ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIII, № 1, 1980 Механика

А. А. СПЕКТОР

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ И СЦЕПЛЕНИЕМ ОКОЛО ЛИНИЙ РАЗДЕЛА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

В работе рассматривается поведение решений пространственных контактных задач статики и стационарного качения с трением при подходе к линиям раздела граничных условий. Принимается весьма общий закон трения, при котором на площадке контакта могут реализоваться области проскальзывания, где направление силы трения совпадает с направлением скорости проскальзывания (относительного касательного смещения), а величина силы трения есть заданная функция давления и величины проскальзывания (относительного касательного смещения) в данной точке, а также области сцепления, где величина силы трения не превышает значения заданной функции давления в данной точке.

Зависимость величины силы трения и коэффициента трения от давления и скорости проскальзывания имеет место на практике. Характер этой зависимости может быть совершенно различным для различных материалов контактирующих тел и условий контакта. Многочисленные экспериментальные кривые, описывающие эту зависимость, приводятся в [1].

В данной работе определяются асимптотики касательных напряжений, скоростей проскальзывания (относительных касательных смещений) в задачах качения (статики) при стремлении рассматриваемой точки к границе площадки контакта и границе раздела областей проскальзывания и сцепления.

При нахождении асимптотик предполагается, что в окрестности линий раздела граничных условий, то есть при малом локальном проскальзывании или давлении, зависимость величины силы трения может быть аппроксимирована степенной функцией величины проскальзывания или давления. Используемый здесь метод позволяет найти асимптотики при степенях зависимости силы трения от величины проскальзывания, больших единицы. Такие степенные зависимости хорошо аппроксимируют, например, экспериментальные кривые в [2], отвечающие граничному трению металлических тел.

Задачи нахождения асимптотик после соответствующего растяжения окрестности рассматриваемой точки сводятся к определению двух голоморфных функций, соответствующих плоскому и антиплоскому полям напряжений и смещений в рассматриваемой окрестности. Коллинеарность в области проскальзывания силы трения вектору проскальзывания (относительного касательного смещения) накладывает нелинейное условие, связывающее между собой граничные значения искомых функций, заданные на действительной оси. В окрестности линии раздела площадки контакта в области сцепления граничные значения искомых функций связаны неравенством, которое вытекает из ограничения на величину силы трения в этой области. Указанные условия не позволяют разбить граничные условия для искомых функций на две независимые группы, относящиеся к каждой из этих функций, как это имеет место в некоторых задачах без трения.

При определении асимптотик выбирается класс, которому принадлежит решение полной (не асимптотической) задачи. В этом классе — ему принадлежат все известные точные решения плоских и пространственных задач с сухим трением — вектор проскальзывания непрерывен при подходе к границе площадки контакта, а вектор касательных напряжений непрерывен при переходе через границу раздела областей проскальзывания и сцепления. Из указанных условий непрерывности вытекают линейные смешанные условия для каждой из искомых функций. Решения этих смешанных задач содержат неопределенные постоянные. Их выбором удается удовлетворить нелинейным условиям коллинеарности и условиям типа неравенства в области контакта.

При решении используется независимость нормальных смещений и давления от касательных напряжений, что справедливо в случае одинаковых упругих постоянных контактирующих тел, либо при контакте абсолютно жесткого тела с несжимаемым, либо при контакте двух несжимаемых тел.

Найденные асимптотики касательных напряжений имеют вид: в области сцепления в окрестности раздела площадки контакта $\tau = O(1) + O(r^{1/2})$, в области проскальзывания в окрестности границы площадки контакта $\tau = O(r^{\alpha/2})$. Показатель α определяется зависимостью величины силы трения от давления в точках площадки контакта. Для скоростей проскальзывания (относительных касательных смещений) получены выражения: в области проскальзывания в окрестности линии раздела площадки контакта $s = O(r^{1/2})$ $(s = O(r^{3/2}))$, в области проскальзывания в окрестности границы площадки контакта $\tau = O(1) + O(r^{\alpha/2}) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ $(s = O(1) + O(r^{1+\alpha/2}))$.

