

Н. Б. ГРИГОРЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СЛЕДЯЩЕЙ  
 РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКЕ

Задача об устойчивости однородного стержня, шарнирно опертого по концам и нагруженного равномерно распределенной следящей нагрузкой, впервые была поставлена Пфлугером в 1950 г. [1]. Начиная с 1962 г. [2], Лайпольц посвятила целую серию работ различным аспектам этой проблемы. Лайпольцем и Маданом получено точное значение критической нагрузки для консольного стержня, нагруженного равномерно распределенной следящей нагрузкой [3]. Сформулирована и доказана теорема о нижней границе нагрузки выпучивания для стержней, нагруженных следящими силами [4]. Исследовано расположение кривых собственных колебаний стержней при нагружении следящими распределенными силами и собственным весом [5]. Проведена классификация систем, нагруженных следящими и «мертвыми» силами, и исследована возможность применения вариационных методов для решения задач устойчивости [6] и т. д.

Хугером и Леонардом исследована задача об устойчивости стержня, нагруженного следящими распределенными силами и сосредоточенной силой, приложенной на конце стержня [7]. В другой работе эти же авторы исследовали влияние концевых условий стержня на его устойчивость [8]. В работе [9] рассмотрены колебания и устойчивость упругой колонны при совместном действии равномерно распределенных следящих и вертикальных сил для шести различных граничных условий.

В данной работе рассматривается устойчивость трехслойного консольного упругого стержня, нагруженного равномерно распределенной по длине стержня следящей нагрузкой интенсивности  $q$ . Используется теория трехслойного стержня Григолюка—Чулкова [10]. Заполнитель трехслойного стержня — жесткий, длина стержня —  $L$ , а высота пакета —  $h$ . В силу неконсервативности задачи для ее решения применяется динамический метод.

Рассмотрим малые колебания стержня вокруг положения равновесия. Для вывода основного уравнения выделим из стержня элемент длиной  $dx$  (фиг. 1) и для него составим уравнения равновесия. Проектируя все силы на нормаль к изогнутой оси стержня с учетом инерционной силы, получим

$$pF \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \left( N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx = 0$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения стержня,  $\rho$  — осредненная плотность материала стержня [10].

Пренебрегая величинами высшего порядка малости, учитывая, что

$$N = q(L - x)$$

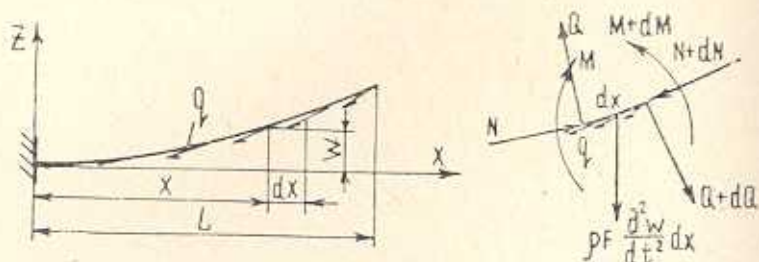
и разделяя на  $dx$ , получим

$$\rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q(L - x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

По теории трехслойного стержня Григолюка—Чулкова введем функцию перемещения  $X$ , определяемую выражением

$$W = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) X \quad (1.2)$$

где  $\beta$  — параметр, характеризующий жесткость заполнителя на сдвиг.



Фиг. 1.

Поперечная сила  $Q$  выражается через функцию перемещения следующим образом [10]:

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = D \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} \quad (1.3)$$

где  $D$  — изгибная жесткость трехслойного стержня, а  $\theta$  — параметр, характеризующий собственную изгибную жесткость несущих слоев трехслойного стержня.

Подставив выражения  $Q$  и  $W$  в уравнение (1.1), получим дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами в частных производных шестого порядка, описывающее малые поперечные колебания трехслойного стержня,

$$\begin{aligned} \rho F \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + D \left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} + \\ + q(L - x) \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для решения этого уравнения пользуемся методом разделения переменных, представляя функцию  $X$  в виде,

$$X(x, t) = \chi(x) e^{i\omega t} \quad (1.5)$$

где  $\chi(x)$  — функция только переменного  $x$ ,

$$\omega = \omega' + j\omega'' \quad (1.6)$$

— комплексная частота колебания трехслойного стержня, нагруженного распределенной следящей нагрузкой.

