ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, № 5, 1979 Механика

Ф. П. ГРИГОРЯН

СИНТЕЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С НАПЕРЕД ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ

1. В ряде работ [1—4] рассмотрена задача: для вполне управляемой системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Hu$$

построить скалярное управление

$$u = Bx$$

(A, H, B — постоянные матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$) так, чтобы замкнутая система имела наперед заданный спектр $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0$ ($\lambda_j^0 = \text{const}$, $j = 1, 2, \ldots, n$), иными словами, построить матрицу B так, чтобы матрица $(A + HB)$ была подобна диагональной матрице с заданными диагональными элементами.

Аналогичная по смыслу задача для нестационарной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + H(t)\,u, \quad u = B(t)\,x \tag{1.1}$$

($A(t)$, $H(t)$, $B(t)$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$) в [5] сформулирована следующим образом: построить матрицу $B(t)$ так, чтобы матрица $[A(t)+H(t)B(t)]$ была кинематически подобна диагональной матрице, диагональными элементами которой служат заданные числовые функции $\lambda_1^0(t), \lambda_2^0(t), \ldots, \lambda_n^0(t)$, то есть чтобы

$$\widetilde{K}^{-1}(A + HB)\,\widetilde{K} - \widetilde{K}^{-1}\frac{d\widetilde{K}}{dt} = \Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1^0(t), \ldots, \lambda_n^0(t)) \tag{1.2}$$

где $\widetilde{K}$ — некоторая невырожденная дифференцируемая матрица.

Последняя задача рассмотрена в случае, когда на рассматриваемом интервале J изменения t функции $\lambda_j^0(t)$ удовлетворяют условию

$$|\lambda_j^0(t) - \lambda_i^0(t)| \geqslant a > 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad \forall t \in J$$

В работе [6] рассматривается система со скалярным управлением в случае $\lambda_j^0(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

В настоящей статье решается задача в наиболее общем случае.

Задача. Пусть для нестационарной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + H(t)u, \quad u = B(t)x \tag{1.3}$$

где x и u — соответственно $(n \times 1)$ и $(m \times 1)$ — матрицы фазовых координат и управляющих функций; $A(t)$, $H(t)$, $B(t)$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ и элементами, дифференцируемыми по t на рассматриваемом промежутке $[t_0, T)$ любое нужное число раз, матрица управляемости [7]

$$Q(t) = [H_1, L_A H_1, \ldots, L_A^{n_1-1} H_1; H_2, L_A H_2, \ldots, L_A^{n_2-1} H_2; \ldots;$$

$$H_m, L_A H_m, \ldots, L_A^{n_m-1} H_m]$$

где $H_i \equiv H_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — столбцы матрицы $H(t) = (H_1(t), \ldots$ $\ldots, H_m(t))$, n_i — порядок i-ой подсистемы, $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$,

$$L_A^k H_i = A L_A^{k-1} H_i - \frac{d(L_A^{k-1} H_i)}{dt}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$L_A^0 H_i = H_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

имеет ранг «n» при $t \in [t_0, T)$, требуется построить матрицу $B(t)$ так, чтобы матрица $[A(t) + H(t)B(t)]$ была кинематически подобна диагональной матрице, диагональными элементами которой служат заданные числовые функции

$$\mu_0(t), \mu_0(t), \ldots, \mu_0(t); \quad 0, 0, \ldots, 0; \quad \mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_{m_3}(t),$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = n$$

при

$$|\mu_\sigma(t) - \mu_s(t)| \geqslant a > 0 \quad (\sigma \neq s; \ \sigma, s = 1, 2, \ldots, m_3)$$
$$\mu_0(t) \neq 0, \quad \mu_0(t) \neq \mu_s(t) \tag{1.4}$$

то есть, чтобы

$$(A + HB)K = K\Lambda(t) + \frac{dK}{dt} \tag{1.5}$$

где

$$\Lambda(t) = \mathrm{diag}\,(\mu_0(t), \ldots, \mu_0(t); 0, 0, \ldots, 0; \mu_1(t), \ldots, \mu_{m_3}(t))$$

K — некоторая невырожденная дифференцируемая матрица.

2. Введем в рассмотрение систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x + H(\tau)B(\tau, \varepsilon)x, \quad \tau = \varepsilon t \tag{2.1}$$

содержащую параметр ε.

Все построения, проводимые ниже, имеют относительно ε тождественный характер, и потому они сохраняют силу и при $\varepsilon = 1$, когда системы (2.1) и (1.3) совпадают.

Предполагается, что собственные значения матрицы A различны и отличны от нуля.

Матрицу $\widehat{K}$ представляем в виде

$$\widehat{K} = \widetilde{\widehat{K}}(\tau, \varepsilon)\,\chi(t) \tag{2.2}$$

где

$$\chi(t) = \operatorname{diag}(\chi_1(t), \chi_2(t), E_{m_3})$$

— матрица преобразования к диагональному виду системы

$$\frac{dz}{dt} = J(\lambda)\,z$$

матрица $J(\lambda)$ представляет собой матрицу Жордана

$$J(\lambda) = \operatorname{diag}(\Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_2}, \Lambda_1)$$

где $\Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_2}$ — матрицы сдвига порядка m_1 и m_2 соответственно, $\Lambda_1 = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_{m_3})$.

