ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIII, № 2, 1980 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУПРУГИХ КРУГЛЫХ ПЛИТ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЙ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Устойчивости пластинок за пределами упругости материала в различных постановках посвящено много исследований ([1]—[11] и др.). В настоящей статье в рамках теории малых упруго-пластических деформаций произвольно упрочняющегося материала [1] получается система дифференциальных уравнений устойчивости круглых плит с учетом влияний деформаций поперечных сдвигов [8]. В качестве приложения решается задача устойчивости сжатых в радиальном направлении шарнирно опертых и защемленных по контуру круглых плит при осесимметричной форме потери устойчивости. Подробно рассматривается случай идеальной пластичности.

Аналогичная задача в рамках теории течения впервые рассмотрена в работе [7].

1. Рассмотрим пластинку толщины h, отнесенную к системе цилиндрических координат r, θ, z. В качестве механических соотношений примем уравнения деформационной теории пластичности несжимаемого материала [1]

$$\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\theta = \frac{\sigma_i}{e_i} e_r, \qquad \sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_r = \frac{\sigma_i}{e_i} e_\theta, \qquad \tau_{r\theta} = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{r\theta} \tag{1.1}$$

где σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ и e_r, e_θ, $e_{r\theta}$ — компоненты напряжения и деформаций,

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{r\theta}^2}$$
$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_r^2 + e_r e_\theta + e_\theta^2 + \frac{1}{4}e_{r\theta}^2} \tag{1.2}$$

— интенсивности касательных напряжений и деформаций сдвига.

Пусть в пластинке, которая деформирована за пределами упругости, реализовано безмоментное напряженное состояние

$$\sigma_r, \quad \sigma_\theta, \quad \tau_{r\theta} \tag{1.3}$$

При выпучивании напряжения в пластинке получают бесконечно малые приращения $\delta\sigma_r$, $\delta\sigma_\theta$, $\delta\tau_{r\theta}$, τ_{rz}, $\tau_{r\theta}$. Принимается гипотеза непрерывного нагружения ([11], [12]), согласно которой искривление пластинки возможно в условиях возрастания нагрузки, обеспечивающих нагружение во всех ее точках. Известно [5], что критические значения параметров, полученные по этой постановке, не будут отличаться от результатов, вытекающих из критерия равноактивной бифуркации, при котором неустойчивость за пределами упругости понимается как неустойчивость процесса деформирования. С помощью (1.1) для вариаций $\delta\sigma_r$, $\delta\sigma_\theta$ и $\delta\tau_{r\theta}$ получим

$$\begin{aligned} \delta\sigma_r &= a_{11}\delta e_r + a_{12}\delta e_\theta + a_{13}\delta e_{r\theta} \\ \delta\sigma_\theta &= a_{22}\delta e_\theta + a_{12}\delta e_r + a_{23}\delta e_{r\theta} \\ \delta\tau_{r\theta} &= a_{33}\delta e_{r\theta} + a_{13}\delta e_r + a_{23}\delta e_\theta \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{4}{9e_i}\left[3\sigma_i + (2e_r + e_\theta)^2\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right] \\ a_{22} &= \frac{4}{9e_i}\left[3\sigma_i + (2e_\theta + e_r)^2\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right] \\ a_{33} &= \frac{1}{9e_i}\left[3\sigma_i + e_{r\theta}^2\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right] \\ a_{12} &= \frac{2}{9e_i}\left[3\sigma_i + 2(2e_r + e_\theta)(2e_\theta + e_r)\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right] \\ a_{13} &= \frac{1}{9e_i}e_{r\theta}(2e_r + e_\theta)\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right) \\ a_{23} &= \frac{2}{9e_i}e_{r\theta}(2e_\theta + e_r)\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

В условиях отсутствия поверхностных нагрузок для тангенциальных напряжений по уточненной теории [8] имеем

$$\tau_{rz} = f(z)\varphi(r, \theta), \qquad \tau_{\theta z} = f(z)\psi(r, \theta) \tag{1.6}$$

где $f(z)$ — функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений по толщине пластинки, $\varphi(r, \theta)$ и $\psi(r, \theta)$ — искомые функции.

Здесь уточненная теория, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов, применяется со всеми известными условностями, как это делается обычно, например, в задачах изгиба пластинок.

