ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 5, 1979 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, Л. А. МОВСИСЯН

# К ВОПРОСУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ПЛАСТИНКАХ

Рассматривается распространение квазимонохроматических волн произвольного вида в нелинейной диспергирующей среде. В качестве примера изучаются изгибные колебания пластинки со степенным законом физической нелинейности. Общий подход к изучению указанных процессов дан в работах [1—3]. Учет эффектов дисперсии для продольных колебаний стержней дается в работе [4]. Исследованию нелинейных процессов в волновой области в недиспергирующих упругих средах посвящены работы [5—7]. В данной статье для изгибых колебаний пластинки проводится конкретизация коэффициентов в уравнениях для медленных модуляций амплитуд и фаз, полученных в работе [8]. Получены условия устойчивости волн, решение для сходящихся пучков [9], в том числе и решение вблизи каустики. Дана постановка типично дифракционной нелинейной задачи.

1. Предполагается, что решение заданного нелинейного уравнения, описывающего рассматриваемый физический процесс, является квазимонохроматической волной, то есть в общем случае записывается в виде $w = \psi e^{i\bar{\tau}}$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 - \omega t$ — эйконал для основной волны, относительно которой имеются малые модуляции. В немодулированной задаче значение комплексной амплитуды $\psi = K(x, y, z, t)$, где $K$ есть заданная функция, называется по аналогии с геометрической оптикой лучевым решением. Поскольку в окрестности волны решение может быть существенно трехмерным, например, в задаче об узких пучках лучей и в дифракционных задачах, удобно ввести лучевые координаты $t$, $\bar{\tau}$, $\theta$, $\xi$, где $t$ — характерное время, $\theta$ и $\xi$ — лучевые координаты. При этом в силу произвола выбора поверхностей $\theta = \mathrm{const}$ и $\xi = \mathrm{const}$ можно выбрать их линии пересечения с волной $\bar{\tau} = \mathrm{const}$ ортогональными и обозначать их соответственно через линии, вдоль которых отсчитываются координаты $y$ и $z$. Поэтому можно записать вдоль указанных линий $dy = H_2 d\theta$ и $dz = H_3 d\xi$, где $H_2$ и $H_3$ — параметры Ламе.

В работе [8] для диспергирующей, слабо нелинейной среды получено нелинейное уравнение Шредингера для медленных модуляций комплексной амплитуды волны

$$i\Delta_\omega \frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{\bar{\tau}} - \frac{1}{2}\Gamma\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{\tau}^2} + \Lambda\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{\tau}\partial y} + \Lambda_1\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{\tau}\partial z} + \frac{1}{2}\Delta_\alpha\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\right)\psi - i\Delta_\omega\psi\frac{d\ln K}{dt} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_{a=0}|\psi|^2\psi \quad (1.1)$$

Здесь $\Delta(\alpha, \beta, \gamma, \omega) = 0$ есть дисперсионное соотношение соответствующей линейной задачи, которое в дальнейшем для удобства выбирается в виде

$$\Delta = \omega - \omega_0(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \tag{1.2}$$

$\xi = \mathrm{const}$ дает уравнение лучей, $\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\xi=\mathrm{const}} = \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\Delta_{\alpha_i}}{\Delta_\omega}$ и $\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\Delta_{\alpha_i}}{\Delta_\omega}(\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \beta,\ \alpha_3 = \gamma)$.

В нелинейной задаче предполагается выполненным нелинейное дисперсионное соотношение

$$\omega = \omega_0(\alpha, \beta, \gamma) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 \tag{1.3}$$

которое можно получить из вариационного принципа для осредненного лагранжиана

$$\frac{\partial L}{\partial a^2} = 0, \quad L = a^2\Delta + \frac{a^4}{2}G(\alpha, \beta, \gamma, \omega) \tag{1.4}$$

Поскольку рассматривается окрестность заданной волны $\bar\tau = \mathrm{const}$, то все коэффициенты в уравнении (1.1), включая $K$, помимо несущей частоты $\omega$, могут зависеть лишь от $t$, так как для неособых участков волны решение определяется переменными $t$ и $\bar\tau$, а для вышеуказанных участков двух или трехмерности решения указанные коэффициенты можно вычислить для фиксированного луча, от точки пересечения которого с волной $\bar\tau = \mathrm{const}$ производится отсчет координат $y$ и $z$. Причем, в неподвижной системе координаты $x_i$ на указанном луче зависят только от $t$. Впрочем, далее рассматривается пример задачи, в которой $K$ зависит и от координаты $y$, тогда в (1.1) следует считать $\frac{dK}{dt} = \left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{x_i} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\Delta_{\alpha_i}}{\Delta_\omega}$.