Как показано в [8] (стр. 169—170),

$$\chi_1(t) = \exp(\Gamma_{m_1} t), \quad \chi_2(t) = \exp(\Gamma_{m_2} t)$$

Матрицу $\widehat{K}$ представим в следующем виде:

$$\widehat{K} = (\widehat{K}_1, \ldots, \widehat{K}_{m_1};\; \widehat{K}_{m_1+1}, \ldots, \widehat{K}_{m_1+m_2};\; \widehat{K}_{m_1+m_2+1}, \ldots, \widehat{K}_n)$$

и обозначим

$$\widehat{K}_{(m_1)} = (\widehat{K}_1, \ldots, \widehat{K}_{m_1});\;\; \widehat{K}_{(m_1+m_2)} = (\widehat{K}_{m_1+1}, \ldots, \widehat{K}_{m_1+m_2});\;\; \widehat{K}_{(n)} = (\widehat{K}_{\alpha+1}, \ldots, \widehat{K}_n)$$
$$(\alpha = m_1 + m_2)$$

Матрицы $\widehat{K}_{(m_1)}, \widehat{K}_{(m_1+m_2)}, \widehat{K}_{(n)}$ представим в виде

$$\widehat{K}_{(m_1)} = (\widetilde{K}_1(\tau, \varepsilon), \ldots, \widetilde{K}_{m_1}(\tau, \varepsilon))\,\chi_1(t) = \widetilde{K}_{(m_1)}(\tau, \varepsilon)\,\chi_1(t) \tag{2.3}$$

$$\widehat{K}_{(\alpha)} = (\widetilde{K}_{m_1+1}(\tau, \varepsilon), \ldots, \widetilde{K}_{m_1+m_2}(\tau, \varepsilon))\,\chi_2(t) = \widetilde{K}_{(\alpha)}(\tau, \varepsilon)\,\chi_2(t) \tag{2.4}$$

$$\widehat{K}_{(n)} = (\widetilde{K}_{\alpha+1}(\tau, \varepsilon), \ldots, \widetilde{K}_n(\tau, \varepsilon))\,E_{m_3} = \widetilde{K}_{(n)}(\tau, \varepsilon)$$

$\widetilde{K}(\tau, \varepsilon)$ и $B(\tau, \varepsilon)$ строим в форме рядов

$$\widetilde{K} = K + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k K^{[k]}, \qquad B = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k B_k \tag{2.5}$$

где

$$K = (K_{(m_1)},\ K_{(\alpha)},\ K_{(n)}),\quad K^{[k]} = (K^{[k]}_{(m_1)},\ K^{[k]}_{(\alpha)},\ K^{[k]}_{(n)})$$

Тогда система уравнений (1.5) распадается на следующие подсистемы:

$$(A + HB - \mu_0 E)\,\widetilde{K}_{(m_1)}\chi_1(t) = \varepsilon\frac{d\widetilde{K}_{(m_1)}}{d\tau}\chi_1 + \widetilde{K}_{(m_1)}\frac{d\chi_1}{dt}$$

$$(A + HB)\,\widetilde{K}_{(\alpha)}\chi_2(t) = \varepsilon\frac{d\widetilde{K}_{(\alpha)}}{d\tau}\chi_2 + \widetilde{K}_{(\alpha)}\frac{d\chi_2}{dt}$$

$$(A + HB)\,\widetilde{K}_{(n)} = \widetilde{K}_{(n)}\Lambda_1 + \varepsilon\frac{d\widetilde{K}_{(n)}}{d\tau}$$

или соответственно [8] (стр. 169):

$$(A + HB - \mu_0 E)\,\widetilde{K}_{(m_1)} = \widetilde{K}_{(m_1)}\Gamma_{m_1} + \varepsilon\frac{d\widetilde{K}_{(m_1)}}{d\tau} \tag{2.6}$$

$$(A + HB)\,\widetilde{K}_{(\alpha)} = \widetilde{K}_{(\alpha)}\Gamma_{m_1} + \varepsilon\frac{d\widetilde{K}_{(\alpha)}}{d\tau} \tag{2.7}$$

$$(A + HB)\,\widetilde{K}_{(n)} = \widetilde{K}_{(n)}\Lambda_1 + \varepsilon\frac{d\widetilde{K}_{(n)}}{d\tau} \tag{2.8}$$

