ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 6, 1979 Механика

В. А. ГОРДОН, Г. Б. КОЛЧИН

# МЕТОД ФАЗОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

1. Квазистатическая осесимметричная плоская задача термоупругости для полого цилиндра, модуль упругости $E$ которого зависит от температуры $T$, сводится, как известно, к уравнению [1, 2]

$$\sigma_r'' + a(r)\sigma_r' + b(r)\sigma_r = c(r) \tag{1.1}$$

где

$$a(r) = \frac{3}{r} - \frac{E'}{E}, \quad b(r) = -\bar{\nu}\frac{E'}{rE}, \quad c(r) = \frac{E}{r(\nu - 1)}\varepsilon_T'$$

$$\varepsilon_T = \int_{T_0}^{T} \alpha dT$$

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \dfrac{1-2\nu}{1-\nu} & \text{в случае плоской деформации} \\ 1-\nu & \text{в случае плоского напряженного состояния} \end{cases}$$

$r$ — радиальная координата

Здесь и далее штрихом обозначается операция дифференцирования.

Введем безразмерные радиус $\rho = r/R_1$ и температуру $\tau = T/T_1$, где $R_1$ и $T_1$—соответственно радиус и температура внутренней поверхности цилиндра. Распределение температур по толщине цилиндра в стационарном случае при условии постоянства коэффициента теплопроводности описывается зависимостью [3]

$$\tau = 1 + \frac{\Delta T}{\ln \mu}\ln \rho \tag{1.2}$$

где

$$\mu = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Delta T = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \quad (T_2 \leqslant T_1)$$

Здесь $R_2$ и $T_2$ — соответственно радиус и температура внешней поверхности цилиндра.

Принимая в качестве независимой переменной температуру τ и произведя в уравнении (1.1) замену переменной, получим разрешающее уравнение осесимметричной задачи неоднородной термоупругости в виде

$$\sigma'' + \beta(\tau)\sigma' + \gamma(\tau)\sigma = \delta(\tau) \tag{1.3}$$

где $\sigma = \frac{\sigma_r}{p_1}$, $p_1$ — внутреннее давление

$$\beta(\tau) = 3\frac{\rho'}{\rho} - \frac{E'}{E}, \quad \gamma(\tau) = -\nu\frac{E'\rho'}{E\rho}, \quad \delta(\tau) = \frac{E(\rho')^2}{p_1\rho(\nu - 1)}\varepsilon_T$$

Радиус выражается через температуру τ с помощью зависимости (1.2)

$$\rho = \exp h(\tau - 1) \tag{1.4}$$

где $h = \frac{\ln \mu}{\Delta T}$.

Аргумент изменяется в пределах

$$\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$$

где $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 1 + \Delta T$.

Решение уравнения (1.3) должно удовлетворять граничным условиям

$$\sigma(1) = 1, \quad \sigma(1 + \Delta T) = \lambda \tag{1.5}$$

где $\lambda = \frac{p_2}{p_1}$, $p_2$ — наружное давление.

Классический подход к решению уравнения типа (1.3), заключающийся в отыскании базисных функций в виде бесконечных полиномов и определении частного решения методом вариации постоянных удается применить к сравнительно небольшому классу специальных уравнений. Сюда относятся уравнения Бесселя, Матье, Лежандра, Лаггера, Вебера, Эйри, гипергеометрические, для которых найдены и табулированы базисные функции. Эти уравнения представляют незначительную часть возможных линейных уравнений с переменными коэффициентами.

В случае произвольной неоднородности в основной массе работ, посвященных этой проблеме, используется метод последовательных приближений в различных модификациях [1].

2. В качестве одного из методов получения приближенного замкнутого решения поставленной задачи при произвольном характере неоднородности предлагается использовать матричный вариант метода фазовых интегралов (ВКБ) [4, 5].

С помощью подстановки

$$\sigma = \sum \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{\tau} \beta d\xi\right) \tag{2.1}$$

приведем (1.3) к виду

$$\sum{}'' + k^2(\tau)\sum = q(\tau) \tag{2.2}$$

где

$$k^2(\tau) = \gamma(\tau) - \frac{1}{4}\beta^2(\tau) - \frac{1}{2}\beta'(\tau)$$

$$q(\tau) = \delta(\tau)\exp\left(\frac{1}{2}\int^{\tau}\beta d\xi\right)$$

Обозначив

$$\sum = x_1, \quad \sum{}' = x_2 \tag{2.3}$$

получим из (2.2) каноническое уравнение в фазовых координатах

$$X' = A(\tau)X + Bq(\tau) \tag{2.4}$$

где

$$X(\tau) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \quad A(\tau) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Собственные числа матрицы $A$ определяются из уравнения

$$\det(A - zE) = 0$$

и равны

$$z_1 = ik, \quad z_2 = -ik$$

а соответствующие собственные векторы — $\{1, ik\}$ и $\{1, -ik\}$.