Отметим, что вытекающее из (1.2) соотношение $\alpha = \alpha(\beta, \gamma, \omega)$ вычисляется в системе подвижного трехгранника $x, y, z$, где ось $x$ направлена по нормали к волне $\bar\tau = \mathrm{const}$, $dx = H_1 d\bar\tau$, $H_1$ — параметр Ламе.

Как показано в [8], имеет место*

$$\Gamma = -\Delta_\omega\alpha^2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2} = -\alpha_k\alpha_j\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_k\partial\alpha_j}$$

$$\Lambda = \alpha\Delta_\omega\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\beta}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_k\partial\alpha_j}\left(\alpha_j\frac{\partial\theta}{\partial x_k} + \alpha_k\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right) \tag{1.5}$$

$$\Lambda_1 = \alpha\Delta_\omega\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\gamma\partial\alpha}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_k\partial\alpha_j}\left(\alpha_j\frac{\partial\xi}{\partial x_k} + \alpha_k\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\right)$$

* Первая группа написанных соотношений верна в подвижной системе координат, связанной с волной, а вторая — для неподвижной системы координат.

Согласно (1.2) $\Delta_0 = 1$. Полагая $\psi = a e^{i\varphi}$, где $a$ — действительная амплитуда, а $\varphi$ — фаза, можно из (1.1) получить уравнение для $a$ и $\varphi$. Поскольку для рассматриваемой здесь среды все коэффициенты являются действительными (кроме $i$), для двухмерной, не зависящей от $\xi$ и $\gamma$, задачи получится

$$\varphi_t|_\xi + \frac{1}{2}\Delta_2\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\varphi_y^2\right) - \frac{1}{2}\frac{\Delta_2}{a}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}a_{yy}\right) - \frac{\Gamma}{2a}(a\varphi_z^2 - a_{zz}) +$$

$$+ \frac{1}{a}\Lambda(a\varphi_z\varphi_y - a_{zy}) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_{a=0} a^2 = 0 \qquad (1.6)$$

$$(a^2)_t|_\xi - a^2\frac{d\ln K^2}{dt} + \Delta_2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}(a^2\varphi_y)_y - \Gamma(a^2\varphi_z)_z +$$

$$+ \Lambda\left[(a^2\varphi_z)_y + (a^2\varphi_y)_z\right] = 0$$

Вторые производные от $a$, которые отсутствуют в подходе нелинейной геометрической оптики, соответствуют дифракционному изменению профиля. Если эти члены отбросить и ввести обозначения $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = p$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = q$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = r$, получим систему гиперболических уравнений, характеристики которой следующие:

$$(\lambda + \Gamma n_z^2 - \Delta_2\alpha'' q n_y - \Lambda r n_y - \Lambda q n_z)^2 = a^2 Y\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$$

$$Y = -\Gamma n_z^2 + 2\Lambda n_z n_y + \Delta_2\alpha'' n_y^2 \qquad (1.7)$$

где $\lambda = -\frac{\partial F}{\partial t}$, $n_y = \frac{\partial F}{\partial y}$, $n_z = \frac{\partial F}{\partial z}$, $\alpha'' = \frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}$, а $F = 0$ есть уравнение характеристической поверхности.

Условие действительности характеристик имеет вид

$$Y\left(\frac{\partial\omega}{c a^2}\right)_0 > 0 \qquad (1.8)$$

откуда в линейном случае получается условие устойчивости волны.