Приравнивая в (2.6), (2.7), (2.8) члены, содержащие ε в одинаковых степенях, получим:

$$(A - \mu_0 E + HB_0)\,K_{(m_1)} = K_{(m_1)}\Gamma_{m_1} \tag{2.9}$$

$$(A - \mu_0 E + HB_0)\,K^{[k]}_{(m_1)} + HB_k K_{(m_1)} = K^{[k]}_{(m_1)}\Gamma_{m_1} + D^{[k-1]}_{(m_1)} \tag{2.9'}$$

$$(A + HB_0)\,K_{(\alpha)} = K_{(\alpha)}\Gamma_{m_1} \tag{2.10}$$

$$(A + HB_0)\,K^{[k]}_{(\alpha)} + HB_k K_{(\alpha)} = K^{[k]}_{(\alpha)}\Gamma_{m_1} + D^{[k-1]}_{(\alpha)} \tag{2.10'}$$

$$(A + HB_0)\,K_{(n)} = K_{(n)}\Lambda_1 \tag{2.11}$$

$$(A + HB_0)\,K^{[k]}_{(n)} + HB_k K_{(n)} = K^{[k]}_{(n)}\Lambda_1 + D^{[k-1]}_{(n)} \tag{2.11'}$$

$$D^{[k-1]}_{(m_1)} = -H\sum_{i=1}^{k-1} B_i K^{[k-i]}_{(m_1)} + \frac{dK^{[k-1]}_{(m_1)}}{d\tau} \tag{2.9''}$$

$$D^{[k-1]}_{(\alpha)} = -H\sum_{i=1}^{k-1} B_i K^{[k-i]}_{(\alpha)} + \frac{dK^{[k-1]}_{(\alpha)}}{d\tau} \tag{2.10''}$$

$$D^{[k-1]}_{(n)} = -H\sum_{i=1}^{k-1} B_i K^{[k-i]}_{(n)} + \frac{dK^{[k]}_{(n)}}{d\tau} \tag{2.11''}$$

Из (2.9), (2.10), (2.11) следует

$$(A + HB_0) = K \operatorname{diag}(J(\mu_0),\ \Gamma_{m_2},\ \Lambda_1) M = K_{(m_1)} J(\mu_0) M_{(m_1)} + \\ + K_{(\alpha)} \Gamma_{m_2} M_{(\alpha)} + K_{(n)} \Lambda_1 M_{(n)} \tag{2.12}$$

Пользуясь соотношениями, приведенными в [8] (стр. 115, 224), последнее равенство можно представить в виде

$$(A + HB_0 - \mu_0 E) = K_{(m_1)} \Gamma_{m_1} M_{(m_1)} + K_{(\alpha)} J_{m_2}(-\mu_0) M_{(\alpha)} + \\ + K_{(n)} (\Lambda_1 - \mu_0 E_{m_3}) M_{(n)} \tag{2.13}$$

где

$$M = K^{-1} = \begin{pmatrix} M_{(m_1)} \\ M_{(\alpha)} \\ M_{(n)} \end{pmatrix}$$

Соотношение (2.12) показывает, что K есть матрица преобразования матрицы $(A + HB_0)$ к нормальной форме Жордана $J(\lambda)$ в случае, когда все собственные значения матрицы $(A + HB_0)$ суть

$$\mu_0, \ldots, \mu_0; \quad 0, \ldots, 0; \quad \mu_1, \ldots, \mu_{m_3}$$

Построение матрицы B_0 из условия равенства собственных значений матрицы $(A + HB_0)$ заданным числам в случае многомерного управления может быть проведено по соотношениям, указанным в работе [9].

При этом в соответствии с (2.9), (2.10), (2.11) или с (2.12) столбцы матрицы K определяются равенствами

$$\begin{array}{lll}
(A + HB_0 - \mu_0 E) K_1 = 0, & (A + HB_0) K_{m_1+1} = 0, & (A + HB_0) K_{\alpha+1} = \mu_1 K_{\alpha+1} \\
(A + HB_0 - \mu_0 E) K_2 = K_1, & (A + HB_0) K_{m_1+2} = K_{m_1+1}, & (A + HB_0) K_{\alpha+2} = \mu_2 K_{\alpha+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(A + HB_0 - \mu_0 E) K_{m_1} = K_{m_1-1}; & (A + HB_0) K_{\alpha} = K_{\alpha-1}; & (A + HB_0) K_n = \mu_{m_3} K_n
\end{array} \tag{2.14}$$

Перейдем теперь к построению $K^{[k]}$ и B_k, $k = 1, 2, \ldots$. k-е равенство (2.9′) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned}
(A - \mu_0 E + HB_0) K_1^{[k]} + HB_k K_1 &= D_1^{[k-1]} \\
(A - \mu_0 E + HB_0) K_2^{[k]} + HB_k K_2 &= K_1^{[k-1]} + D_2^{[k-1]} \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\
(A - \mu_0 E + HB_0) K_{m_1}^{[k]} + HB_k K_{m_1} &= K_{m_1-1}^{[k]} + D_{m_1}^{[k-1]}
\end{aligned}$$