Связь между касательными напряжениями (1.6) и соответствующими деформациями поперечных сдвигов пластинки имеет вид [1]

$$\tau_{rz} = \frac{\sigma_i}{3e_i}e_{rz}, \qquad \tau_{\theta z} = \frac{\sigma_i}{3e_i}e_{\theta z} \tag{1.7}$$

Пользуясь геометрическими соотношениями

$$e_{rz} = \frac{\partial\delta u_r}{\partial z} + \frac{\partial\delta u_z}{\partial r}, \qquad e_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\delta u_z}{\partial\theta} + \frac{\partial\delta u_\theta}{\partial z} \tag{1.8}$$

где u_r, u_θ, u_z — перемещения по направлению координатных линий r, θ, z соответственно, с учетом (1.6) и (1.7) получим

$$\frac{\partial \delta u_r}{\partial z} = -\frac{\partial \delta u_z}{\partial r} + \frac{3e_i}{\sigma_i} f(z)\,\varphi(r, \theta)$$
$$\frac{\partial \delta u_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \delta u_z}{\partial \theta} + \frac{3e_i}{\sigma_i} f(z)\,\psi(r, \theta) \tag{1.9}$$

Пренебрегая изменением нормальных перемещений по толщине и деформированием срединной плоскости ($u = v = 0$), из (1.9) путем интегрирования по z находим

$$\delta u_r = -z\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{3e_i}{\sigma_i}\overline{J}_0(z)\,\varphi(r, \theta)$$
$$\delta u_\theta = -z\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{3e_i}{\sigma_i}\overline{J}_0(z)\,\psi(r, \theta) \tag{1.10}$$

Здесь

$$\overline{J}_0(z) = \int_0^z f(z)\,dz \tag{1.11}$$

w — прогиб пластинки.

Используя геометрические соотношения, с учетом (1.10) для вариаций деформаций получим

$$\delta e_r = -z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 3\overline{J}_0(z)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{e_i}{\sigma_i}\varphi(r, \theta)\right]$$

$$\delta e_\theta = -\frac{z}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \frac{3}{r}\overline{J}_0(z)\left[\frac{e_i}{\sigma_i}\varphi(r, \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i}{\sigma_i}\psi(r, \theta)\right)\right] \tag{1.12}$$

$$\delta e_{r\theta} = -z\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right] +$$
$$+ 3\overline{J}_0(z)\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{e_i}{r\sigma_i}\psi(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i}{\sigma_i}\varphi\right)\right]\right\}$$

Внеся (1.12) в (1.4) и присоединяя к ним (1.6), для приращений напряжений выпученной пластинки находим

$$\delta\sigma_r = -z\left\{a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + a_{12}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + \right.$$
$$\left. + a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right]\right\} +$$

$$
+3J_0(z)\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i}{\sigma_i}\varphi\right)+\frac{a_{12}}{r}\left[\frac{e_i}{\sigma_i}\varphi(r,\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i}{\sigma_i}\psi\right)\right]+\right.
$$

$$
\left.+a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i}{r\sigma_i}\psi\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}
$$

$$
\delta\sigma_\theta=-z\left\{\frac{a_{22}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\right.
$$

$$
\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right]\right\}+
$$

$$
+3J_0(z)\left\{\frac{a_{22}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+a_{12}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\right.
$$

$$
\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\theta_i}\right)\right]\right\}
$$

$$
\delta\tau_{r\theta}=-z\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right]+\right.
$$

$$
\left.+a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{23}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right\}+
$$

$$
+3J_0(z)\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.
$$

$$
\left.+a_{13}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}
$$

$$
\tau_{rz}=f(z)\varphi(r,\theta),\quad \tau_{\theta z}=f(z)\psi(r,\theta) \tag{1.13}
$$

Поступая как обычно, для приращений моментов и поперечных сил получим

$$
\delta M_r=-\frac{h^3}{12}\left\{a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{12}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+\right.
$$

$$
\left.+a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right]\right\}+
$$

$$
+3J_1\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{12}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.
$$

$$
\left.+a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}
$$

$$
\delta M_\theta=-\frac{h^3}{12}\left\{\frac{a_{22}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\right.
$$

$$
\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right]\right\}+
$$

$$+3\bar{J}_1\left\{\frac{a_{22}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+a_{12}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$\delta H=-\frac{h^3}{12}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right]+\right.$$

$$\left.+a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{23}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right\}+$$

$$+3\bar{J}_1\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]+a_{13}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$N_r=\bar{J}_2\varphi(r,\theta),\qquad N_\theta=\bar{J}_2\psi(r,\theta) \tag{1.14}$$