Задачи типа изучаемых в настоящей работе рассматривались в [4, 5]. В [4] решена асимптотическая задача, близкая к одной из изучаемых в настоящей работе задач, где рассматривается асимптотика решения в окрестности раздела площадки контакта для статического случая. В [5] решена задача с граничными условиями, заданными на конечном интервале, которые совпадают с возникающими в настоящей работе при рассмотрении асимптотики в окрестности границы площадки контакта в случае качения при кулоновском законе трения.

Настоящая работа использует метод [4].

Отметим, что в [6] рассматривалась плоская контактная задача качения с учетом зависимости локального коэффициента трения от местной скорости проскальзывания. Эта зависимость принималась линейной; на всем участке контакта, кроме передней точки, задавались условия проскальзывания.

1. Сформулируем условия на площадке контакта двух упругих тел при наличии трения. Предлагаемые в настоящей работе условия трения в контакте представляют собой обобщение условий, сформулированных для задач качения и статики в [7] при постоянном коэффициенте трения, на случай зависимости коэффициента трения от давления и скорости проскальзывания.

Пусть в системе координат XYZ рассматриваемые тела могут быть аппроксимированы полупространствами $Z > 0$ и $Z < 0$. Условия в плоскости $Z = 0$ имеют вид

$$\tau = \rho(p, |s|) \frac{s}{|s|} \quad \text{при} \quad |s| > 0 \text{ на } E \tag{1.1}$$

$$|\tau| \leqslant \rho(p, 0) \quad \text{при} \quad |s| = 0 \text{ на } E \tag{1.2}$$

$$|\tau| = O \text{ вне } E \tag{1.3}$$

Здесь $\tau(\tau_{XZ}, \tau_{YZ})$ — вектор касательного напряжения, p — давление, E — площадка контакта, s — вектор скорости проскальзывания (касательного смещения) верхнего тела относительно нижнего при качении (в статике).

Области проскальзывания и сцепления определяются условиями $|s| > 0$ и $|s| = 0$ соответственно. Условие (1.1) определяет величину силы трения в точках области проскальзывания как функцию величины проскальзывания и давления. Направления сил трения и скорости проскальзывания совпадают. Условие (1.2) определяет ограничение на величину силы трения в области сцепления. Условие (1.3) означает, что вне площадки контакта касательные напряжения отсутствуют. Для s имеют место выражения [7]

$$s = \begin{cases} u^+ - u^- + v & \text{при статическом контакте} \\ V\left(\dfrac{\partial u^-}{\partial X} - \dfrac{\partial u^+}{\partial X}\right) + v & \begin{array}{l}\text{при стационарном качении} \\ \text{в направлении } X\end{array} \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь $u^{\pm}$ — упругие касательные смещения контактирующих тел; V — скорость качения, v — вектор скорости жесткого проскальзывания (смещения) в случае качения (статики), предполагаемый заданным.

2. Найдем асимптотику решения задачи (1.1—1.4) при подходе к точке P, расположенной внутри площадки контакта и лежащей на границе, которая разделяет области проскальзывания и сцепления. Введем систему координат x, y, Z с началом в точке P, направив оси x и y по касательной и нормали к границе раздела. Рассмотрим малую окрестность $y^2 + Z^2 \leqslant \varepsilon_1^2 L^2$, $x^2 < \varepsilon_2^2 L^2$ точки P, принадлежащую полупространству

$Z < 0$. Здесь L — характерный линейный размер площадки контакта; $\varepsilon_1 \ll 1$; $\varepsilon_2 \ll 1$; $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \ll 1$. Отнесем y и Z к $\varepsilon_1 L$, x — к $\varepsilon_2 L$. В дальнейшем для новых переменных сохраним прежние обозначения. В уравнениях Ламе, справедливых в рассматриваемой окрестности и записанных в новых переменных, совершим предельный переход $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \to 0$ [4]. Для полученных предельных уравнений будут справедливы известные комплексные представления [8]. Распространив, следуя [8], функцию $\Phi(z)$ $(z = y + iZ)$, определенную при $Z<0$, на верхнюю полуплоскость, получим следующие выражения для значений на оси y напряжений и смещений точек нижнего тела

$$\sigma_{ZZ} - i\tau_{yZ} = \Phi^- - \Phi^+, \qquad 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \varkappa\Phi^- + \Phi^+ \tag{2.1}$$

$$w = \operatorname{Re} f, \; \tau_{xx} + i\tau_{xZ} = \mu f' \tag{2.2}$$

Ограничимся в дальнейшем случаем одинаковых материалов контактирующих тел. Тогда полную контактную задачу можно расщепить на две, решаемые последовательно [7]. В первой — при $\tau = 0$, $u^+ = u^-$ определяются давление и площадка контакта, во второй — при $\sigma_{ZZ} = 0$, $u^+ = -u^-$ и функции p, строящейся по давлению из первой задачи, находятся τ и s. Нас будет интересовать асимптотика решения последней задачи, для которой имеют место нелинейные условия (1.1—1.4).