Введем преобразование

$$X = RF \tag{2.5}$$

где $F = \{f_1, f_2\}^T$ — неизвестный вектор, $R$ — квадратная $(2 \times 2)$ матрица, столбцами которой являются координаты собственных векторов матрицы $A$.

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

Тогда уравнение относительно $F$ принимает вид

$$\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} ik & 0 \\ 0 & -ik \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix} - \frac{k'}{2k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix} + \frac{iq}{2k}\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

Структура системы уравнений (2.7) показывает, что в случае, когда функция $k$ изменяется плавно и не принимает нулевых значений во всем диапазоне изменения аргумента, взаимодействие уравнений слабое и система распадается на два независимых неоднородных уравнения первого порядка относительно введенных фазовых координат $f_1$ и $f_2$

$$f_1' = \left(ik - \frac{k'}{2k}\right) f_1 - \frac{iq}{2k}$$

$$f_2' = \left(-ik - \frac{k'}{2k}\right) f_2 + \frac{iq}{2k}$$

решения которых (фазовые интегралы) легко определяются

$$f_1 = \left(C_1 - \frac{i}{2}\psi_2\right)\varphi_1 \tag{2.8}$$

$$f_2 = \left(C_2 + \frac{i}{2}\psi_1\right)\varphi_2 \tag{2.9}$$

где

$$\varphi_1 = k^{-\frac{1}{2}} \exp\left(i\int^{\xi} k d\xi\right), \qquad \psi_1 = \int^{\xi} q(\xi)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi\,.$$

$$\varphi_2 = k^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-i\int^{\xi} k d\xi\right), \qquad \psi_2 = \int^{\xi} q(\xi)\,\varphi_2(\xi)\,d\xi$$

Располагая решениями (2.8), (2.9), учитывая вид матрицы $R$ (2.6), из представлений (2.5), (2.3) и (2.1) получим

$$\sigma = C_1\tilde{\varphi}_1 + C_2\tilde{\varphi}_2 + \frac{i}{2}\left(\psi_1\tilde{\varphi}_2 - \psi_2\tilde{\varphi}_1\right) \tag{2.10}$$

где

$$\tilde{\varphi}_1 = k^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\int^{\xi}\left(ik - \frac{1}{2}\beta\right) d\xi\right]$$

$$\tilde{\varphi}_2 = k^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\int^{\xi}\left(ik + \frac{1}{2}\beta\right) d\xi\right]$$

Постоянные $C_1$ и $C_2$ определяются из граничных условий (1.5).

3. Функции $f_1^0 = C_1\varphi_1$ и $f_2^0 = C_2\varphi_2$ являются приближенными базисными функциями уравнения (2.2) и точными базисными функциями уравнения сравнения, образованного двукратным дифференцированием функции $f_1^0$ (или $f_2^0$)

$$f'' + k^2(1+g)f = 0 \tag{3.1}$$

где $f$ означает любое из частных решений $f_1^0$ или $f_2^0$.

$$g = \frac{1}{2k^2}\left[\frac{k''}{k} - \frac{3}{2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\right] \tag{3.2}$$

Левые части уравнений (3.2) и (2.2) совпадают, если

$$|g| \ll 1$$

Таким образом, необходимым условием существования приближенных решений (2.8) и (2.9) является неравенство, накладываемое на функцию неоднородности

$$\left|\frac{1}{2k^2}\left[\frac{k''}{k}-\frac{3}{2}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\right]\right| \ll 1 \tag{3.3}$$

4. Пусть зависимость модуля Юнга от температуры носит линейный характер [6]

$$E = E_0(1-\Delta E_1\tau) \tag{4.1}$$

где $E_0$ — невозмущенный модуль упругости

$$\Delta E_1 = \frac{\beta_1 T_1}{E_0}$$

$\beta_1$ — эмпирическая константа материала.
Величина $\Delta E_1 \cdot 100\%$ показывает, на сколько процентов снижается модуль упругости на внутренней поверхности в результате нагрева по сравнению с невозмущенным модулем.