где

$$\bar{J}_1=\int\limits_{-h/2}^{h/2}z\bar{J}_0(z)\,dz,\qquad \bar{J}_2=\int\limits_{-h/2}^{h/2}f(z)\,dz \tag{1.15}$$

Уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки после выпучивания имеют вид [8]

$$\frac{\partial\delta M_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\delta H}{\partial\theta}+\frac{\delta M_r-\delta M_\theta}{r}=N_r$$

$$\frac{\partial\delta H}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\delta M_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\delta H}{r}=N_\theta \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}+\frac{N_r}{r}+T_r^0\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+T_\theta^0\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+$$

$$+2S^0\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)=0$$

где T_r^0, T_θ^0, S^0 — внутренние тангенциальные силы начального безмоментного состояния

$$T_r^0=h\sigma_r,\qquad T_\theta^0=h\sigma_\theta,\qquad S^0=h\tau_{r\theta} \tag{1.17}$$

Подставляя (1.14) в (1.16), получим следующую систему относительно $w(r,\theta)$, $\varphi(r,\theta)$ и $\psi(r,\theta)$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{12}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)+a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right]+a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{a_{23}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{r}\left\{(a_{11}-a_{12})\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+(a_{12}-a_{22})\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)+\right.$$

$$\left.+(a_{13}-a_{23})\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{36\overline{J}_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial r}\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{12}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+a_{13}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}-$$

$$+\frac{36\overline{J}_1}{h^3}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+a_{13}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{36\overline{J}_1}{h^3}\frac{1}{r}\left\{(a_{11}-a_{12})\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+(a_{12}-a_{22})\frac{1}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+(a_{13}-a_{23})\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}+\frac{12\overline{J}_2}{h^3}\varphi=0 \qquad (1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right]+a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{23}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\frac{a_{22}}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)+a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\right.$$

$$\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right]\right\}+$$

$$+\frac{2}{r}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \theta}\right]+a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right]\right\}-$$

$$-\frac{36\overline{J}_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial r}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+a_{13}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{36\overline{J}_1}{h^3}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{a_{22}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]+a_{12}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$\left.+a_{23}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{72\overline{J}_1}{h^3}\frac{1}{r}\left\{a_{33}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\psi}{r\sigma_i}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+a_{13}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}\right)+\frac{a_{23}}{r}\left[\frac{e_i\varphi}{\sigma_i}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_i\psi}{\sigma_i}\right)\right]\right\}+\frac{12\overline{J}_2}{h^3}\psi(r,\theta)=0$$

$$\overline{J}_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\varphi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+T_r^0\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+T_\theta^0\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+$$

$$+2S^0\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=0$$

Это — система устойчивости пластинки за пределами упругости материала с учетом влияний деформаций поперечных сдвигов.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости круглой пластинки, сжатой в своей плоскости радиальным давлением p, при осесимметричных формах потери устойчивости. Пусть в пластинке реализовано однородное деформированное состояние с интенсивностью деформаций l_i. Для простоты ограничимся случаем линейного упрочнения [1]

$$\sigma_i=3G[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s],\qquad \lambda=\begin{cases}0, \text{ если } e_i\leqslant e_s\\ 1-\dfrac{1}{3G}\dfrac{d\sigma_i}{de_i}=\text{const}, \text{ если } e_i\geqslant e_s\end{cases}\tag{2.1}$$

Здесь G — модуль сдвига, e_s — предел упругих деформаций материала.

В отличие от обычного, состояние пластинки до потери устойчивости будем представлять ее деформированным состоянием, а не напряженным. Это означает, что вместо критических значений напряжений (нагрузок) будем отыскивать критические значения интенсивности деформаций начального плоского состояния пластинки. Как будет показано в пункте 3, этот вопрос, который при упругом и упрочняющемся материалах не важен, при идеальной пластичности приобретает принципиально важное значение.