Введем безразмерные параметры

$$k = \frac{h^2}{\vartheta L^2}, \quad K^2 = \frac{qL^3}{D}, \quad \omega_0^2 = \omega^2 L^4 \frac{\varrho F}{D}, \quad x = \frac{x}{L}, \quad X = \frac{\chi(x)}{L} \quad (1.7)$$

и обозначим дифференцирование по безразмерному  $x$  штрихом. Тогда из уравнения (1.4) вытекает обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами для функции  $X$ :

$$X^{(VI)} - \left[ \frac{1}{\vartheta k} - \frac{K^2}{\vartheta} (1-x) \right] X^{(IV)} - \left[ \frac{K^2}{\vartheta k} (1-x) + \frac{\omega_0^2}{\vartheta} \right] X'' + \frac{\omega_0^2}{\vartheta k} X = 0 \quad (1.8)$$

Рассмотрим два условия на концах стержня:

1. Один конец стержня жестко зашпемлен ( $x = 0$ ), а на другом конце ( $x = 1$ ) имеется абсолютно жесткая диафрагма, которая исключает поперечный сдвиг в торцевом сечении стержня

$$W = W' = \alpha\gamma = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$M = Q = \alpha\gamma = 0 \quad \text{при } x = 1$$

Исходя из выражений  $M$ ,  $Q$  и  $\alpha\gamma$ , согласно [10], найдем

$$X' = X'' = X - kX' = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$X''' = X^{(V)} = X'' - \vartheta k X^{(IV)} = 0 \quad \text{при } x = 1 \quad (1.9)$$

2. Один конец стержня жестко зашпемлен, а другой свободен.

$$W = W' = \alpha\gamma = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$M = Q = S = 0 \quad \text{при } x = 1$$

Здесь  $S$  — силовой фактор, связанный с кинематическим фактором  $\alpha\gamma$  [10]. Отсюда имеем

$$X' = X'' = X - kX' = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$X'' = X^{(IV)} = X''' - \vartheta k X^{(V)} = 0 \quad \text{при } x = 1 \quad (1.10)$$

Таким образом, задача свелась к краевой задаче на собственные значения (1.8) с условиями (1.9) или (1.10) на концах стержня. Как известно [11], динамический метод исследования устойчивости неконсервативных систем сводится к исследованию зависимости частоты колебания системы от величины внешней нагрузки и считается, что система потеряла устойчивость, если она при некотором значении нагрузки  $K^2 = K_{кр}^2$  начн

нает совершать колебания с возрастающей амплитудой. Но стержень будет колебаться с возрастающей амплитудой, если мнимая часть  $\omega''$  комплексной частоты имеет знак минус. Если внешняя нагрузка не действует на стержень, то частота колебания — вещественная величина ( $\omega'' = 0$ ) и стержень совершает гармоническое колебание. Частота колебаний останется вещественной и при малых значениях внешней нагрузки ( $K^2 < K_{кр}^2$ ). Следовательно, для определения критической силы мы можем ограничиться лишь вещественными значениями частоты.

Поскольку коэффициенты уравнения (1.8) являются аналитическими функциями в любой точке  $x$ , то решение этого уравнения можно представить в виде ряда Тейлора

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1-x)^n \quad (1.11)$$

где  $A_n$  — неизвестные коэффициенты.

Подставляя ряд (1.11) и его производные в уравнение (1.8), выведем рекуррентное соотношение для определения коэффициентов  $A_n$

$$A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \left[ \frac{1}{\theta k} (n-2)(n-3)(n-4)(n-5) A_{n-2} - \frac{K^2}{\theta} (n-3)(n-4)(n-5)(n-6) A_{n-3} + \frac{\omega_2^2}{\theta} (n-4)(n-5) A_{n-4} + \frac{K^2}{\theta k} (n-5)(n-6) A_{n-5} - \frac{\omega_2^2}{\theta k} A_{n-6} \right] \quad (1.12)$$

С помощью этой формулы неизвестные коэффициенты  $A_n$ , начиная с  $n=6$ , можно выразить через предыдущие коэффициенты.

С учетом (1.11) условия на концах стержня (1.9) и (1.10) принимают такой вид

$$\begin{aligned} \sum n A_n &= 0 \\ \sum n(n-1)(n-2) A_n &= 0 \\ \sum A_n - k \sum n(n-1) A_n &= 0 \\ A_2 &= 0, \quad A_3 = 0, \quad A_4 - 12 \theta k A_4 = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

и

$$\begin{aligned} \sum n A_n &= 0 \\ \sum n(n-1)(n-2) A_n &= 0 \\ \sum A_n - k \sum n(n-1) A_n &= 0 \\ A_2 &= 0, \quad A_4 = 0, \quad A_3 - 20 \theta k A_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Выше во всех суммах пределы суммирования от 0 до  $\infty$ .

