ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, №5, 1979 Механика

А. Н. ЗЛАТИН

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ОДНОРОДНЫМ РЕШЕНИЯМ ДЛЯ ЦИЛИНДРА

Одним из обобщений метода Фурье разделения переменных на задачи теории упругости является метод однородных решений [1]. Проблема нахождения этих решений сводится, как правило, к несамосопряженной задаче на собственные значения; получаемые при этом собственные функции (однородные решения) оказываются комплексными и неортогональными, поэтому для обоснования метода приходится исследовать вопрос о разложении по однородным решениям (или родственные вопросы полноты систем этих решений).

Впервые теоремы разложения по однородным решениям были получены в работе [2] для прямоугольной области. Дальнейшее развитие проблема получила в основном в связи с построением асимптотической теории пластин и оболочек [3]. Из работ, посвященных исследованию систем однородных решений для цилиндра, автору известна лишь заметка [4], где анонсированы результаты, полученные методами функционального анализа, для случая, когда на боковой поверхности цилиндра отсутствуют перемещения.

В настоящей работе исследуются условия, при которых формальное решение, получаемое с помощью соотношения обобщенной ортогональности Шиффа [5, 6], фактически удовлетворяет краевым условиям на торцах цилиндра. Работа является развитием статьи [2], как в смысле тематики, так и в смысле применяемого математического аппарата.

1. *Постановка задачи и формальное решение.* Рассмотрим сначала изотропный однородный цилиндр единичного радиуса, описываемый в цилиндрической системе координат (ρ, φ, x) неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $-\infty < x \leqslant 0$, и предположим, что на боковой поверхности цилиндра отсутствуют напряжения.

Решение уравнений теории упругости, оставляющее боковую поверхность цилиндра свободной от напряжений и отвечающее условиям убывания на бесконечности $(x \to -\infty)$, может быть в осесимметричном случае построено в виде суперпозиции однородных решений

$$w(\rho, x) = C_0 + \sum_k{}' C_k w_k(\rho) e^{p_k x}$$

$$\tau(\rho, x) \equiv (2G)^{-1} \tau_{x\rho} = \sum_k{}' C_k \tau_k(\rho) e^{p_k x} \tag{1.1}$$

$$\sigma(\rho, x) \equiv (2G)^{-1} \sigma_x = \sum_k{}' C_k \sigma_k(\rho) e^{p_k x}$$

$$u(\rho, x) = \sum_k{}' C_k u_k(\rho) e^{p_k x} \tag{1.1}$$

где $\{u, 0, w\}$ — вектор перемещений: $\tau_{x\rho}$, σ_x — составляющие тензора напряжений; знак суммирования Σ' распространяется на все корни p_k уравнения

$$s(p) \equiv 2(1-\nu) J_1^2(p) - p^2 [J_0^2(p) + J_1^2(p)] = 0 \tag{1.2}$$

расположенные в правой полуплоскости ($k = \pm 1, \pm 2, ...$);

$$w_k(\rho) \equiv w^*(p_k, \rho), \quad \tau_k(\rho) \equiv \tau^*(p_k, \rho)$$

$$\sigma_k(\rho) \equiv \sigma^*(p_k, \rho), \quad u_k(\rho) \equiv u^*(p_k, \rho) \tag{1.3}$$

$$w^*(p, \rho) = J_0(p) J_0(p\rho) + \rho J_1(p) J_1(p\rho) - 2(1-\nu) p^{-1} J_1(p) J_0(p\rho)$$

$$\tau^*(p, \rho) = p[\rho J_1(p) J_0(p\rho) - J_0(p) J_1(p\rho)]$$

$$\sigma^*(p, \rho) = p J_0(p) J_0(p\rho) + p\rho J_1(p) J_1(p\rho) - 2 J_1(p) J_0(p\rho)$$

$$u^*(p, \rho) = \rho J_1(p) J_0(p\rho) - J_0(p) J_1(p\rho) - 2(1-\nu) p^{-1} J_1(p) J_1(p\rho)$$

G, ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала цилиндра. Заметим здесь, что распределение корней p_k дается следующей асимптотической формулой [7]:

$$p_{\pm k} \sim k\pi \pm \frac{i}{2} \ln(4k\pi), \quad k \to +\infty \tag{1.4}$$

Однородные решения (1.3) удовлетворяют соотношению обобщенной ортогональности Шиффа [5, 6], которое может быть представлено в форме

$$\int_0^1 [\tau_k(\rho) u_n(\rho) - w_k(\rho) \sigma_n(\rho)] \rho d\rho = S_k \delta_{nk}; \; n, k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{1.5}$$