Левая часть неравенства (3.3) в случае зависимости (4.1) принимает вид

$$g = \frac{M(\tau)}{2N^2(\tau)}\left[S(\tau)-\frac{5}{8}\frac{M(\tau)}{N(\tau)}\right] \tag{4.2}$$

где

$$M(\tau) = h(\overline{\gamma}-1.5\,S^2(\tau))-1.5\,S^3(\tau)$$

$$N(\tau) = -2.25\,h^2+(\overline{\gamma}-1.5)\,hS(\tau)-0.75\,S^2(\tau)$$

$$S(\tau) = \frac{\Delta E_1}{1-\Delta E_1\tau}$$

Анализ выражения (4.2) показывает, что при $h\to\infty$, то есть в случае отверстия радиуса $R_1$ в бесконечной плоскости, получаем точное решение, так как $g(\tau)\to 0$, при $\Delta E_1 = 0$ ($\beta_1 = 0$) получаем точное решение, так как $g(\tau) = 0$. В остальных случаях получаем приближенное решение.

Рассмотрим случай нагружения толстостенного цилиндра ($\mu = 10$) со значительным перепадом температур ($T_2 \ll T_1$, $\tau_2\to 0$), причем модуль упругости материала на внутренней поверхности составляет 50% модуля в ненагретом состоянии ($\Delta E_1 = 0.5$). Коэффициент Пуассона примем 0.33. В этом случае аргумент изменяется в пределах от 1 на внутренней до 0 — на наружной поверхностях. Степень точности приближенного решения будет переменной для разных температур и определяется величиной $g=g(\tau)$. Абсолютная величина $g$ при указанных значениях параметров цилиндра изменяется между значениями

$$|g(1)|=0.0115\ll 1,\quad |g(0)|=1.0013\ll 1$$

Отсюда следует, что использование решений типа (2.10) в этом случае корректно.

Очевидно, что предлагаемая методика допускает обобщение и на другие случаи распределения температуры по толщине цилиндра.

Институт математики
с ВЦ АН МССР
Кишиневский политехнический
институт им. С. Лазо

Поступила 13 II 1979

Վ. Ա. ԳՈՐԴՈՆ, Գ. Բ. ԿՈԼՉԻՆ

## ՖԱԶԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ԳԼԱՆԻ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ

### Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Ուսումնասիրվում է քվազիստատիկ առանցքասիմետրիկ խնդիր, երբ նյութի առաձգականության մոդուլը տրված է որպես ջերմաստիճանի ֆունկցիա։*

*Փոփոխական գործակիցներով անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը շառավղային լարման համար, որը դիտարկվում է որպես ջերմաստիճանի ֆունկցիա, լուծվում է ֆազային ինտեգրալների մատրիցային մեթոդով։*

*Ստացվել է փակ մոտավոր լուծում։ Սկզբնական հավասարման և ստացված լուծումների դիֆերենցելուց և նրանց օգնությամբ ստացված հավասարման բաղդատման նույնությունից ելնելով ձևակերպվում է մոտավոր լուծումների գոյության անհրաժեշտ պայմանը ու համասեռության ֆունկցիայի վրա դրված անհավասարության ձևով։*

*Թվային օրինակի վրա ցույց է տրված մեթոդի կիրառման հնարավորությունը, երբ առաձգականության մոդուլը գծայնորեն է կախված ջերմաստիճանից։*

## PHASE INTEGRAL METHOD IN THE PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR THE NON-HOMOGENIOUS CYLINDER

V. A. GORDON, G. B. COLTHCIN

### S u m m a r y

The axisymmetrical problem of a non-homogeneous thermoelasticity is solved by the phase integral method. The problem is redused to the

solution of two coupled first-order differential equations. The coefficients of initial equation must subordinate by certain unequality.


## ЛИТЕРАТУРА

1. *Колчин Г. Б.* Плоские задачи теории упругости неоднородных тел. Кишинев, Штиница, 1977.
2. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. М., Наука, 1974.
3. *Карлсроу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
4. *Хединг Д.* Введение в метод фазовых интегралов. М., Мир, 1965.
5. *Гордон В. А.* Изгиб неоднородной балки на неоднородном упругом основании. Сб. исследования механического сопротивления материалов и конструкций. Вып. 28. М., МИСИ, 1978.
6. *Колчин Г. Б.* Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. Кишинев, Картя молдовеняскэ, 1971.