Полагая

$$T_r^0=T_\theta^0=-ph=-3Gh[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s],\ S^0=0\tag{2.2}$$

и используя (1.1), (1.2), (2.1), находим

$$a_{11}=a_{22}=\frac{G}{e_i}[4(1-\lambda)e_i+\lambda e_s],\qquad a_{33}=\frac{G}{e_i}[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s]$$

$$a_{12}=\frac{G}{e_i}[2(1-\lambda)e_i-\lambda e_s],\qquad a_{13}=a_{23}=0\tag{2.3}$$

Имея в виду, что коэффициенты a_{ij} не зависят от координат, а в силу осесимметричности выпучивания пластинки $\psi \equiv 0$, из (1.18) с учетом (2.3) получим

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)-a\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr}+\frac{\varphi}{r}\right)+b\varphi=0$$

$$\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}-c\left(\frac{d\varphi}{dr}+\frac{\varphi}{r}\right)=0 \tag{2.4}$$

где

$$a=\frac{12\overline{J}_1e_i}{Gh^3[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s]},\qquad b=\frac{12\overline{J}_2e_i}{Gh^3[4(1-\lambda)e_i+\lambda e_s]}$$

$$c=\frac{\overline{J}_2}{3Gh[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s]} \tag{2.5}$$

С помощью простых преобразований функцию φ выразим через w

$$\varphi=-\gamma\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$\gamma=\frac{c-a}{bc}=\frac{Gh^3}{12\overline{J}_2e_i}[4(1-\lambda)e_i+\lambda e_s]\left(1-36\frac{\overline{J}_1}{\overline{J}_2}\frac{e_i}{h^2}\right) \tag{2.6}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (2.4), приходим к дифференциальному уравнению Бесселя относительно прогиба

$$\nabla^4w+\alpha^2\nabla^2w=0 \tag{2.7}$$

где

$$\nabla^2=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}$$

$$\alpha^2=\frac{1}{c\gamma}=\frac{36e_i}{h^2}\frac{(1-\lambda)e_i+\lambda e_s}{4(1-\lambda)e_i+\lambda e_s}\frac{1}{1-36\dfrac{\overline{J}_1}{\overline{J}_2}\dfrac{e_i}{h^2}} \tag{2.8}$$

Ограниченное решение уравнения (2.7), которое на контуре пластинки $r=R$ превращается в нуль, имеет вид [4]

$$w(r)=C[J_0(\alpha r)-J_0(\alpha R)] \tag{2.9}$$

Здесь C — постоянная интегрирования, J_0 — бесселева функция первого рода с нулевым индексом. Из (2.6) с учетом (2.9) для функции φ находим

$$\varphi=-C\gamma\alpha^3J_1(\alpha r) \tag{2.10}$$

где J_1 — бесселева функция первого рода с индексом 1.

Вычислим изгибающий момент и угол наклона в радиальном направлении пластинки.

Первая формула (1.14) в нашем случае принимает вид

$$\delta M_r = -\frac{h^3}{12}\left(a_{11}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{a_{12}}{r}\frac{dw}{dr}\right) +$$

$$+\frac{\overline{J}_1 e_i}{G[(1-\lambda)e_i + \lambda e_s]}\left(a_{11}\frac{d\varphi}{dr} + a_{12}\frac{\varphi}{r}\right) \qquad (2.11)$$

Имея в виду (2.3), (2.9) и (2.10), получим

$$\delta M_r = \frac{C\alpha^2 h^3}{12}a_{11}\left(1 - 36\frac{\overline{J}_1}{J_2}\frac{e_i}{h^2}\right)\left[J_0(\alpha r) - \frac{2[(1-\lambda)e_i + \lambda e_s]}{4(1-\lambda)e_i + \lambda e_s}\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r}\right] \qquad (2.12)$$

Для угла наклона из (2.9) находим

$$\frac{dw}{dr} = -C\alpha J_1(\alpha r) \qquad (2.13)$$

В случае защемленной по контуру пластинки граничное условие имеет вид

$$\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=R} = 0 \qquad (2.14)$$

В случае же шарнирно опертой пластинки —

$$\delta M_r|_{r=R} = 0 \qquad (2.15)$$

Следовательно, критические значения интенсивности деформаций начального состояния пластинки e_i определяются корнями уравнений

$$J_1(\alpha R) = 0 \quad \text{(случай защемления)} \qquad (2.16)$$

$$J_0(\alpha R) - \beta\frac{J_1(\alpha R)}{\alpha R} = 0 \quad \text{(случай шарнирного опирания)} \qquad (2.17)$$