В частности, для неособых участков волны, где $n_y$ мало, получается условие продольной устойчивости

$$\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0 \qquad (1.9)$$

Для типично дифракционных задач, или узких пучков, в $Y$ существенно последнее слагаемое, которое дает условие поперечной устойчивости

$$\Delta_2\alpha''\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0 \qquad (1.10)$$

Как видно из (1.10), поперечная устойчивость существенно зависит от знака кривизны дисперсионной кривой.

Для полных уравнений (1.6), которые уже не являются гиперболическими уравнениями, можно произвести линеаризацию относительно невозмущенного состояния, тогда условие устойчивости запишется в виде

$$Y^2 + 4a_0^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 Y > 0 \qquad (1.11)$$

что расширяет предыдущую область устойчивости и дает (1.8) или $-Y^2 < 4a_0^2 Y\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0.$

2. Пусть имеется нелинейно-упругая пластина, в которой распространяется квазимонохроматическая волна изгиба. Будем считать, что нелинейность материала характеризуется следующим образом: между интенсивностями напряжений и деформаций имеется степенная связь [10]

$$\sigma = Ae + Be^3 \qquad (2.1)$$

Для изгибных колебаний существенна лишь кубическая нелинейность, что заставило нас выбрать упругую связь (2.1); в то же время на этом простом варианте можно проследить общие закономерности модуляции волн.

Принимая несжимаемость материала пластинки и гипотезу недеформируемых нормалей, для лагранжиана будем иметь выражение

$$\begin{gathered} \overline{L} = \frac{1}{2}\rho h\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \frac{h^3}{18}\left(AL_1 + \frac{B}{10}h^2L_1^2\right) \\ L_1 = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 \end{gathered} \qquad (2.2)$$

Все параметры в (2.2) можно считать медленно меняющимися функциями координат на длине волны.

Для квазимонохроматической волны при получении нелинейного дисперсионного уравнения (1.4), ввиду малости амплитуд, можно полагать

$$w = a\cos\theta, \quad \theta = \alpha x + \beta y - \omega t \qquad (2.3)$$

где $\alpha$, $\beta$, $\omega$ — медленно изменяющиеся функции от $x$, $y$, $t$.

Подставляя (2.3) в (2.2) и введя осредненный лагранжиан

$$L = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{L}d\theta$$

получим

$$L = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\rho h a^2\omega^2 - \frac{a^2}{18}h^3(\alpha^2+\beta^2)^2\left[A + \frac{3}{80}Bh^2a^2(\alpha^2+\beta^2)^2\right]\right\} \qquad (2.4)$$

Согласно (1.4) и (2.4) с учетом малости $a$ получается следующее дисперсионное соотношение нелинейной задачи:

$$\omega = \frac{h}{3}(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\frac{A}{\rho}}\left[1+\frac{3}{40}\frac{B}{A}h^2a^2(\alpha^2+\beta^2)^2\right] \tag{2.5}$$

В линейной задаче дисперсионное соотношение

$$\Delta = \omega - \frac{h}{3}\sqrt{\frac{A}{\rho}}(\alpha^2+\beta^2)=0, \quad \omega=\omega_0(\alpha,\beta), \quad \alpha=\alpha(\beta,\omega_0) \tag{2.6}$$

дает

$$\Lambda=0, \quad \Lambda_1=0, \quad \Gamma=-2A_1(\alpha^2+\beta^2), \quad \alpha''=-\sqrt{\frac{A_1}{\omega_0}}, \quad A_1=\frac{h}{3}\sqrt{\frac{A}{\rho}}$$

Здесь учтено, что при получении уравнения (1.1) ось $x$ была направлена по нормали к волне, поэтому $\beta\approx 0$.

Поскольку знак $\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2}$ определяется знаком $B$, из (1.9) и (1.10) получается, что условия устойчивости $\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2}>0$ выполняются одновременно при $B>0$, то есть для нелинейных сред, близких к жидкости, а при $B<0$, то есть для обычных упругих сред, имеет место неустойчивость распространения. Первая среда будет дефокусирующей, а вторая — фокусирующей.

Для металлов отношение $\dfrac{3B}{A}\approx-10^5$, то есть имеет место неустойчивость согласно (1.10). Однако, по (1.11) можно найти диапазон амплитуд и волновых чисел, для которых уже будет иметь место устойчивость волнового движения

$$a_0^2<-\frac{20Ak_1^2}{9Bh^2k^6}$$

где $k=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, а $k_1$ — волновое число для возмущения.