Умножим полученные равенства слева соответственно на E_n, $(A - \mu_0 E + HB_0), \ldots, (A - \mu_0 E + HB_0)^{m_1-1}$ и после сложения, преобразуя с учетом (2.13), получим

$$W = \begin{pmatrix} B_k K_1 \\ B_k K_2 \\ \vdots \\ B_k K_{m_1} \end{pmatrix} = M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \tag{2.15}$$

где

$$d_1^{[k-1]} = D_1^{[k-1]} + (A + HB_0 - \mu_0 E) D_2^{[k-1]} + \\ + \cdots + (A + HB_0 - \mu_0 E)^{m_1 - 1} D_{m_1}^{[k-1]} \tag{2.15'}$$

$$W = \begin{Vmatrix} M_1 H & M_2 H & M_3 H & \cdots & M_{m_1} H \\ M_2 H & M_3 H & M_4 H & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ M_{m_1-2} H & M_{m_1-1} H & M_{m_1} H & \cdots & 0 \\ M_{m_1-1} H & M_{m_1} H & 0 & \cdots & 0 \\ M_{m_1} H & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.15''}$$

Из условия управляемости следует, что [5]

$$\sum_{i=1}^{m} | M_{m_1} H_i | \neq 0 \tag{2.16}$$

В общем случае система (2.15) может быть и несовместной, но всегда имеет одно и только одно наилучшее приближенное решение (по методу наименьших квадратов) [10].

В силу условия (2.16) решение системы (2.15), представленное псевдообратной матрицей W^+, имеет вид

$$\begin{pmatrix} B_k K_1 \\ B_k K_2 \\ \vdots \\ B_k K_{m_1} \end{pmatrix} = W^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \tag{2.17}$$

Здесь $W^+ = W^* (W W^*)^{-1}$, W^* — сопряженная W матрица.
Если обозначим

$$W^+ = \begin{pmatrix} W_1^+ \\ W_2^+ \\ \vdots \\ W_{m_1 m}^{+} \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} b_1^{[k]} \\ b_2^{[k]} \\ \vdots \\ b_m^{[k]} \end{pmatrix}$$

то (2.17) можно записать в следующем виде:

$$\left\|\begin{matrix}\begin{pmatrix} b_1^{[k]} \\ b_2^{[k]} \\ \vdots \\ b_m^{[k]} \end{pmatrix} K_1 \\ \begin{pmatrix} b_1^{[k]} \\ b_2^{[k]} \\ \vdots \\ b_m^{[k]} \end{pmatrix} K_2 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} b_1^{[k]} \\ b_2^{[k]} \\ \vdots \\ b_m^{[k]} \end{pmatrix} K_{m_1} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} W_1^+ \\ W_2^+ \\ \vdots \\ W_m^+ \\ W_{m+1}^+ \\ W_{m+2}^+ \\ \vdots \\ W_{m+m}^+ \\ \vdots \\ W_{(m_1-1)m+1}^+ \\ W_{(m_1-1)m+2}^+ \\ \vdots \\ W_{(m_1-1)m+m}^+ \end{matrix}\right\| M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \tag{2.18}$$

Из (2.18) следует вид для «растянутой» матрицы

$$B_k^- = (b_1^{[k]}, b_2^{[k]}, \ldots, b_m^{[k]})$$

в следующем виде:

$$(b_1^{[k]}, b_2^{[k]}, \ldots, b_m^{[k]}) \begin{pmatrix} (K_1, K_2, \ldots, K_{m_1}) & & 0 \\ & (K_1, K_2, \ldots, K_{m_1}) & \\ & & \ddots \\ 0 & & (K_1, K_2, \ldots, K_{m_1}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} = (W_1^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, W_{m+1}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, \ldots, W_{(m_1-1)m+1}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}; \\ W_2^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, W_{m+2}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, \ldots, W_{(m_1-1)m+2}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}; \ldots; \\ W_m^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, W_{m+2}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, \ldots, W_{(m_1-1)m+m}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Преобразуя (2.10′), как (2.9′), получим

$$\Omega \begin{pmatrix} B_k K_{m_1+1} \\ B_k K_{m_1+2} \\ \vdots \\ B_k K_{m_1+m_2} \end{pmatrix} = M_{(m_1+m_2)} d_2^{[k-1]} \tag{2.20}$$

где

$$d_2^{[k-1]} = D_{m_1+1}^{[k-1]} + (A + HB_0) D_{m_1+2}^{[k-1]} + \cdots + (A + HB_0)^{m_2-1} D_{m_1+m_2}^{[k-1]} \tag{2.20′}$$

Ω — матрица порядка $m_2 \times m_2 m$, имеющая вид

$$\Omega = \left\|\begin{matrix} M_{m_1+1}H & M_{m_1+2}H & M_{m_1+3}H & \cdots & M_{m_1+m_2}H \\ M_{m_1+2}H & M_{m_1+3}H & M_{m_1+4}H & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\;\vdots\;\vdots & \vdots \\ M_{m_1+m_2-2}H & M_{m_1+m_2-1}H & M_{m_1+m_2}H & \cdots & 0 \\ M_{m_1+m_2-1}H & M_{m_1+m_2}H & 0 & \cdots & 0 \\ M_{m_1+m_2}H & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right\| \tag{2.20″}$$

$$\sum_{i=1}^{m} |M_{m_1+m_2}H_i| \neq 0 \text{ (из условия управляемости)}. \tag{2.21}$$