где

$$\beta = \frac{2[(1-\lambda)e_i + \lambda e_s]}{4(1-\lambda)e_i + \lambda e_s}$$

$$\alpha R = \frac{6R}{h}\sqrt{\frac{e_i[(1-\lambda)e_i + \lambda e_s]}{[4(1-\lambda)e_i + \lambda e_s]\left(1 - 36\frac{\overline{J}_1}{J_2}\frac{e_i}{h^2}\right)}} \qquad (2.18)$$

Соответствующие критические значения сжимающего давления p однозначным образом определяются по формуле

$$p = 3G[(1-\lambda)e_i + \lambda e_s] \qquad (2.19)$$

При $\lambda = 0$, $\overline{J}_1/\overline{J}_2 = 0$ (2.16) ÷ (2.18) совпадают с соответствующими уравнениями и выражениями классической теории упругой пластинки при несжимаемости материала [4].

3. Рассмотрим случай идеальной пластичности ($\lambda = 1$). Допустим, что начальное состояние пластинки предельное ($\sigma_i = \sigma_s = \text{const}$), то есть в любой ее точке достигнут предел упругости материала. Исследуем вопрос возможности существования искривленных форм предельного равновесия такой пластинки. Полагая $\lambda = 1$, из (2.18) получим

$$\beta = 2, \qquad \alpha R = \frac{6R}{h} \sqrt{\frac{e_i}{1 - 36 \dfrac{\overline{J}_1}{\overline{J}_2} \dfrac{e_i}{h^2}}} \tag{3.1}$$

Имея в виду условия существования нетривиальных форм равновесия (2.16), (2.17), с учетом (3.1) заключаем, что для идеально пластической пластинки существуют такие определенные степени развития пластического течения начального состояния, то есть такие определенные значения интенсивности деформаций $e_i^{(n)}$, при которых возможно предельное равновесие искривленных форм пластинки.

Эти значения $e^{(n)}$, которые условно назовем, критическими, получаются корнями уравнений (2.16), (2.17).

Если

$$e_s < e_i \neq e_i^{(n)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{3.2}$$

где $e_i^{(n)}$ — критическое значение, соответствующее n-ому корню уравнений (2.16), (2.17), то возможна только плоская форма предельного равновесия пластинки ($C = 0$).

При

$$e_i = e_i^{(n)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{3.3}$$

кроме плоской возможно существование еще n-ой формы предельного равновесия пластинки

$$w^{(n)}(r) = C\left[J_0(\alpha^{(n)} r) - J_0(\alpha^{(n)} R)\right], \quad \alpha^{(n)} = \frac{6}{h} \sqrt{\frac{e_i^{(n)}}{1 - 36 \dfrac{\overline{J}_1}{\overline{J}_2} \dfrac{e_i^{(n)}}{h^2}}} \tag{3.4}$$

Момент появления возможности существования искривленной формы равновесия, вообще говоря, не совпадает с моментом наступления предельного равновесия пластинки. Такое совпадение имеет место лишь в одном частном случае, когда

$$e_i^{(1)} = e_s \tag{3.5}$$

Если граничные условия допускают свободное течение материала при плоской форме равновесия пластинки, то со временем обязательно поочередно наступят моменты достижения критических состояний $e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, e_i^{(3)} \ldots$ и т. д.

Это явление имеет простое физическое объяснение. Из (1.5) с учетом (2.1) при идеальной пластичности ($\lambda = 1$) получаем

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = G\frac{e_s}{e_i}, \quad a_{12} = -G\frac{e_s}{e_i}, \quad a_{13} = a_{23} = 0 \qquad (3.6)$$

откуда видно, что с ростом пластического течения начального состояния (с возрастанием e_i) изменяются механические свойства материала, что заключается в увеличении его деформативности. В связи с этим, если при $e_i < e_i^{(n)}$ невозможно равновесие пластинки по n-ой форме искривления, то это становится возможным при $e_i = e_i^{(n)}$, когда материал пластинки уже обладает соответствующими деформативными свойствами.