где δ_{nk} — символ Кронекера, и введены обозначения для однородных решений, соответствующих корню $p_0 = 0$ уравнения (1.2)

$$w_0 = \sigma_0 = 1, \quad \tau_0 = 0, \quad u_0 = -\nu\rho(1+\nu)^{-1}$$

Известно, что с помощью соотношения (1.5) коэффициенты C_k могут быть найдены в явном виде, если на торце цилиндра ($x = 0$) задаются так называемые «перекрестные» граничные условия: то есть либо величины w и τ, либо σ и u. Рассмотрим здесь первый случай (второй рассматривается аналогично), именно, пусть

$$w|_{x=0} = W(\rho), \quad \tau|_{x=0} = T(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < 1 \tag{1.6}$$

Формально перейдем к пределу в (1.1)

$$w(\rho, 0) = C_0 + \sum_k{}' C_k w_k(\rho) = W(\rho)$$

$$\tau(\rho, 0) = \sum_k{}' C_k \tau_k(\rho) = T(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < 1$$

домножим эти равенства соответственно на $-\sigma_n(\rho)\rho$ и $\tau_n(\rho)\rho$, сложим и проинтегрируем по $\rho \in [0, 1]$. После перемены порядка суммирования и интегрирования, используя соотношение (1.5), получаем

$$C_k = S_k^{-1} \int_0^1 [T(\xi)\, u_k(\xi) - W(\xi)\, \sigma_k(\xi)]\, \xi d\xi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.7)$$

Формулы (1.1), (1.7) дают формальное решение поставленной задачи.

2. *Преобразование формального решения.* Рассмотрим последовательность контурных интегралов (см. (1.2))

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_n} F(p)\, dp^{*} \quad (2.1)$$

где

$$F(p) = -\sigma^*(p, \xi)\, w^*(p, \rho)\, e^{px} \Delta^{-1}(p) \quad (2.2)$$

$$\Delta(p) = (1-\nu)\, p^{-2} f_1^2(p)\, s(p) \quad (2.3)$$

L_n — контур, состоящий из отрезка мнимой оси $L_n^{(1)}$, замкнутого вправо полуокружностью $L_n^{(2)}$ большого радиуса $R_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$.

В силу симметрии поведение функции (2.2) на дугах $L_n^{(2)}$ достаточно исследовать лишь в первом квадранте. Используя асимптотические формулы для функции Бесселя в комплексной плоскости, можно получить при $\arg(p) \in (\alpha, \pi/2]$ и любом $\alpha \in (0, \pi/2)$:

$$F(p) = O(p^2 \exp[(2 - \xi - \rho)\, ip + xp]), \quad p \to \infty \quad (2.4)$$

При $\arg(p) \in [0, \alpha]$ можно воспользоваться имеющимися в [8] оценками для функции $s(p)$, из которых следует, что $|F(p)|$ убывает при $n \to \infty$ на дугах $L_n^{(2)}$ за счет сомножителя e^{xp}. Полученные оценки позволяют заключить, что

$$\int_{L_n^{(2)}} F(p)\, dp \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad (2.5)$$

если $\rho + \xi < 2$, $x < 0$.

Подынтегральная функция (2.2) в правой полуплоскости имеет полюсы первого порядка в точках p_k и полюсы второго порядка в точках λ_k, где λ_k — положительные корни уравнения

* Интегрирование производится против часовой стрелки.

$$J_1(\lambda) = 0$$

Учитывая (2.5), перейдем в (2.1) к пределу при $n \to \infty$. Используя теорему Коши о вычетах, после некоторых выкладок получим

$$-\sum_k{}' \sigma_k(\xi)\, w_k(\rho)\, e^{p_k x} S_k^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2 J_0^{-2}(\lambda_k)\, J_0(\lambda_k \xi)\, J_0(\lambda_k \rho) \Big[1 -$$

$$-\frac{x\lambda_k}{2(1-\nu)}\Big] e^{\lambda_k x} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \sin(xy)\, \sigma^*(iy,\xi)\, w^*(iy,\rho)\, \Delta^{-1}(iy)\, i dy \quad (2.6)$$

В левую часть этой формулы помещены вычеты в точках p_k, вычисленные с помощью равенства

$$\frac{d}{dp}\Delta(p)\Big|_{p=p_k} = S_k$$

которое можно проверить, найдя S_k по формуле (1.5).

Рассматривая теперь контурный интеграл (2.1) от функции

$$F(p) = u^*(p,\xi)\, w^*(p,\rho)\, e^{px} \Delta^{-1}(p) \quad (2.7)$$

можно получить

$$u_0(\xi)\, w_0(\rho)\, S_0^{-1} + \sum_k{}' u_k(\xi)\, w_k(\rho)\, e^{p_k x} S_k^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{1-\nu}\sum_{k=1}^{\infty} J_0^{-2}(\lambda_k)\, J_1(\lambda_k \xi)\, J_0(\lambda_k \rho)\, x e^{\lambda_k x} - \quad (2.8)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \sin(xy)\, u^*(iy,\xi)\, w^*(iy,\rho)\, \Delta^{-1}(iy)\, i dy$$

Отличие от исследованного выше случая (2.2)—(2.6) состоит в том, что в левой части этого равенства учтен еще полувычет от полюса первого порядка подынтегральной функции (2.7) в нуле.