Рассмотрим задачу о распространении узких пучков изгибных волн в пластинках.

В таком случае можно пренебречь вторыми производными функции $a$ в уравнениях (1.6), а также производными в продольном направлении. Тогда получится система уравнений, типичная для дифракционной задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial X}+\frac{1}{2}\varphi_y^2-\Omega b^2=0 \\ &\frac{\partial b^2}{\partial X}+(b^2\varphi_y)_y=0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\Omega = -K^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 / \Delta_1 \alpha'', \quad a = bK, \quad dX = \Delta_1 \alpha'' dt$$

Для полученных уравнений можно указать частное решение, задающее пучок, на границах которого $a = 0$, в виде

$$\varphi = \sigma(X) + \frac{1}{2}\frac{y^2}{R(x)} \tag{2.8}$$

Из (2.7) получится уравнение для $\sigma$ и $R$, причем, введя $\frac{1}{R} = \frac{f'}{f}$, можно записать

$$\frac{\sigma'}{\Omega} = \frac{b_0^2}{f}, \quad \frac{(f')^2}{f^2} + \left(\frac{f'}{f}\right)' = -\frac{4b_0^2\Omega}{y_0^2 f^2} \tag{2.9}$$

где $b_0$, $y_0$ — соответственно начальные амплитуда и ширина пучка. Если еще предполагать $\Omega = \text{const}$, то есть рассматривать немодулированную волну как плоскую и среду — однородной, то можно проинтегрировать (2.9) и получить точное решение [9]

$$b^2 = \frac{b_0^2}{f(x)}\left\{1 - \frac{y^2}{y_0^2 f^2(x)}\right\}$$

$$X = \left(\frac{1}{4\Omega}\right)^{1/2}\frac{y_0}{b_0}\left\{f^{1/2}(1-f)^{1/2} - \arcsin f^{1/2} + \frac{\pi}{2}\right\} \tag{2.10}$$

Точка фокуса лучей определится из условия $f(X) \to 0$, $X = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4\Omega}\right)^{1/2}\frac{y_0}{b_0}$.

Полученное решение верно для фокусирующей среды ($B < 0$).

Для одномерной задачи в диспергирующей среде, отбрасывая вторые производные от $a$, можно из (1.6) получить для изгибных волн систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 K^2 \frac{\partial b^2}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial b^2}{\partial t} - \Gamma\left(b^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial b^2}{\partial \tau}\right) = 0, \quad \varphi_\tau = u \tag{2.11}$$

При $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0$ полученная гиперболическая система имеет решение, характерное для уравнений газодинамики, и решение может опрокидываться, при этом следует в этой области удерживать отброшенные вторые производные от функции $a$ [3]. При $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$ среда является фокусирующей и амплитуда профиля решения имеет заострение [3].

Здесь представляют интерес следующие задачи:

а) одномерная задача изгиба бесконечной пластины с произвольными начальными условиями, в которой для больших моментов времени асимптотика решения представляет квазимонохроматическую волну. Тогда можно решить систему (2.11), взяв в качестве начальных условий асимптотику линейной задачи [2].

Пусть при $t = 0$

$$w = f(x)\, e^{ik_0 x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{2.12}$$

где $f(x)$ — медленно меняющаяся функция на длине волны $\left(\frac{2\pi}{k_0}\right)$. Решение задачи находится методом Фурье и имеет вид

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \left\{ e^{i[\alpha x + \omega(\alpha) t]} + e^{i[\alpha x - \omega(\alpha) t]} \right\} d\alpha$$

$$F = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{i(k_0 - \alpha)\xi}\, d\xi \tag{2.13}$$

Для больших $x$ и $t$ существенный вклад в решение дает окрестность стационарных точек

$$x \pm \omega'(\alpha_{1,2})\, t = 0 \tag{2.14}$$

поскольку

$$\omega = \pm A_1 \alpha^2, \qquad \alpha_{1,2} = \mp \frac{x}{2A_1 t}, \quad \omega_0 = \omega(\alpha_0)$$

Удерживая в разложении $\omega(\alpha)$ первые степени $\alpha - k_0$, получим

$$w = \frac{1}{2} f(\omega_0' t + x)\, e^{i(\omega_0 t + k_0 x)} + \frac{1}{2} f(x - \omega_0' t)\, e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \tag{2.15}$$

то есть начальные условия распадаются на две волны, амплитуды которых движутся с групповой скоростью.

