_1 = c_{11}k_1^2 + c_{22}k_2^2 \\ a_{11} &= l_{22}n_{11}\Delta_2^{-1}, \quad a_{22} = (l_{11}n_{11} + m_{11}^2)\Delta_2^{-1} \\ a_{12} &= -l_{12}n_{11}\Delta_2^{-1}, \quad a_{66} = l_{66}^{-1} \\ b_{11} &= l_{22}m_{11}\Delta_2^{-1}, \quad b_{12} = -l_{12}m_{11}\Delta_2^{-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$c_{11} = (l_{11}l_{22} - l_{12}^2) \Delta_2^{-1}, \quad c_{22} = n_{22}^{-1}$$

$$\Delta_2 = (l_{11}l_{22} - l_{12}^2) n_{11} + l_{22}m_{11}^2, \quad t_0 = 10^{12} \text{ н/м}^2, \quad v_0 = 10^{11} \text{ б}$$

Дисперсионное уравнение для исследуемой пластины имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega_0^4 - [a_{11}k_1^2 + a_{22}k_2^2 + a_{66}(k_1^2 + k_2^2) + (b_{11}^2k_1^2 + b_{12}^2k_2^2) \Delta_1^{-1}k_1^2] \Omega_0^2 + \\ + [(a_{11} + b_{11}^2\Delta_1^{-1}k_1^2)k_1^2 + a_{66}k_2^2][a_{66}k_1^2 + (a_{22} + b_{12}^2\Delta_1^{-1}k_1^2)k_2^2] - \\ - (a_{12} + a_{66} + b_{11}b_{12}\Delta_1^{-1}k_1^2)^2 k_1^2k_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

С учетом и без учета связанности упругого и электрического полей оно запишется соответственно так:

$$\begin{aligned} \Omega_0^4 - (0.1266 m^2 + 0.1520 n^2 \varepsilon^2) \pi^2 \Omega_0^2 + \\ + [(0.0767 m^2 + 0.0499 n^2 \varepsilon^2)(0.0499 m^2 + 0.1021 n^2 \varepsilon^2) - \\ - 0.0036 m^2 n^2 \varepsilon^2] \pi^4 = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \Omega_0^4 - (0.1299 m^2 + 0.1553 n^2 \varepsilon^2) \pi^2 \Omega_0^2 + \\ + [(0.0800 m^2 + 0.0499 n^2 \varepsilon^2)(0.0499 m^2 + 0.1054 n^2 \varepsilon^2) - \\ - 0.0036 m^2 n^2 \varepsilon^2] \pi^4 = 0 \end{aligned}$$

Из соотношений (3.6) следует, что наличие связанности вышеназванных полей ведет к уменьшению (до 2% для различных значений  $\varepsilon$ ) величин собственных частот свободных колебаний рассматриваемой пластины.

Автор считает приятным долгом выразить благодарность члену-корреспонденту АН УССР А. С. Космодамианскому за неоднократные полезные обсуждения результатов исследований, изложенных в предлагаемой работе.

Институт математики  
и механики АН УССР

Поступила 3 V 1979

Վ. Ն. ԼՅԻՆԻՆ

ՊՅՅԵՂՈՒՐԻՄՏԱՎԱՅԻՆ ՍԱԼԵՐԻ ԳԻՆԱՄԻԿԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Հաստատուն հաստոյթյամբ բարակ պլեղոկրիստալային սալերի կայունացված տատանումների համար կատարվել է ախմպոտոտական վերլուծութիւն:

Ուսումնասիրվել է նյութական անիզոտրոպիայի ընդհանուր դեպքը:

Հաստատվել է, որ միջին հաճախականության դինամիկան որոշվում է ալի միջին հարթութայնք զուգահեռ կայունացված տատանումներով (սիմետրիկ տատանումներով):

Որպես օրինակ ուսումնասիրվել են բարակ ուղղանկյունաձև սալերի սիմետրիկ ազատ տատանումները:

# DYNAMICS OF PIEZOCRYSTAL PLATES

V. N. LOZKIN

## Summary

An asymptotic analysis of stabilized oscillations of a thin piezocrystal plate for moderate frequencies is presented.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М., «Наука», 1967.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., «Наука», 1977.
3. Бердичевский В. А. Динамические уравнения анизотропных пластин. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 1.
4. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. Физическая акустика, т. 1, А. М., «Мир», 1966.
5. Всковищева И. А. Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. Прикл. механ., 1975, т. 11, в. 2.
6. Гольденвейзер А. А. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, в. 4.
7. Жиров В. Е. Электроупругое равновесие пьезокерамической плиты. ПММ, 1977, т. 41, в. 6.
8. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями и полостями. Киев—Донецк, «Вища школа», 1976.
9. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Динамическая задача для пьезоэлектрического слоя. Докл. АН УССР, серия «А», 1975, № 4.
10. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Квазистатическая задача термоупругости для анизотропного слоя с учетом пьезо- и пироэлектрических эффектов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 3.
11. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. Прикл. механ., 1975, т. 11, в. 5.
12. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. Прикл. механ., 1977, т. 13, в. 10.
13. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Асимптотический анализ электроупругого равновесия тонкого пьезоэлектрического слоя. Прикл. механ., 1978, т. 14, в. 5.
14. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Электроупругое равновесие тонкого анизотропного слоя с учетом пьезоэлектрических эффектов. ПММ, 1978, т. 42, в. 4.
15. Кудрявцев Б. А. Механика пьезоэлектрических материалов. Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела, т. 11, М., ВИНТИ, 1978.
16. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.—Л., Гостехтеориздат, 1957.
17. Мадорский В. В., Устинов Ю. А. Симметрические колебания пьезоэлектрических пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 45.
18. Мадорский В. В., Устинов Ю. А. Построение системы однородных решений и анализ дисперсионного уравнения антисимметричных колебаний пьезоэлектрической плиты. Журнал прикладной механики и теоретической физики, 1976, № 6.
19. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.
20. Седов Л. И. Механика сплошных сред, т. 2. М., «Наука», 1974.
21. Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел. Тепловые напряжения в элементах конструкций, Киев, «Наукова думка», 1975, в. 15.
22. Шойхет Б. А. Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры. Прикладная математика и механика, 1973, т. 37, в. 5.