Считая, что ось y направлена внутрь области сцепления, запишем условия при $y \geqslant 0$. Введем угол γ между направлениями X и y и воспользуемся равенствами $u = u^- = -u^+$, $w = w^- = -w^+$. Тогда условие $|s| = 0$, имеющее место в области сцепления (при $y \geqslant 0$), может быть с учетом (1.4) записано в виде

$$u = \frac{1}{2}(v_x \cos\gamma + v_y \sin\gamma) = V_1, \; w = \frac{1}{2}(v_x \sin\gamma - v_y \cos\gamma) = V_2 \text{ — в}$$
статике

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2V}(v_x + v_y \operatorname{tg}\gamma) = V_1, \; \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{2V}(v_x \operatorname{tg}\gamma - v_y) = V_2 \text{ — при} \tag{2.3}$$
качении.

Здесь мы считаем, что нормаль y к границе раздела не перпендикулярна направлению качения X.

Будем считать решение полной (не асимптотической) задачи таковым, что вектор τ непрерывен в точках линии раздела площадки контакта и при $y < 0$ (в области проскальзывания) удовлетворяет условию Гёльдера с показателем, большим 1/2. Существование решения из указанного класса в общей пространственной задаче пока не установлено, однако в решениях плоских задач при кулоновском трении статики [9] и качения [10] указанное свойство выполнено.

В [9, 10] касательные напряжения непрерывно дифференцируемы в точках окрестности линии раздела площадки, принадлежащих области проскальзывания.

Обозначим через C_x и C_y предельные значения τ_{xz} и τ_{yz} в точке P. Тогда нелинейные смешанные граничные условия для определения в случае качения голоморфной вне оси y функции $f(z)$ и голоморфной в нижней полуплоскости функции $\Phi(z)$ имеют вид

$$\operatorname{Re} f' = V_2 \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \tag{2.4}$$

$$\operatorname{Jm} f' = -\frac{C_x}{\mu} \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.5}$$

$$\operatorname{Re}(\Phi^- - \Phi^+) = 0 \quad \text{при всех} \quad y \tag{2.6}$$

$$\operatorname{Jm}(\Phi^+ - \Phi^-) = C_y \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.7}$$

$$\operatorname{Re}(\chi\Phi^- + \Phi^+) = 2\mu V_1 \quad \text{при} \quad y > 0 \tag{2.8}$$

$$\operatorname{Jm} f'/\rho = (\operatorname{Re} f' - V_2)/M$$

$$M = \left\{(\operatorname{Re} f' - V_2)^2 + \left[\frac{1}{2\mu}\operatorname{Re}(\chi\Phi^- + \Phi^+) - V_1\right]^2\right\}^{1/2} \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.9}$$

$$\operatorname{Jm}(\Phi^+ - \Phi^-)/\rho = \left[\frac{1}{2\mu}\operatorname{Re}(\chi\Phi^- + \Phi^+) - V_1\right]/M \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.10}$$

$$(\operatorname{Jm} f')^2 + [\operatorname{Jm}(\Phi^+ - \Phi^-)]^2 \leqslant \rho^2 \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \tag{2.11}$$

Условия (2.5) и (2.7) вытекают из задания в области проскальзывания главных членов C_x и C_y напряжений и наличия связей (2.1), (2.2) с напряжениями граничных значений Φ и f. Условия (2.4), (2.8) следуют из задания в области сцепления производных от упругих касательных смещений и их связей (2.1), (2.2) с функциями Φ и f. Условие (2.6) есть следствие равенства $\tau_{zz} = 0$. Условия (2.9) и (2.10) следуют из условия коллинеарности (1.1) при подстановке в него τ и s, выраженных, в силу (1.4), (2.1) и (2.2), через Φ и f. Условие (2.11) есть следствие (1.2) при подстановке в последнее τ через Φ и f.