Применяя метод стационарной фазы для четной $F(\alpha)$, из (2.13) получим

$$w = \frac{1}{\sqrt{\pi A_1 t}} F(\alpha_2) \cos\left(\frac{x^2}{2A_1 t} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.16}$$

Для решения нелинейных уравнений можно численно решать (2.7) при начальных условиях, взятых из (2.16).

Можно изучить также двумерную задачу, в которой имеются нулевые начальные условия, а граничные условия на крае пластинки следующие:

$$w = w_0\delta(x)\delta(t), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{2.17}$$

Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\beta_{1,2} = \sqrt{\pm A_1\omega - \alpha^2} \tag{2.18}$$

а решение записывается в таком виде

$$w = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{1,2} C_k e^{i(\alpha x + \beta_k y)}\, d\alpha \tag{2.19}$$

где согласно граничным условиям

$$C_1 = \frac{w_0}{2\pi}\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}, \quad C_2 = \frac{w_0}{2\pi}\frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \tag{2.20}$$

Стационарные точки находятся в виде

$$\beta_0 = \mp \frac{A_1 y}{t}, \quad \alpha_0 = \mp \frac{A_1 x}{t}, \quad \omega_0 = \pm \frac{A_1 r^2}{t^2}$$

Применение метода стационарной фазы к двойному интегралу приводит к решению

$$w = \frac{w_0}{2\pi}\frac{A_1 y}{t^2}\cos\frac{2A_1 r^2}{t} \tag{2.21}$$

Решения (2.16) и (2.21) не удовлетворяют одномерным по $t$, $\bar\tau$ уравнениям (1.6), где отброшен последний нелинейный член в первом уравнении и $\bar\tau = k_0 x - \omega_0 t$, что связано с характером (1.6), представляющих уравнения возмущений около заданной волны. Выражения (2.16) ($n = 1$) и (2.21) ($n = 2$) удовлетворяют полным уравнениям модуляции [2], которые для линейной задачи в приближении геометрической оптики имеют вид

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \omega'(\alpha)\frac{\partial a^2}{\partial x} + a^2\frac{\partial \omega'}{\partial x} + \frac{n-1}{t}a^2 = 0, \quad \frac{x}{t} = \omega'(\alpha),$$

причем по (2.16) и (2.21) $a = F_1(\alpha)/t^{n/2}$.

б) Одномерный изгиб при наличии начальных условий в форме квазимонохроматической волны с расстройкой амплитуды или волнового числа.

Для этой задачи следует решать (2.11) при заданных начальных условиях, причем здесь можно для обоих видов сред указать аналитическое решение [3].

в) Определение асимптотической картины распространения волн при падении на границу полубесконечной пластинки изгибных плоских волн. При этом если пластинка является полуплоскостью, имеем одномерную задачу, а при наличии выреза в форме угла получается дифракционная картина.

Вблизи дифракционных лучей, на которых находятся точки касания отраженных от сторон угла волн с точечной волной, линейное решение для произвольной среды записывается через интеграл Френеля [8]

$$w = \psi e^{i\omega\tau_1}, \quad \psi = \frac{1}{2\sigma \sqrt{k_1 - k_2}} K e^{\frac{p(\theta-\theta_0)^2}{2c_0(k_1-k_2)}} \left[1 \mp \Phi\left(\pm \frac{\sqrt{p}}{k}\right)\right] \tag{2.22}$$

верхние (нижние) знаки определяются знаком $\theta - \theta_0$, $\frac{1}{k} = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2c_0(k_1 - k_2)}}$, где $\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\xi} e^{-t^2} dt$, $k_1$, $k_2$ — кривизны точечной волны и начального положения отраженной от стороны угла волны, $p = i\omega$.