Из (1.13) или (1.14) с использованием формулы (1.12) получим системы трех линейных алгебраических однородных уравнений относительно  $A_0, A_1, A_2$ :

$$\begin{aligned} a_{1,1}A_0 + a_{1,2}A_1 + a_{1,3}A_2 &= 0 \\ a_{2,1}A_0 + a_{2,2}A_1 + a_{2,3}A_2 &= 0 \\ a_{3,1}A_0 + a_{3,2}A_1 + a_{3,3}A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

или  $A_0, A_1, A_2$ :

$$\begin{aligned} b_{1,1}A_0 + b_{1,2}A_1 + b_{1,3}A_2 &= 0 \\ b_{2,1}A_0 + b_{2,2}A_1 + b_{2,3}A_2 &= 0 \\ b_{3,1}A_0 + b_{3,2}A_1 + b_{3,3}A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для существования нетривиального решения этих систем необходимо, чтобы их определители были равны нулю. Отсюда получим частотные уравнения в виде

$$\Delta(K^2, \omega_*) = 0 \quad (1.17)$$

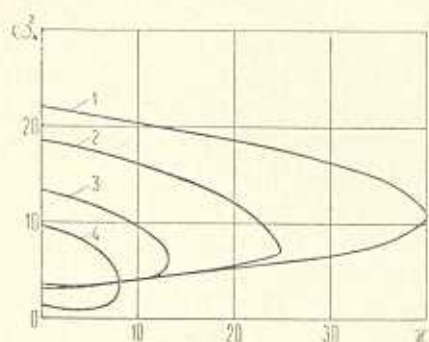
С помощью соотношения (1.17) можно построить зависимость частоты  $\omega_*$  собственных колебаний стержня от безразмерной силы  $K^2$ .

Разработан алгоритм и составлена программа для построения зависимости  $\omega_*$  от  $K^2$  численным способом. На фиг. 2 приведен график этой зависимости при некоторых значениях  $\theta$  и  $k$ . При  $K^2 = 0$  имеем первую  $\omega_1^0$  и вторую  $\omega_2^0$  безразмерные частоты собственных колебаний. По мере увеличения силы  $K^2$  нижняя частота увеличивается, а верхняя частота уменьшается, и при  $K^2 = K_{cr}^2$  эти кривые смыкаются. В этой точке имеет место кратность корней  $\omega_*$  в уравнении (1.17), и при дальнейшем увеличении  $K^2$  корни становятся комплексно сопряженными, и существует корень с отрицательной мнимой частью. По выражению (1.5) это соответствует появлению формы колебаний с нарастающей амплитудой.

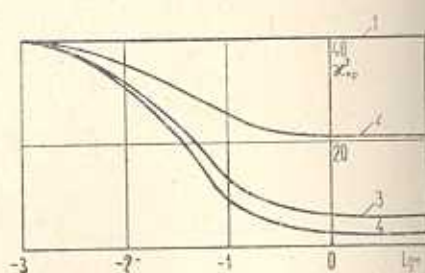
Численный анализ показывает, что число членов ряда (1.11), при котором ряд сходится, зависит от значения параметров  $\theta$  и  $k$  и меняется от 20—30 ( $\theta \geq 0.1, k \geq 1$ ) до 80—100 ( $\theta < 0.01, k < 0.01$ ).

Из приведенных графиков (фиг. 3) видно, что при увеличении  $\theta$  значение критической нагрузки увеличивается. Например, при  $k = 0.1$  увеличение  $\theta$  от 0.01 до 0.1 приводит к увеличению значения  $K_{cr}^2$  от 8.1 до 13.4, то есть на 65%. При дальнейшем увеличении  $\theta$  от 0.1 до 0.5 и до 1 (при  $\theta = 1$  трехслойный стержень переходит в однородный, состоящий только из одного несущего слоя) значение  $K_{cr}^2$  изменяется, соответственно, от 13.4 до 25.5, то есть на 91% и от 25.5 до 40.05, то есть на 57%. Таким образом, более существенное влияние  $\theta$  оказывает при своих больших значениях. При малых  $k$  ( $k \leq 0.01$ ) влияние  $\theta$  на значение  $K_{cr}^2$  менее заметно.

