ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 6, 1979 Механика

Л. М. КУРШИН, Г. И. РАСТОРГУЕВ

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ СЕЧЕНИЯ СКРУЧИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ

В работе [1] доказано, что из всех призматических стержней с односвязным поперечным сечением с заданными осевыми моментами инерции максимальную жесткость кручения будет иметь стержень с эллиптическим сечением. Доказательство сводится к сравнению жесткостей кручения стержней эллиптического и любого другого сечений, имеющих те же осевые моменты инерции. Та же задача об определении формы поперечного сечения стержня максимальной крутильной жесткости с известными осевыми моментами инерции рассматривается в настоящей работе как изопериметрическая вариационная задача о стационарном значении некоторого функционала в области с подвижной границей. В качестве естественных условий стационарности функционала, кроме обычных уравнений для функции кручения, получено дополнительное условие, позволяющее определить форму искомого контура. Показано, что дополнительному краевому условию удовлетворяет контур сечения в виде эллипса.

1. Рассмотрим работающий на кручение призматический стержень с односвязным поперечным сечением B, ограниченным контуром L. Поместим начало декартовой системы координат $x0y$ в некоторую внутреннюю точку сечения. Пусть заданы осевые моменты инерции сечения

$$I_x = \iint\limits_B y^2 dxdy, \qquad I_y = \iint\limits_B x^2 dxdy \tag{1.1}$$

Функция напряжений при кручении $\varphi(x, y)$ [2] должна удовлетворять уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + 2 = 0 \quad (x, y) \in B \tag{1.2}$$

и краевому условию

$$\varphi = 0 \quad (x, y) \in L \tag{1.3}$$

Согласно [3], задача об определении формы поперечного сечения стержня, имеющего максимальную крутильную жесткость при заданных осевых моментах инерции (1.1) сечения, может быть поставлена как вариационная задача о стационарном значении функционала

$$V = \iint\limits_B (4\varphi - \varphi_x^2 - \varphi_y^2)\, dxdy + \lambda_1 \iint\limits_B y^2 dxdy + \lambda_2 \iint\limits_B x^2 dxdy \tag{1.4}$$

в области с подвижной границей при условии (1.3); через λ_1, λ_2 обозначены постоянные. Условию стационарности функционала (1.4) с учетом (1.3) соответствуют уравнение в области (1.2) и вследствие варьирования границы условие

$$\varphi_n^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 x^2 = 0 \quad (x, y) \in L \tag{1.5}$$

Здесь φ_n — производная функции $\varphi(x, y)$ по нормали к контуру. Условие (1.5) является дополнительным для обычной краевой задачи (1.2), (1.3) кручения стержней с односвязным поперечным сечением и позволяет определить форму искомого контура.

Для определения отличных от нуля постоянных λ_1, λ_2 разыскиваем решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию (1.3) в виде

$$\varphi = -c_1 x^2 + (c_1 - 1) y^2 + c_2 \quad (x, y) \in B + L$$

где $0 < c_1 < 1$, $c_2 > 0$ — постоянные, и получаем уравнение границы сечения

$$y^2 = (-c_1 x^2 + c_2)/(1 - c_1) \quad (x, y) \in L$$

определяющее эллипс. В этом случае

$$\varphi_n^2 = 4[c_1(2c_1 - 1) x^2 + c_2(1 - c_1)] \quad (x, y) \in L$$

и постоянные λ_1, λ_2 однозначно определяются из дополнительного краевого условия (1.5).

2. Аналогичный результат — эллиптическая форма области — может быть получен и в задаче о равносторснием растяжении пластинки. Рассмотрим пластинку постоянной толщины h, ограниченную замкнутым контуром L и нагруженную постоянным напряжением $\sigma_n = p$, направленным по нормали к контуру. Форму границы разыскиваем из условия минимума энергии упругой деформации пластинки при заданных осевых моментах инерции (1.1) ($x0y$ — срединная плоскость пластинки). Тогда на границе L получается дополнительное краевое условие вида

$$h(1 - \nu) p^2/E + \lambda_3 y^2 + \lambda_4 x^2 = 0 \quad (x, y) \in L$$

где λ_3, λ_4 — некоторые постоянные, E, ν — упругие постоянные материала. Эту задачу можно трактовать и как задачу об определении формы плоской замкнутой кривой, ограничивающей минимальную площадь при заданных осевых моментах инерции, поскольку рассматриваемая пластинка находится в состоянии равностороннего растяжения, и энергия упругой деформации пропорциональна площади, охватываемой L.

Форма сечения в виде эллипса или окружности соответствует стержню наименьшего веса при ограничениях на крутильную и изгибную жесткости [4]. В работе [4] исследованы также аналогичные задачи.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила 12 I 1979

Լ. Մ. ԿՈՒՐՇԻՆ, Գ. Ի. ՌԱՍՏՈՐԳՈՒԵՎ

ՈԼՈՐՎՈՂ ՁՈՂԻ ԿՏՐՎԱԾՔԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՁԵՎԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է տրված իներցիայի առանցքային մոմենտներով և ամենամեծ ոլորման կոշտություն ունեցող պրիզմատիկ ձողի կտրվածքի ձևի որոշման խնդիրը։

Շարժվող եզրագծով տիրույթում տրված որոշակի ֆունկցիոնալի կայունության պայմանից հետևում է անհայտ եզրագծի վրա լրացուցիչ եզրային պայման, որին բավարարում է էլիպսի տեսքով կտրվածքի եզրագիծը։ Այդ համապատասխանում է Ե. Լ. Նիկոլաիի կողմից ապացուցված թեորեմին։

ON THE OPTIMAL SECTIONAL FORM OF THE TORSIONAL ROD

L. M. KURSHIN, G. I. RASTORGUEV

S u m m a r y

The problem on determination of the prismatic rod sectional form having maximum torsion stiffness with the given moments of inertia about its axis is discussed. The additional condition on the unknow boundary results from the stationarity of a functional in the field with a movable boundary. The elliptical form of the section contour satisfies this condition. It corresponds to the theorem proved by E. L. Nickolaji.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nikolai E. L.* Über die Drillungssteifigkeit zylindrischer Stäbe. Zeitschrift für angew. Math. und Mech., 1924, 4. См. также Николаи Е. Л., Тр. по механике. М., Гостехиздат, 1955, стр. 67—70.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
3. *Куршин Л. М.* К задаче об определении формы сечения стержня максимальной крутильной жесткости. Докл. АН СССР, 1975, 223, 3.
4. *Banichuk N. V., Karihaloo B. L.* Minimum-Weight design of multi-purpose cylindrical bars. Internat. J. Solids and Structures, 1976, 12, 4.