Для плоской падающей волны и рассматриваемой здесь среды получается $k_2 = 0$, $k_1 = [A_1 \omega t]^{-1/2}$, $\theta$ — угловая координата, $\theta_0$ — значение $\theta$ в точке касания, $c_0$ — значение нормальной составляющей скорости волны, $c_0 = \frac{\omega}{\alpha} = A_1 \alpha = \sqrt{A_1 \omega}$.

Подставляя (2.22) в уравнение дифракционной задачи, которое соответствует уравнениям (2.7) без нелинейного члена и имеет вид

$$i\Delta_\omega \frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{\xi} + \frac{1}{2} \Delta_2 \alpha''(\beta, \omega) \frac{\partial^2\psi}{H_2^2 \partial\theta^2} - i\Delta_\omega \frac{d \ln K}{dt} = 0 \tag{2.23}$$

можно показать, что (2.22) удовлетворяется при выполнении равенства

$$\frac{dk_1}{dt}\bigg|_{\xi} = -\frac{\Delta_\alpha \omega}{\Delta_\omega} \frac{\alpha''}{H_2^2 c_0} \tag{2.24}$$

Поскольку $k_1 = \frac{1}{r}$, $H_2 = r = \sqrt{A_1 \omega}\, t$, $\frac{\partial r}{\partial t}\bigg|_{\xi} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}$, $\Delta_\alpha = -2A_1 \alpha = -2\sqrt{A_1 \dot{\omega}}$, то (2.24) удовлетворяется.

3. Можно получить также уравнения в диспергирующей среде с кубической нелинейностью близи каустики.

Решение вблизи каустики определяется переменными [8]

$$\alpha_i' = \frac{\alpha_i}{\omega}, \quad \tilde{x}_1 = (\bar{x} - \bar{x}_0)\bar{K}, \; y_1 = (\bar{x} - \bar{x}_0)\bar{N}, \quad \bar{x} = \{x_i\}, \; \bar{k} = \{\alpha_i'\} \tag{3.1}$$

Здесь $\bar{x}_0$ есть радиус-вектор точки касания $M$ некоторого выбранного луча с каустикой, $y_1$ — расстояние по нормали от точки $\{x_i\}$ до каустики. $\tilde{x}_1$ — время пробега волны вдоль луча от $M$ до основания нормали к каустике. В силу линейного решения имеют место порядки параметров $y_1 \sim \varepsilon$, $\tilde{x}_1 \sim \varepsilon^{3/2}$, $\omega \sim \frac{1}{\tilde{x}_1}$. Уравнения вблизи каустики для нелинейной задачи получены в [8] и имеют вид

$$\Phi = \psi e^{i\overline{\omega x_1}}, \quad \frac{1}{2}\Delta_{\alpha_i\alpha_j} N_i N_j \frac{d^2\psi}{dy_1^2} - \lambda_1 y_1 \psi + \Delta_\omega \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 |\psi|^2 \psi = 0$$

$$\lambda_1 = \left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial t} - \frac{\partial\alpha_j^1}{\partial t}\right) \Delta_\omega \left(N_j - \frac{\alpha_i N_i}{\alpha_k \Delta_{\alpha_k}} \Delta_{\alpha_j}\right) \tag{3.2}$$

$\alpha_j^1$ представляют значение $\alpha_j$ в точке $M$, $\bar{N}$—единичный вектор нормали к каустике в $M$. Решение линейной задачи, то есть уравнений (3.2) без третьего слагаемого, есть функция Эйри [12]

$$\psi = cv(\bar{y}), \qquad \bar{y} = y_1 \sqrt[3]{\varkappa}, \qquad \varkappa = \frac{2\lambda_1}{\Delta_{\alpha_i\alpha_j} N_i N_j} \tag{3.3}$$

Постоянная $c$ может быть определена из сравнения с решением геометрической акустики, имеющим место при $y \to -\infty$, причем асимптотические формулы для $v(\bar{y})$ дают

$$v(\bar{y}) = \frac{1}{2}(-\bar{y})^{-\frac{1}{4}} e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{2}(-y)^{-\frac{1}{4}} e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{3.4}$$