Отметим, что при  $\theta = 1$  полученное значение  $K_{кр}^2 = 40.05$  полностью совпадает с известным [3] значением критической нагрузки для однородного стержня.



Фиг. 2. Зависимость  $\omega_*$  от  $K^2$  при  $k=0.1$  для следующих значений  $\theta$ : 1— $\theta=1$ ; 2— $\theta=0.5$ ; 3— $\theta=0.1$ ; 4— $\theta=0.01$ .



Фиг. 3. Зависимость критической силы от величины  $k$  при 1 условиях на концах стержня. Отмеченные линии соответствуют следующим значениям  $\theta$ : 1— $\theta=1$ ; 2— $\theta=0.5$ ; 3— $\theta=0.1$ ; 4— $\theta=0.01$ .

Изменение параметра  $k$  в пределах  $k > 10$  практически не приводит к изменению значения  $K_{кр}^2$ . Если же  $k$  изменяется в пределах  $0.001 \leq k \leq 1$ , то значение  $K_{кр}^2$  существенно увеличивается с уменьшением  $k$ . При  $k \leq 0.001$  значение  $K_{кр}^2$  приближается к значению  $K_{кр}^2 = 40.05$ , что соответствует однородному стержню.

Наличие жесткой диафрагмы на свободном конце стержня заметно влияет на величины  $K_{кр}^2$  лишь при больших  $k$ . Например, при  $k = 1$  и  $\theta = 0.1$  значение  $K_{кр}^2$  увеличивается на 15%, а при  $k \leq 0.1$  и  $\theta = 0.1$  значение  $K_{кр}^2$  практически не меняется.

Ленинградский филиал  
ЕрПИ им. К. Маркса

Поступила 12 IV 1979

Ն. Յ. ԿՐԳՈՐՅԱՆ

ԵՌԱՇԵՐՏ ՋՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԵՏԵՎՈՂ ՀՎԱՍԱՐԱԶՈՓ  
ԲԱՇԽՎԱԾ ԲԵՌԻ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ս. մ փ ո փ ո ս լ մ

Հետազոտված է հոաշերտ, մի ծայրով կոշտ ամրակցված հավասարաչափ բաշխված հետևող բևույ բեռնավորված ձողի կայունությունը Այս ոչ կոնսերվատիվ խնդիրը լուծված է առաձգական սիստեմների կայունության հետազոտման դինամիկ մեթոդով: Ուսումնասիրվում են հաաշերտ ձողի կրող շերտերի ծոման սեփական կոշտությունների և լցանի սահբի կոշտության ադղեցությունները կրթիկական ուժի մեծության վրա:

# STABILITY OF A SANDWICH ROD UNDER A UNIFORMLY DISTRIBUTED FOLLOWER LOAD

N. B. GRIGORIAN

## S u m m a r y

The non-conservative problem on stability of a sandwich cantilever subjected to a uniformly distributed follower load is considered. The effect of intrinsic flexural rigidity of the faces and of shear stiffness of the core on flatter load is studied.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Pflüger A. Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950, p. 337.
2. Leipholz H. Die Knicklast des einseitig eingespannten Stabes mit gleichmässig verteilter, tangentialer Längsbelastung. ZAMP, 1952, 13, 581—589.
3. Leipholz H., Madan P. On the solution of the stability problem of elastic rods subjected to uniformly distributed, tangential follower forces. Ingenieur-Archiv, Springer-Verlag, 1975, 44, 347—357.
4. Leipholz H., Polzin T. On a lower bound theorem for the buckling load of elastic beams subjected to nonconservative compressive follower loads. Acta Mechanica, 1977, 25, 171—186.
5. Leipholz H. On the analysis situs of eigenvalue curves of rods subjected to conservative and nonconservative loads. Acta Mechanica, 1973, 17, 69—80.
6. Leipholz H. On conservative elastic systems of the first and second kind. Ingenieur-Archiv, 1974, 43, 255—271.
7. Hauger W., Leonhard M. Exact calculation of buckling loads of elastic bars subjected to tangential forces. Mech. Res. Comm., 1976, 3, 39—43.
8. Hauger W., Leonhard M. Influence of the end-supports on the stability of bars. Journal of Sound and Vibration, 1977, 55 (1), 153—156.
9. Sugiyama Y., Kawagoe H. Vibration and stability of elastic columns under the combined action of uniformly distributed vertical and tangential forces. Journal of Sound and Vibration, 1975, 38 (3), 341—355.
10. Григориан Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., Машиностроение, 1973, т. 172.
11. Бологин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961, с. 340.