Решение задачи (2.4)—(2.11) будем строить следующим образом. Сначала из линейных смешанных условий (2.4), (2.5) и (2.6), (2.7), (2.8) методом [8] находятся главные при $z \to 0$ части функций $f'(z)$ и $\Phi(z)$. Далее показывается, что соответствующим выбором постоянных в выражениях для f' и Φ можно удовлетворить нелинейным условиям (2.9), (2.10). Знаки этих постоянных таковы, что удовлетворяется также и неравенство (2.11).

Главная часть при $z \to 0$ общего решения задачи (2.4), (2.5) среди ограниченных при $z = 0$ функций может быть записана в виде

$$f'(z) = V_2 - i\frac{C_x}{\mu} + C\sqrt{-z} \tag{2.12}$$

Здесь C — произвольная действительная постоянная. Главная часть общего решения задачи (2.6) — (2.8) имеет вид

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{2V_1\mu}{\varkappa+1} + \dfrac{C_y}{2} i + C^* i + K\sqrt{-z} & \text{при} \quad Z \geqslant 0 \\ \dfrac{2V_1\mu}{\varkappa+1} - \dfrac{C_y}{2} i + C^* i + K\sqrt{-z} & \text{при} \quad Z < 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Здесь C^* и K — произвольные действительные постоянные. Пользуясь выражениями (2.12), (2.13) и связями (1.4), (2.1), (2.2) напряжений и проскальзываний с Φ и f, получаем

$$\frac{s_x}{2V} = \frac{\partial w}{\partial y} - V_2 = C\sqrt{-y}; \quad \frac{s_y}{2V} = \frac{\partial u}{\partial y} - V_1 = \frac{(\varkappa+1)K}{2\mu}\sqrt{-y} \tag{2.14}$$

при $y < 0$

$$\tau_{xZ} = C_x - \mu C\sqrt{y}; \quad \tau_{yZ} = C_y - 2K\sqrt{y} \quad \text{при} \quad y > 0 \tag{2.15}$$

Ограничимся функциями $\rho(p, |s|)$, разложение которых по p и $|s|$ в окрестности точки P имеет вид

$$\rho(p, |s|) = \rho(p(P), 0) + C_p p^{1/2+\delta} + C_s |s|^{1+\beta}$$

где $\delta > 0$, $\beta > 0$. Тогда для гладкой функции давления, пользуясь выражениями (2.14) для s_x, s_y, будем иметь

$$\rho(P, |s|) = \rho(p(P), 0) + o(|y|^{1/2}) \tag{2.16}$$

Проверяя условия (2.9), (2.10), можно убедиться, что они выполняются, в силу (2.16), с точностью до величин $\sim o(|y|^{1/2})$, если на постоянные в выражениях (2.14), (2.15) наложить условия $K = 2\mu CC_x/(\varkappa+1)C_y$; $\operatorname{sign} C = \operatorname{sign} C_x$. Отметим, что постоянные C_x и C_y как предельные значения τ_{xZ} и τ_{yZ} в точке P области проскальзывания удовлетворяют равенству $C_x^2 + C_y^2 = \rho^2(P(p), 0)$. Так как знаки C и C_x совпадают, то совпадают знаки K и C_y. Тогда

$$\tau_{xZ}^2 + \tau_{yZ}^2 = (C_x - \mu C\sqrt{y})^2 + (C_y - 2K\sqrt{y})^2 \leqslant \rho^2(P(p), 0) =$$
$$= \rho^2(P, |s|) + o(|y|^{1/2})$$

Таким образом, неравенство (2.11) с точностью до $o(|y|^{1/2})$ выполнено. Отметим, что выражения (2.14), (2.15) найдены по первым членам разложения τ_{xZ} и τ_{yZ} при $y < 0$. Однако класс, которому по предположению принадлежит решение, таков, что следующие члены в разложении τ_{xZ}, τ_{yZ} имеют порядок не ниже $o(|y|^{1/2})$. Эти добавки дают приращения в (2.14), (2.15) более высокого порядка, чем выписанные члены.