В силу условия (2.21) равенство (2.20) решаем посредством псевдообратной матрицы Ω^+.

$$\begin{pmatrix} B_k K_{m_1+1} \\ B_k K_{m_1+2} \\ \vdots \\ B_k K_{m_1+m_2} \end{pmatrix} = \Omega^+ M_{(m_1+m_2)} d_2^{[k-1]} \tag{2.22}$$

здесь $\Omega^+ = \Omega(\Omega\Omega^*)^{-1}$, Ω^* — сопряженная Ω матрица,

$$\Omega^+ = \begin{pmatrix} \Omega_1^+ \\ \vdots \\ \Omega_{m_1 m}^+ \end{pmatrix}$$

Из (2.22) получается аналогия (2.19)

$$(b_1^{[k]}, b_2^{[k]}, \dots, b_m^{[k]}) \begin{pmatrix} (K_{m_1+1}, K_{m_1+2}, \dots, K_{m_1+m_2}) & & 0 \\ & (K_{m_2+1}, K_{m_1+2}, \dots, K_{m_1+m_2}) & \\ & & \vdots \\ 0 & & (K_{m_1+1}, K_{m_1+2}, \dots, K_{m_1+m_2}) \end{pmatrix} =$$

$$= (\Omega_1^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]},\ \Omega_{m+1}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}, \dots, \Omega_{(m_1-1)m+1}^+;$$

$$\Omega_2^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]},\ \Omega_{m+2}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}, \dots, \Omega_{(m_2-1)m+2}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}; \dots;$$

$$\Omega_m^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}, \Omega_{m+m}^+ d_2^{[k-1]}, \dots, \Omega_{(m_1-1)m+m}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}) \tag{2.23}$$

Преобразуя равенство (2.11′), получим

$$\operatorname{diag}(J(\mu_0), \Gamma_{m_2}, \Lambda_1)\, Q_{(n)}^{[k]} + MHB_k K_{(n)} = Q_{(n)}^{[k]} \Lambda_1 + MD_{(n)}^{[k-1]} \tag{2.24}$$

где

$$Q_{(n)}^{[k]} = MK_{(n)}^{[k]} = (Q_{\alpha+1}^{[k]}, \dots, Q_n^{[k]}),\ Q_\sigma^{[k]} = \begin{pmatrix} q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{n\sigma}^{[k]} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha = m_1 + m_2 \\ \sigma = \alpha + 1, \dots, n \end{matrix}$$

Система (2.24) распадается на следующие подсистемы:

$$\operatorname{diag}(J(\mu_\sigma), \Gamma_{m_2}, \Lambda_1)\, Q_\sigma^{[k]} + MHB_k K_\sigma = \mu_\sigma Q_\sigma^{[k]} + MD_\sigma^{[k-1]} \tag{2.25}$$

$$\sigma = \alpha + i,\ i = 1, 2, \dots, m_3,\ \mu_\sigma = \mu_{\alpha+i} = \mu_i$$

Представим матрицу $Q_\sigma^{[k]}$ в блочном виде

$$Q_\sigma^{[k]} = (q_{1\sigma}^{[k]}, \dots, q_{m_1\sigma}^{[k]};\ q_{m_1+1,\sigma}^{[k]}, \dots, q_{\alpha\sigma}^{[k]};\ q_{\alpha+1,\sigma}^{[k]}, \dots, q_{n\sigma}^{[k]})'$$

(штрих означает транспонирование), тогда (2.25) распадается на следующие подсистемы:

$$J_{m_1}(\mu_0)\begin{pmatrix} q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{m_1\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(m_1)}HB_kK_\sigma = \mu_\sigma \begin{pmatrix} q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{m_1\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(m_1)}D_\sigma^{[k-1]} \quad (2.25')$$

$$\Gamma_{m_2}\begin{pmatrix} q_{m_1+1,\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{m_1+m_2,\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(m_1+m_2)}HB_kK_\sigma = \mu_\sigma \begin{pmatrix} q_{m_1+1,\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{m_1+m_2,\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(m_1+m_2)}D_\sigma^{[k-1]} \quad (2.25'')$$

$$\Delta_1\begin{pmatrix} q_{\alpha+1,\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{n\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(n)}HB_kK_\sigma = \mu_\sigma \begin{pmatrix} q_{\alpha+1,\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{n\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} + M_{(n)}D_\sigma^{[k-1]} \quad (2.25''')$$