Важно отметить, что возможность существования искривленных форм предельного состояния нельзя отождествлять с обычным понятием потери устойчивости пластинки. Дело в том, что при переходе от плоской формы к любой искривленной форме, который происходит на площадке текучести материала, вариация потенциальной энергии упругого деформирования всегда равна нулю. Поэтому, в смысле минимальности потенциальной энергии системы, плоская форма пластинки никакого преимущества не имеет по сравнению с искривленной формой. По этой причине не может существовать тенденция возвращения искривленной пластинки к ее исходной плоской форме равновесия. В силу этого, если при условии (3.3) искривлять пластинку по форме (3.4) и оставить самой себе, то реализуется безразличное предельное равновесие такой искривленной пластинки. Если же искривлять пластинку при условии (3.2) по любой форме и оставить, то состояние равновесия не реализуется. Однако это не означает, что искривленная пластинка возвратится к ее исходной плоской форме. Движение пластинки будет способствовать удалению от плоской формы. Пластинка разрушится по заданной схеме. В окончательном счете предельное равновесие пластинки всегда не устойчиво. Любопытно отметить, что если в качестве характеризующего параметра начального состояния принимать напряжение, то в случае идеальной пластичности это приводит к неизбежному исключению из поля рассмотрения или всех возможных нетривиальных форм предельного равновесия (случай (3.2)), или всех, кроме первой (случай (3.5)). Причина этого обстоятельства заключается в том, что между напряжениями и деформациями идеально-пластического тела существует невзаимнооднозначная зависимость: единственному полю напряжений соответствует бесконечное множество полей деформаций. Во избежание этого при идеальной пластичности необходимо начальное состояние характеризовать параметрами деформаций, а не напряжений, что и сделано в настоящей статье. Разумеется, для упругого и упрочняющегося материалов не имеет значения, из какого состояния исходить, из напряженного состояния или из деформированного.

Таблица 1

R/h		$\lambda=0$						$\lambda=0.2$						$\lambda=0.4$					
		$10^3\ e_i$			$10^3\ p/3G$			$10^3\ e_i$			$10^3\ p/3G$			$10^3\ e_i$			$10^3\ p/3G$		
		I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
2.5	кл.	261.01	875.00	1840.0	261.01	875.00	1840.0	260.83	874.81	1839.8	208.86	700.04	1472.0	260.51	874.49	1839.5	156.71	525.10	1104.1
	ут.	134.57	210.84	241.34	134.57	210.84	241.34	134.47	210.80	241.32	107.78	168.84	193.26	134.31	210.72	241.28	80.99	126.83	145.17
5	кл.	65.25	218.75	460.00	65.25	218.75	460.00	65.07	218.56	459.81	52.25	175.05	368.05	64.75	218.25	459.50	39.25	131.35	276.10
	ут.	52.84	122.38	173.19	52.84	122.38	173.19	52.69	122.27	173.12	42.35	98.02	138.70	52.44	122.10	173.00	31.86	73.66	104.20
10	кл.	16.31	54.69	115.00	16.31	54.69	115.00	16.13	54.50	114.81	13.10	43.80	92.05	15.82	54.19	114.50	9.89	32.91	69.10
	ут.	15.41	45.69	81.33	15.41	45.69	81.33	15.23	45.54	81.20	12.39	36.63	65.16	14.94	45.28	80.98	9.36	27.57	48.99

R/h \ λ		$\lambda=0.6$						$\lambda=0.8$						$\lambda=1$					
2.5	кл.	259.89	873.87	1838.9	104.56	350.15	736.14	258.02	872.00	1836.9	52.40	175.20	368.20	65.25	218.76	460.03	1	1	1
	ут.	133.99	210.57	241.20	54.20	84.83	97.08	133.03	210.12	240.95	27.41	42.82	48.99	52.84	122.38	173.19	1	1	1
5	кл.	64.13	217.63	458.87	26.25	87.65	184.15	62.30	215.76	457.00	13.26	43.95	92.20	16.31	54.69	115.00	1	1	1
	ут.	51.94	121.75	172.77	21.37	49.30	69.71	50.46	120.71	172.07	10.89	24.94	35.21	15.41	45.69	81.33	1	1	1
10	кл.	15.21	53.57	113.88	6.69	22.03	46.15	13.52	51.74	112.03	3.50	11.15	23.21	4.078	13.67	28.75	1	1	1
	ут.	14.37	44.76	80.54	6.35	18.50	32.81	12.78	43.24	79.23	3.36	9.45	16.65	4.019	13.03	26.05	1	1	1

Важно отметить, что если в рамках деформационной теории пластичности, путем представления начального состояния пластинки через ее деформированное состояние, можно устранить этот недостаток, то это невозможно сделать при теории течения. Причина этого обстоятельства заключается в том, что в теории течения невозможно записать механические соотношения, разрешенные относительно компонент полных деформаций.