Выпишем теперь граничные условия для функций f и Φ, отвечающие статической задаче

$$\operatorname{Re} f' = 0 \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \tag{2.17}$$

$$\operatorname{Jm} f' = -\frac{C_x}{\mu} \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.18}$$

$$\operatorname{Re}(\Phi^- - \Phi^+) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \tag{2.19}$$

$$\operatorname{Jm}(\Phi^+ - \Phi^-) = C_y \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.20}$$

$$\operatorname{Re}(\varkappa\Phi^- + \Phi^+) = 0 \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \tag{2.21}$$

$$\operatorname{Jm} f'/\rho = (\operatorname{Re} f - V_1)/N \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.22}$$

$$N = \left\{ (\operatorname{Re} f - V_1)^2 + \left[\frac{1}{2\mu} \int\limits_0^y \operatorname{Re}(\varkappa\Phi^- + \Phi^+)\, d\xi \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\operatorname{Jm} f'/\rho = \left[\frac{1}{2\mu} \int\limits_0^y \operatorname{Re}(\varkappa\Phi^- + \Phi^+)\, d\xi \right] / N \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.23}$$

$$(\operatorname{Jm} f')^2 + [\operatorname{Jm}(\Phi^+ - \Phi^-)]^2 \leqslant \rho^2 \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \tag{2.24}$$

Система (2.17)—(2.24) близка к системе (2.4)—(2.11). Отличие их состоит в том, что в правых частях условий (2.17), (2.21) в области сцепления стоят нули, которые возникают при дифференцировании по y первой пары условий (2.3). Кроме того, в правых частях (2.22) и (2.23) смещения u и w выражены через их производные по y. Пределы интегрирования выбраны таким образом, чтобы в точке P (при $y = 0$), принадлежащей области сцепления, выполнялись равенства $s_x(P) = s_y(P) = 0$.

Решение системы (2.17)—(2.24) строится в той же последовательности, что и (2.4)—(2.11) и имеет вид

$$f(z) = -i \frac{C_x}{\mu} z - \frac{2}{3} C(-z)^{3/2}$$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{C_y}{2} i + C^* i + C \dfrac{C_y}{C_x} (-z)^{1/2} & Z > 0 \\[2ex] -\dfrac{C_y}{2} i + C^* i + C \dfrac{C_y}{C_x} (-z)^{1/2} & Z < 0 \end{cases}$$

$$\tau_{xZ} = C_x - \mu C \sqrt{y}, \qquad \tau_{yZ} = C_y - \frac{4\mu C C_x}{(\varkappa + 1) C_y} \sqrt{y} \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{2.25}$$

$$\frac{s_x}{2V} = -\frac{2}{3} C(-y)^{3/2}; \qquad \frac{s_y}{2V} = -\frac{2}{3} \frac{C C_y}{C_x} (-y)^{3/2} \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \tag{2.26}$$

3. Найдем теперь асимптотики решений задач качения и статики при стремлении рассматриваемой точки к границе площадки контакта изнутри

области проскальзывания. Введем систему координат x, y, Z с началом в точке P границы площадки контакта, направив оси x и y вдоль касательной и внешней нормали к границе. Аналогично предыдущему сделаем растяжение рассматриваемой окрестности и воспользуемся представлениями (2.1), (2.2). Будем искать асимптотики решений, в которых вектор проскальзывания s непрерывен вплоть до границы площадки контакта. В общем случае не имеется доказательств принадлежности решения указанному классу. Однако при кулоновском законе трения в плоском случае [9, 10] функция s_y(s_x — отсутствует) удовлетворяет выставленному требованию. В пространственном случае при кулоновском трении в случае полного проскальзывания функции s_x и s_y также удовлетворяют наложенному условию [11].

Функцию $\rho(p, |s|)$ в окрестности точки P будем считать Гёльдеровой по p с показателем α и константой, зависящей от $|s|$. Тогда будет иметь место представление $\rho = N(|s|)\, p^{\alpha}$. Функции, описывающие форму контактирующих тел, будем считать гладкими, а давление ограниченным. Тогда в точке P характер поведения давления такой же, как в соответствующей плоской задаче. Так как давление может определяться при $\tau_{xZ} = \tau_{yZ} = 0$, имеем $p = \sigma(-y)^{1/2}$ [8]. В силу указанных представлений для ρ, p и непрерывности s, условия (1.1) и (1.3) в окрестности точки P приобретают вид

$$\tau_{xZ} = \tau_{yZ} = 0 \quad \text{при} \quad y > 0 \tag{3.1}$$

$$\tau_{xZ} = C_x(-y)^{\alpha/2}, \qquad \tau_{yZ} = C_y(-y)^{\alpha/2} \quad \text{при} \quad y \leqslant 0 \tag{3.2}$$

Здесь $C_x = N(a_x, a_y)\,\sigma a_x/L$, $C_y = N(a_x, a_y)\,\sigma a_y/L$, $L = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2}$; a_x, a_y — предельные значения проекций вектора проскальзывания.