Решение системы (2.25''') приведено в [5], где показано, что равенство (2.25''') распадается на m_3^2 алгебраических уравнений

$$\mu_s q_{s\sigma}^{[k]} + M_s HB_kK_\sigma = \mu_\sigma q_{s\sigma}^{[k]} + M_s D_\sigma^{[k-1]} \quad (2.26)$$

$$\mu_\sigma = \mu_{\alpha+i} = \mu_i; \quad \sigma = \alpha + 1,\dots, n; \quad s = \alpha + 1,\dots, n; \quad i = 1, 2,\dots, m_3$$

При $s = \sigma$ имеем

$$M_\sigma HB_kK_\sigma = M_\sigma D_\sigma^{[k-1]} \quad (2.27)$$

Из условия управляемости следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{m} |M_\sigma H_\nu| \neq 0, \quad \sigma = \alpha + 1,\dots, n \quad (2.28)$$

В силу (2.28) из (2.27) следует [5]

$$(b_1^{[k]}, b_2^{[k]},\dots, b_m^{[k]})\begin{pmatrix} (K_{\alpha+1}, K_{\alpha+2},\dots, K_n) & & 0 \\ & (K_{\alpha+1}, K_{\alpha+2},\dots, K_n) & \\ & & \vdots \\ 0 & & (K_{\alpha+1}, K_{\alpha+2},\dots, K_n) \end{pmatrix} =$$

$$= (M_{\alpha+1}D_{\alpha+1}^{[k-1]}, M_{\alpha+2}D_{\alpha+2}^{[k-1]},\dots, M_nD_n^{[k-1]})F^+ \quad (2.29)$$

Здесь [5]

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}, \quad F_\nu = \mathrm{diag}\,(M_{\alpha+1}H_\nu,\dots, M_nH_\nu), \quad \nu = 1, 2,\dots, m$$

$F^+ = (F^*F)^{-1}F^*$, F^* — сопряженная F-матрица.

Объединяя выражения (2.19), (2.23), (2.29) в одно матричное соотношение и разрешая относительно $(b_1^{[k]}, b_2^{[k]},\dots, b_m^{[k]})$, получим

$$(b_1^{[k]}, b_2^{[k]},\dots, b_m^{[k]}) = [W_1^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]}, W_{m+1}^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]},\dots, W_{(m_1-1)m+1}^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]}$$

$$W_2^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]}, W_{m+2}^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]},\dots, W_{(m_1-1)m+2}^+M_{(m_1)}d_1^{[k-1]};\dots;$$

$$W_m^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]},\ W_{m+m}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, \dots,\ W_{(m_1-1)m+m}^+ M_{(m_1)} d_1^{[k-1]};$$

$$\Omega_1^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]},\ \Omega_{m+1}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}, \dots,\ \Omega_{(m_2-1)m+1}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]};$$

$$\Omega_2^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]},\ \Omega_{m+2}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}, \dots,\ \Omega_{(m_2-1)m+2}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}; \dots; \tag{2.30}$$

$$\Omega_m^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]},\ \Omega_{m+m}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]}, \dots,\ \Omega_{(m_2-1)m+m}^+ M_{(\alpha)} d_2^{[k-1]};$$

$$(M_{\alpha+1} D_{\alpha+1}^{[k-1]},\ M_{\alpha+2} D_{\alpha+2}^{[k-1]}, \dots,\ M_n D_n^{[k-1]})\, F^+]\, \mathrm{diag}\,(M, M, \dots, M)$$

Подставим выражения $(A + HB_0 - \mu_0 \mathrm{E})$ и $B_k(K_1, \dots, K_{m_1})$ из (2.13) и (2.18) в (2.9′), затем умножая полученное равенство слева на матрицу M, имеем:

$$\mathrm{diag}\,(\Gamma_{m_1}, J(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 \mathrm{E}_{m_2})\, Q_{(m_1)}^{[k]} +$$

$$+ MH \left[\begin{pmatrix} W_1^+ \\ W_2^+ \\ \vdots \\ W_m^+ \end{pmatrix} M_{(m_1)} d_1^{[k-1]},\ \begin{pmatrix} W_{m+1}^+ \\ W_{m+2}^+ \\ \vdots \\ W_{m+m}^+ \end{pmatrix} M_{(m_1)} d_1^{[k-1]}, \dots, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} W_{(m_1-1)m+1}^+ \\ W_{(m_1-1)m+2}^+ \\ \vdots \\ W_{(m_1-1)m+m}^+ \end{pmatrix} M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \right] = Q_{(m_1)}^{[k]} \Gamma_{m_1} + M D_{(m_1)}^{[k-1]}$$

здесь

$$Q_{(m_1)}^{[k]} = M K_{(m_1)}^{[k]} = (Q_1^{[k]}, \dots, Q_{m_1}^{[k]}),\quad Q_\sigma^{[k]} = \begin{pmatrix} q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{n\sigma}^{[k]} \end{pmatrix},\ \sigma = 1, 2, \dots, m_1$$