В заключение заметим, что существование критической деформации при идеальной пластичности впервые было обнаружно в работе [6]. Обсуждение вопроса там проводится на примере длинной полосы с использованием другого подхода, основанного на разрывной зависимости критического напряжения от гибкости.

4. В табл. 1 и 2 приведены некоторые численные результаты решения задачи защемленной пластинки в уточненной и классической постановках для первых трех форм потери устойчивости. Как и следовало ожидать, критические напряжения с возрастанием λ монотонно убывают и при идеальной пластичности ($\lambda = 1$) независимо от форм выпучивания равняются пределу текучести материала (табл. 1). Этот вывод справедлив как при учете, так и при пренебрежении влияний поперечных сдвигов.

Таблица 2

R/h \ λ	$P_{\text{кл.}}^{(1)}/P_{\text{ут.}}^{(1)}$					
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
2.5	1.939	1.938	1.935	1.929	1.912	1
5	1.235	1.234	1.232	1.228	1.218	1
10	1.058	1.057	1.057	1.054	1.042	1

Влияние поперечных сдвигов существенным образом зависит от относительной толщины пластинки. Если при $R/h = 2.5$ уточненные значения критического напряжения для обычных упрочняющихся материалов ($0 < \lambda < 0.95$) почти в два раза меньше, чем классические, то при $R/h = 10$ поправка составляет примерно 6% (табл. 2). Влияние поперечных сдвигов настолько сильно, насколько материал ближе к линейно упругому. С увеличением пластических свойств материала это влияние ослабляется. Для идеально-пластических пластин ($\lambda = 1$) учет влияния деформаций поперечных сдвигов приводит к понижению значений критических деформаций. При этом понижение настолько ощутимо, насколько толще пластинка.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 XI 1979

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՈՉ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԼՈՐ ՍԱԼԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԵՐԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ամփոփում

Կամայական ամրապնդվող նյութի համար փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տեսության շրջանակներում ստացվում է կլոր սալերի կայունության խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմը՝ լայնական սահքերի դեֆորմացիաների ազդեցության հաշվառմամբ։ Որպես կիրառություն լուծվում է շառավղի ուղղությամբ սեղմված կլոր սալերի կայունության առանցքասիմետրիկ խնդիրը եզրագծով հոդակապորեն հենման և կոշտ ամրակցման դեպքերում։ Մանրամասն քննարկվում է իդեալական պլաստիկության դեպքը։ Բերվում են թվային արդյունքներ։

ON STABILITY OF UNELASTIC CIRCULAR PLATES, CONSIDERING TRANSVERSAL DISPLACEMENTS

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

Within the theory of small elastic-plastic deformations of arbitrary hardening material a system of differential equations is obtained for the stability of circular plates, considering transversal displacements. As application the stability problem is solved for circular plates compressed radially, hinge-supported and rigidly fastened over their contour with an axisymmetric form of stability loss. The ideal plasticity case is considered. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., Физматгиз, 1969.
3. *Хорн М.* Устойчивость упруго-пластических конструкций. Механика, 1965, № 1.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1963.
5. *Клюшников В. Д.* Развитие теории устойчивости конструкций за пределом упругости и критерий бифуркации процесса деформирования. Прикл. механика, 1975, т. XI (XXI), в. 6.
6. *Клюшников В. Д.* О некоторых особенностях явления неустойчивости за пределом упругости. В кн.: «Успехи механики деформируемых сред». М., Наука, 1975.
7. *Амбарцумян С. А.* Об устойчивости неупругих пластинок с учетом деформаций поперечных сдвигов. ПММ, 1963, т. XXVII, в. 4.
8. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М., Физматгиз, 1967.
9. *Киракосян Р. М.* Об устойчивости пластинок за пределами упругости с учетом поперечных сдвигов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 4.
10. *Киракосян Р. М.* Об устойчивости неупругой прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам, с учетом поперечных сдвигов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. XXX, № 2.
11. *Shanley F. R.* Inelastic column theory. Journ. of the Aeronautical Sciences, 1947, v. XIV, No. 5.
12. *Работнов Ю. Н., Шестериков С. А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, в. 3.