где первое слагаемое соответствует падающей, а второе — отраженной от каустики волне. Тогда $\frac{c}{2}$ может быть найдено из лучевого решения для падающей волны. Вдали от каустики можно считать слагаемые, соответствующие падающей и отраженной волнам, разделяющимися и полагать $\psi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\varphi_k}$. Полагая еще $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 = 0$ в линейной задаче, можно получить для $a_k = 0$, $\varphi_k = \varphi$ уравнения

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 - \frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2} + \varkappa y_1 a = 0, \qquad a\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + 2\frac{\partial a}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0 \tag{3.5}$$

Отбрасывая $\frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2}$ или дифракционное слагаемое, можно найти решение уравнений (3.5) в виде (3.3), (3.4).

В нелинейной задаче самый естественный способ решения задачи состоит в интегрировании уравнения (3.2) при начальном условии, взятом для $\psi$, $\frac{\partial\psi}{\partial y_1}$ из (3.3) при некотором значении $\bar{y}$. При этом $|\psi|^2 = \psi^2$, поскольку $\psi$ выбрана действительной. В переменных $\bar{y}$, $\bar{\varphi} = \frac{\psi}{\mu}$, $\mu = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\mp \varkappa^{1/3} \Delta_\omega \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0}}$, где всегда $-\frac{\lambda_1}{\varkappa^{1/2}} > 0$, $\Delta_\omega > 0$, знаки $\pm$ выбираются условием $\pm\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 >$ и (3.2) примет вид

$$\frac{d^2\overline{\varphi}}{d\overline{y}^2} - \overline{y}\overline{\varphi} \mp |\overline{\varphi}|^2 \overline{\varphi} = 0 \tag{3.6}$$

а начальные условия из (3.3) $\overline{\varphi} = c_1 v(\overline{y})$, $c_1 = \frac{c}{\mu}$. Задавая значения $c_1$ и считая $|\overline{\varphi}|^2 \overline{\varphi} = \overline{\varphi}^3$ в (3.6), следует проводить численное интегрирование.

Можно также формально полагать в (3.6) на некотором отдалении от каустики $\overline{\varphi} = ae^{i\varphi}$, тогда получится

$$a\left(\frac{d\varphi}{d\overline{y}}\right)^2 - \frac{d^2 a}{d\overline{y}^2} + a\overline{y} \pm a^3 = 0, \quad a = \frac{\overline{c}}{\sqrt{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{y}}\right|}}, \quad \overline{c} = \text{const} \tag{3.7}$$

Верхний и нижний знаки соответствуют знаку $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$.

Отбрасывая еще $\frac{d^2 a}{d\overline{y}^2}$, можно найти уравнение, верное вдали от каустики

$$\overline{c}^3 + \overline{y}a^4 \pm a^6 = 0 \tag{3.8}$$

Интересно, что для среды, в которой $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 > 0$, решение (3.8) становится мнимым вблизи каустики, в то время как при $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$ $a$ действительно вплоть до $\overline{y} = 0$. Хотя во всех случаях уравнение (3.7) может быть проинтегрировано, однако вряд ли оно описывает решение около каустики. С другой стороны, при больших $\overline{y} < 0$ уравнение (3.8) дает переход к лучевому решению $a = \overline{c}(-\overline{y})^{-1/4}$, $\varphi = \pm\frac{2}{3}(-\overline{y})^{3/2}$, то есть на значительных расстояниях от каустики его можно использовать для определения амплитуд падающей и отраженной волны.

Для вычисления коэффициентов пересчета от $\varphi$, $y$ к новым $\overline{\varphi}$, $\overline{y}$ найдем значения $\lambda_1$, $\varkappa$ и $\mu$.

В силу (2.5) получается

$$\Delta_{\alpha_j} = -2A_1\alpha_j \tag{3.9}$$

то есть луч параллелен нормали к фронту волны. Тогда

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2A_1} V_\lambda \frac{\partial}{\partial t}[t_j - t_j^0] N_j \tag{3.10}$$

где введен единичный вектор $t_j = V_\lambda \Delta_{\alpha_j}$, $V_\lambda = \frac{1}{|\Delta_{\alpha_j}|}$ есть вектор лучевой скорости.