Из полученного равенства нетрудно получить соотношения, последовательно определяющие столбцы матрицы $Q_{(m_1)}^{[k]}$

$$\mathrm{diag}\,(\Gamma_{m_1}, J(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 \mathrm{E}_{m_2})\, Q_1^{[k]} = M \left[D_1^{[k-1]} - H \begin{pmatrix} W_1^+ \\ W_2^+ \\ \vdots \\ W_m^+ \end{pmatrix} M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \right] \tag{2.31}$$

$$\mathrm{diag}\,\Gamma_{m_1}, J(-\mu_0), \Lambda_1 - \mu_0 \mathrm{E}_{m_2})\, Q_\sigma^{[k]} = Q_{\sigma-1}^{[k]} +$$

$$+ M \left[D_\sigma^{[k-1]} - H \begin{pmatrix} W_{(\sigma-1)m+1}^+ \\ W_{(\sigma-1)m+2}^+ \\ \vdots \\ W_{(\sigma-1)m+m}^+ \end{pmatrix} M_{(m_1)} d_1^{[k-1]} \right] \tag{2.32}$$

$$\sigma = 2, 3, \dots, m_1$$

Равенство (2.31) однозначно определяет все элементы первого столбца матрицы $Q^{[k]}_{(m_1)}$, кроме первого элемента $q^{[k]}_{11}$. В выборе этого элемента также, как и в выборе остальных элементов первой строки матрицы $Q^{[k]}_{(m_1)}$, сохраняется известный произвол. От функций $q^{[k]}_{1\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, m_1)$ требуется лишь дифференцируемость любое нужное число раз. Остальные столбцы матрицы $Q^{[k]}_{(m_1)}$ определяются равенствами (2.32).

С матрицей $Q^{[k]}_{(m_1)}$ матрица $K^{[k]}_{(m_1)}$ связана соотношением

$$K^{[k]}_{(m_1)} = KQ^{[k]}_{(m_1)} \tag{2.33}$$

Теперь подставляя выражения $(A + HB_0)$ и $B_k\,(k_{m_1+1}, \ldots, k_{m_1+m_2})$ из (2.12) и (2.22) в (2.10′), преобразуя как (2.9′), находим

$$\operatorname{diag}\,(J_{m_2}(\mu_0),\ \Gamma_{m_2},\ \Lambda_1)\,Q^{[k]}_{m_1+1} = M\left[D^{[k-1]}_{m_1+1} - H\begin{pmatrix}\Omega_1^+\\ \Omega_2^+\\ \vdots\\ \Omega_m^+\end{pmatrix}M_{(\sigma)}d_\sigma^{[k-1]}\right] \tag{2.34}$$

$$\operatorname{diag}\,(J_{m_2}(\mu_0),\ \Gamma_{m_2},\ \Lambda_1)\,Q^{[k]}_\sigma = Q^{[k]}_{\sigma-1} + M\left[D^{[k-1]}_\sigma - H\begin{pmatrix}\Omega^+_{(\sigma-1)m+1}\\ \Omega^+_{(\sigma-1)m+2}\\ \vdots\\ \Omega^+_{(\sigma-1)m+m}\end{pmatrix}M_{(\sigma)}d_\sigma^{[k-1]}\right] \tag{2.35}$$

Здесь

$$Q^{[k]}_{(\sigma)} = MK^{[k]}_{(\sigma)} = (Q^{[k]}_{m_1+1}, \ldots, Q^{[k]}_{m_1+m_2}), \qquad Q^{[k]}_\sigma = \begin{pmatrix} q^{[k]}_{1\sigma}\\ \vdots\\ q^{[k]}_{n\sigma}\end{pmatrix}$$

$$\sigma = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2$$

Равенство (2.34) однозначно определяет все элементы первого столбца матрицы $Q^{[k]}_{(m_1+m_2)}$, кроме $(m_1 + 1)$-го элемента. В выборе этого элемента также, как и в выборе остальных элементов $(m_1 + 1)$-ой строки матрицы $Q^{[k]}_{(m_1+m_2)}$, сохраняется известный произвол. От функций $q^{[k]}_{m_1+1,\,\sigma}$ $(\sigma = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2)$ требуется лишь дифференцируемость любое нужное число раз. Остальные столбцы матрицы $Q^{[k]}_{(m_1+m_2)}$ представляются равенствами (2.35).

С $Q^{[k]}_{(m_1+m_2)}$ матрица $K^{[k]}_{(m_1+m_2)}$ связана соотношением

$$K^{[k]}_{(m_1+m_2)} = KQ^{[k]}_{(m_1+m_2)} \tag{2.36}$$

Из статьи [5] имеем, что

$$B_k K_\sigma = \begin{pmatrix}(M_\sigma H_1)^*\\ (M_\sigma H_2)^*\\ \vdots\\ (M_\sigma H_m)^*\end{pmatrix}\frac{M_\sigma D_\sigma^{[k-1]}}{\sum\limits_{i=1}^{m} |M_\sigma H_i|^2}, \qquad (\sigma = \alpha + 1, \ldots, n) \tag{2.37}$$