Ограничимся случаем $0 < \alpha < 2$, когда напряжения в точке P ограничены, а их производные имеют особенность при $y = 0$. В рассматриваемом случае мы имеем возможность по условиям (3.1), (3.2) определить функции $f'(z)$ и $\Phi(z)$, а затем по этим функциям найти s_x и s_y. Для непрерывных функций s_x и s_y нелинейные условия коллинеарности будут автоматически выполнены в силу выбора постоянных C_x и C_y в (3.2).

Граничные условия для f' и Φ (одинаковые и для качения, и для статики), вытекающие из (3.1), (3.2), имеют вид

$$\operatorname{Im} f' = C_x(-y)^{\alpha/2}, \quad \operatorname{Im}(\Phi^+ - \Phi^-) = C_y(-y)^{\alpha/2}, \quad \operatorname{Re}(\Phi^+ - \Phi^-) = 0 \quad \text{при} \quad y \leqslant 0 \tag{3.3}$$

$$\operatorname{Im} f' = \operatorname{Im}(\Phi^+ - \Phi^-) = \operatorname{Re}(\Phi^+ - \Phi^-) = 0 \quad \text{при} \quad y > 0 \tag{3.4}$$

Главные части при $z \to 0$ функций $f'(z)$ и $\Phi(z)$, дающих решение задачи (3.3), (3.4), представляются в виде

$$f'(z) = \frac{C_x}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}} z^{\alpha/2} + C^*$$

$$\Phi(z) = \frac{iC_y}{\cos\pi\alpha - 1 + i\sin\pi\alpha}(-z)^{\alpha/2} + C^{**}$$

Здесь C^* и C^{**} — произвольные действительные постоянные.

Выражения для проекций вектора проскальзывания в случае качения имеют вид

$$s_x = a_x + \frac{C_x}{\sin\frac{\pi\alpha}{2}} y^{\alpha/2}, \quad s_y = a_y + \frac{(\varkappa+1)C_y}{4\mu\sin\frac{\pi}{2}\alpha} y^{\alpha/2} \quad \text{при} \quad y \geqslant 0 \quad (3.5)$$

$$s_x = a_x + \operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2} C_x(-y)^{\alpha/2}, \quad s_y = a_y + \frac{(\varkappa+1)\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2} C_y}{4\mu}(-y)^{\alpha/2} \quad (3.6)$$

$$\text{при} \quad y < 0$$

В случае статического контакта выражения для проекций вектора проскальзывания записываются следующим образом:

$$s_x = a_x + \frac{2C_x}{(\alpha+2)\sin\frac{\pi\alpha}{2}} y^{1+\alpha/2}, \quad s_y = a_y + \frac{(\varkappa+1)C_y}{2\mu(\alpha+2)\sin\frac{\pi\alpha}{2}} y^{1+\alpha/2} \quad (3.7)$$

$$\text{при} \quad y \geqslant 0$$

$$s_x = a_x + \frac{2C_x\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}}{(\alpha+2)}(-y)^{1+\alpha/2}, \quad s_y = a_y + \frac{(\varkappa+1)C_y\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}}{2\mu(\alpha+2)}(-y)^{1+\alpha/2} \quad (3.8)$$

$$\text{при} \quad y < 0$$

4. Случай стремления точки к границе площадки контакта изнутри области сцепления в настоящей работе не рассматривается, так как он сводится к двум независимым плоским задачам для проекций на оси x и y.