Поскольку $t_j^1$ зависит только от $t$, то производные по $t$ могут считаться производными вдоль луча, то есть $\dfrac{\partial t_i^1}{V_A \partial t} = \dfrac{\partial t_i^1}{\partial \sigma}$, а это есть вектор кривизны луча. Тогда $\dfrac{\partial t_j^1}{\partial \sigma} N_j = \dfrac{1}{R_s}$ есть проекция вектора кривизны поверхностного луча, а $\dfrac{\partial t_j}{\partial \sigma} N_i = \dfrac{1}{R_r}$ есть проекция вектора кривизны данного луча на нормаль каустики. Тогда будем иметь

$$\lambda_1 = -[2A_1]^{-1}\frac{1}{R}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_r} - \frac{1}{R_s} \tag{3.11}$$

Кроме того, из (3.5)

$$\Delta_{\alpha_i \alpha_j} = -2A_1 \delta_{ij}, \quad \Delta_{\alpha_i \alpha_j} N_i N_j = -2A_1 \tag{3.12}$$

где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

При этом

$$\varkappa = \frac{2}{R}, \qquad \mu = \sqrt{\frac{[2A_1]^{-1}}{2^{1/3} R^{2/3} \left| \left( \dfrac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 \right|}}$$

$$\left| \left( \frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 \right| = \frac{h^3}{40} \sqrt{\frac{1}{\rho A}} (\alpha^2 + \beta^2)^3 |B| \tag{3.13}$$

Поскольку знак $\left( \dfrac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0$ определяется знаком $B$, мы видим, что $B > 0$ соответствует верхнему знаку в (3.6) — (3.8), а $B < 0$ — нижним знакам.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 II 1978

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

## ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼԵՐՈՒՄ ԾՌՄԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

### Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Դիտարկվում է կամայական տեսքի քվազիմոնոխրոմատիկ ծռման ալիքների տարածումը բարակ սալում, որի նյութը ենթարկվում է աստիճանային տիպի ֆիզիկական ոչ-գծային օրենքին: Դանդաղ մոդուլացվող ամպլիտուդների և փազերի հավասարումներում տրվում է գործակիցների կոնկրետացում:*

*Ստացված են ալիքների կայունության պայմանները, լուծումը զուգամիտվող փնջերի համար, ընդ որում նաև լուծումը կաուստիկայի մոտ: Տրված է տիպիկ դիֆրակցիոն խնդրի դրվածքը:*

# ON PROPAGATION OF BENDING WAVES IN NON-LINEAR ELASTIC PLATES

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

## Summary

The propagation of quasi-monochromatic bending waves of arbitrary shape in a thin plate with the power law of physical non-linearity is considered. The concrete definition of coefficients of equations for slow modulations of anylitudes and phases is presented. The wave stability conditions, the solutions for convergent beams, the solutions near caustics are obtained.

The statement of a typically diffraction problem is given.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Лайтхилл М. Дж.* Некоторые частные случаи применения теории Уизема. Нелинейная теория распространения волн. М., «Мир», 1970.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
3. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
4. *Островский Л. А., Сутин А. М.* Нелинейные упругие волны в стержнях. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
5. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы. Таллин, Изд. АН Эст.ССР, 1972.
6. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1968, т. XXI, № 3.
7. *Багдоев А. Г.* Уравнения нелинейной вязкотермомагнитоупругой среды вблизи фронтов волн. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 1.
8. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности фронтов волн в пространственной задаче. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 6.
9. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* О самофокусировке и самоканализации интенсивных световых пучков в нелинейной среде. ЖЭТФ, 50, 1966.
10. *Амбарцумян С. А.* Об изгибе нелинейно-упругих трехслойных пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6.
11. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности ударной волны вблизи особой линии. Докл. АН Арм.ССР, 1969, т. XIX, № 1.
12. *Ludwig D.* Uniform asymptotic expansions at a caustic, Commun. on Pure and Applied Math., 1966, vol. 19, No. 2.