При $\sigma \neq s$ из (2.26) с учетом (2.37) имеем

$$q_{s\sigma}^{[k]} = \frac{M_s}{\mu_s - \mu_\sigma} P_\sigma, \quad (\sigma \neq s;\ \sigma,\ s = \alpha + 1, \ldots, n) \tag{2.38}$$

где

$$P_\sigma = \left[E_n - H \begin{pmatrix} (M_\sigma H_1)^* \\ (M_\sigma H_2)^* \\ \vdots \\ (M_\sigma H_m)^* \end{pmatrix} \frac{M_\sigma}{\sum\limits_{i=1}^{m} | M_\sigma H_i |^2} \right] D_\sigma^{[k-1]}$$

Подставим (2.37) в (2.25′) и (2.25″). Учитывая, что $[J_{m_1}(\mu_0) - \mu_\sigma E_{m_1}]$ и $J_{m_2}(-\mu_\sigma)$ — невырожденные матрицы (см. усл. (1.4)), имеем

$$\begin{pmatrix} q_{1\sigma}^{[k]} \\ q_{2\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{m_1\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} = [J_{m_1}(\mu_0) - \mu_\sigma E_{m_1}]^{-1} M_{(m_1)} P_\sigma, \quad (\sigma = \alpha + 1, \ldots, n) \tag{2.39}$$

$$\begin{pmatrix} q_{m_1+1,\sigma}^{[k]} \\ q_{m_1+2,\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ q_{\alpha,\sigma}^{[k]} \end{pmatrix} = [J_{m_2}(-\mu_\sigma)]^{-1} M_{(m_1+m_2)} P_\sigma, \quad (\sigma = \alpha + 1, \ldots, n) \tag{2.40}$$

Следовательно, столбцы матрицы $Q_{(n)}^{[k]} = MK_{(n)}^{[k]}$ определяются равенствами (2.38), (2.39), (2.40), кроме элементов $q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ $(\sigma = \alpha + 1, \ldots, n)$.

От функций $q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ требуется дифференцируемость любое нужное число раз. С матрицей $Q_{(n)}^{[k]}$ матрица $K_{(n)}^{[k]}$ связана соотношением

$$K_{(n)}^{[k]} = KQ_{(n)}^{[k]} \tag{2.41}$$

Из равенств (2.33), (2.36), (2.41) следует

$$K^{[k]} = KQ^{[k]} \tag{2.42}$$

где

$$Q^{[k]} = (Q_{(m_1)}^{[k]},\ Q_{(m_1+m_2)}^{[k]},\ Q_{(n)}^{[k]})$$

Таким образом, соотношения (2.14), (2.30), (2.42) позволяют определить формальные разложения $\widetilde{K}$ и B. Сохраняя в этих формальных разложениях конечное число первых членов, можно получить приближенные выражения для матрицы $\widetilde{K}$ и B.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 19 III 1979

Ֆ. Պ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ՈՉ-ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ՆԱԽԱՊԵՍ ՏՐՎԱԾ ՍՊԵԿՏՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է Բազմաչափ կառավարումով սիստեմների սինթեզի խնդիր նախապես տրված սպեկտրով այն դեպքում, երբ նախապես տրված ֆունկցիաներից մի քանիսը նույնաբար հավասար են զրոյի, մի քանիսը համընկնում են միմյանց հետ և տարբեր են զրոյից, իսկ մնացածները տարբեր են նշված ֆունկցիաներից և նրանց տարբերությունների մոդուլները փոքր չեն, քան որևէ դրական հաստատուն մեծությունը։

SYNTHESIS OF NON-STATIONARY SYSTEMS WITH A PRE-SPECIFIED SPECTRUM

F. P. GRIGORIAN

S u m m a r y

The problem of a controleable polydimensional synthesis of systems with a pre-specified spectrum in the case, where some of the given functions are identically equal to zero, some coinside with each other and are different from zero, the rest differ from the above two cases, and the moduli of their differences are not less than any given positive constant value.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов В. И.* Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л., «Судостроение», 1966.
2. *Wonham W. M.* On Pole Assignment in Multi Input Controllable Linear Systems. IEEE. Trans. Automatic Control, December, 1967, vol. AC—12, p.p. 660—665.
3. *Гальперин Е. А.* Синтез линейных управлений в стационарной линейной системе. Изв. АН СССР, «Техническая кибернетика», 1968, № 4.
4. *Davison E. Y.* On Pole Assignment in Multivariable Linear Systems. IEEE, Trans. Automatic Control, December, 1968, vol. AC—13, p.p. 747.
5. *Абгарян К. А.* Один подход к решению задач анализа и синтеза линейных систем. Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 5.
6. *Абгарян К. А., Григорян Ф. П.* К синтезу линейных нестационарных систем. Методы теории дифференциальных уравнений и их приложения. М., Тр. МАИ,1977, вып. 419.
7. *Анжело Г. Д.* Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез. М., «Машиностроение», 1974.
8. *Абгарян К. А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М., «Наука», 1973.
9. *Кириченко Н. Ф.* Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения. Изд-во Киевского университета, 1972.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1967.