Полученные в точках окрестности границы площадки контакта, принадлежащих области проскальзывания, асимптотики (3.2), (3.5) — (3.8) имеют степенной характер, одинаковый для проекций на оси x и y функций s и τ. Показатель степени α зависит от вида функции ρ, входящей в формулировку закона трения. Производные функций s_x и s_y (первые — в случае качения и вторые — в случае статики), когда $\alpha \neq 1$, имеют особенности при подходе к точке границы площадки контакта и для $y = +0$, и для $y = -0$. В случае кулоновского закона трения ($\alpha = 1$) асимптотики приобретают корневой характер, причем особенности в производных s_x и s_y при $y < 0$ (внутри площадки контакта) пропадают. Асимптотика точного решения [5] задачи о качении бесконечного цилиндра с осевым сдвигом при кулоновском трении совпадает с полученной в настоящей работе при $\alpha = 1$. Асимптотики проскальзывания и напряжения в точных решениях [10] и [9] о качении и сдвиге при кулоновском трении бесконечного цилиндра перпендикулярно его образующей совпадают с асимптотиками, даваемыми (3.2), (3.5)—(3.8) при $\alpha = 1$.

Асимптотики (2.14), (2.15), (2.25), (2.26), полученные в точках окрестности линии раздела областей проскальзывания и сцепления, имеют одинаковый (корневой) характер для проекций искомых характеристик на оси x и y. Корневой характер асимптотик имеет место при указанных выше требованиях на зависимость ρ от $|s|$. Асимптотики точных решений [9, 10] в окрестности точек раздела участков проскальзывания и сцепления совпадают с найденными выражениями для τ_{yz} и s_y в настоящей работе.

Автор признателен Р. В. Гольдштейну за постановку задачи определения асимптотик решений пространственных контактных задач с трением, полезные обсуждения и советы в процессе работы.

Всесоюзный научно-исследовательский
конструкторско-технологический
институт подшипниковой
промышленности

Поступила 23 IV 1979

Ա. Ա. ՍՊԵԿՏՈՐ

ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԳԾԻ ՄՈՏ ՍԱՀՈՒՄՈՎ ԵՎ ՀԱՐԱԿՑՈՒՄՈՎ ՄԻ ՔԱՆԻ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են կայուն ճոճման տարածական կոնտակտային խնդիրներ կոնտակտի մեջ գտնվող մարմինների չոր շփումով միևնույն նյութերի դեպքում։ Տեղի ունի շփման օրենք, ըստ որի տեղական շփման ուժը կախված է ճնշումից և սահելու տեղական արագությունից (շոշափող տեղափոխության նկատմամբ)։ Որոշվում են շոշափող լարումների և սահման արագությունների ասիմպտոտիկաները կոնտակտի մակերեսի սահմանին և այդ մակերեսի վրա սահելու և հարակցման տեղամասերի բաժանման գծին մոտենալու դեպքում։

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR IN SOLUTIONS TO SOME THREE-DIMENSIONAL CONTACT PROBLEMS OF SLIP AND ADHESION NEAR THE DIVISION LINES OF BOUNDARY CONDITIONS

A. A. SPECTOR

Summary

Three-dimensional contact problems of statics and steady rolling are considered. The asymptotic behaviour of tangential tractions and slip velocities near the boundary of contact area and the division line of slip and adhesion areas is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крагельский И. В., Виноградова И. Э.* Коэффициенты трения. М., Машгиз, 1962.
2. *Голего Н. Л.* Схватывание в машинах и методы его устранения. Киев, Техника, 1965.
3. *Вайнштейн В. Э., Трояновская Г. И.* Сухие смазки и самосмазывающиеся материалы. М., Машиностроение, 1968.
4. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., Наука, 1974.
5. *Мишишин И. И.* Об одной нелинейной задаче сопряжения функций. Гидроаэромеханика и теория упругости. Межвуз. научн. сб., 1974, в. 18.
6. *Моссаковский В. И., Макаревич О. П., Рудяков З. З.* О зависимости коэффициента сцепления от скорости качения. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 5.
7. *De Pater A. D.* On the Reciprocal Pressure Between Two Elastic Bodies. Proc. of the Symp. Rolling Contact Phenomena. Amsterdam, 1962.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Наука, 1966.
9. *Глаголев Н. И.* Сопротивление перекатыванию цилиндрических тел. ПММ, 1945, т. IX, в. 4.
10. *Carter F. W.* On the Action of a Locomotive Driving Wheel. Proc. Roy. Soc. (A), 1926, v. 12.
11. *Спектор А. А.* Об одном случае пространственной контактной задачи качения. Изв. АН Армянской ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 5.