Домножим теперь (2.6) на $-W(\xi)\xi$, а (2.8) на $T(\xi)\xi$, сложим и проинтегрируем по $\xi \in [0, 1]$. Из-за наличия экспоненциально убывающих сомножителей $e^{\lambda_k x}$, $e^{p_k x}$ (см. (1.4)) в полученных равенствах может быть переменен порядок суммирования и интегрирования (единственным требованием для этого является интегрируемость функций $W(\rho)$ и $T(\rho)$ по Лебегу). После этого во внутренних точках цилиндра для перемещения w, определяемого (1.1), (1.7), оказывается справедливым представление

$$w(\rho, x) = w_{\rm I} - \frac{1}{2(1-\nu)}(w_{\rm II} + w_{\rm III}) + w_{\rm IV}, \qquad x < 0,\ 0 \leqslant \rho < 1 \quad (2.9)$$

где
$$w_{\mathrm{I}}(\rho, x) = D_0[W] + \sum_{k=1}^{\infty} D_k[W]\, J_0(\lambda_k\rho)\, e^{\lambda_k x}$$

$$w_{\mathrm{II}}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k[W]\, J_0(\lambda_k\rho)\, x\lambda_k e^{\lambda_k x}$$

$$w_{\mathrm{III}}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k[T]\, J_0(\lambda_k\rho)\, x e^{\lambda_k x}$$

$$w_{\mathrm{IV}}(\rho, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 W(\xi)\,\xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy)\,\sigma^*(iy, \xi)\, w^*(iy, \rho)\, \Delta^{-1}(iy)\, idy -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1 T(\xi)\,\xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy)\, u^*(iy, \xi)\, w^*(iy, \rho)\, \Delta^{-1}(iy)\, idy$$

и введены следующие обозначения для коэффициентов рядов Дини и Фурье—Бесселя функции $f(\rho)$

$$D_0[f] = 2\int_0^1 f(\xi)\,\xi d\xi \tag{2.10}$$

$$D_k[f] = 2J_0^{-2}(\lambda_k)\int_0^1 f(\xi)\, J_0(\lambda_k\xi)\,\xi d\xi$$

$$F_k[f] = 2J_0^{-2}(\lambda_k)\int_0^1 f(\xi)\, J_1(\lambda_k\xi)\,\xi d\xi, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Аналогично для напряжения τ имеем

$$\tau(\rho, x) = \tau_{\mathrm{I}} + \frac{1}{2(1-\nu)}(\tau_{\mathrm{II}} + \tau_{\mathrm{III}}) + \tau_{\mathrm{IV}}, \quad x < 0, \quad 0 \leqslant \rho < 1 \tag{2.11}$$

$$\tau_{\mathrm{I}}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k[T]\, J_1(\lambda_k\rho)\, e^{\lambda_k x}$$

$$\tau_{\mathrm{II}}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k[T]\, J_1(\lambda_k\rho)\, x\lambda_k e^{\lambda_k x}$$

$$\tau_{\mathrm{III}}(\rho, x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k[W]\, J_1(\lambda_k\rho)\, x\lambda_k^2 e^{\lambda_k x}$$

$$\tau_{\mathrm{IV}}(\rho, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 W(\xi)\,\xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy)\,\sigma^*(iy, \xi)\,\tau^*(iy, \rho)\, \Delta^{-1}(iy)\, idy -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1 T(\xi)\,\xi d\xi \int_0^{\infty} \sin(xy)\, u^*(iy, \xi)\, w^*(iy, \rho)\, \Delta^{-1}(iy)\, idy$$

3. *Исследование формального решения.* Далее под рядами Фурье—Бесселя и Дини будут пониматься ряды по ортогональным с весом ρ полным системам функций $\{J_1(\lambda_k\rho)\}$ и $\{\rho, J_0(\lambda_k\rho)\}$, $k=1, 2, \ldots$, $\rho\in[0, 1]$. Обозначения для коэффициентов этих рядов даны формулами (2.10).

Центральное место в настоящей работе занимает следующая

Теорема 1. *Пусть*

a) *функция* $W(\rho)$ *является абсолютной непрерывной* ([9], стр. 226) *на промежутке* $[0, 1]$,

b) *а* $T(\rho)$ — *интегрируемой (по Лебегу) на* $[0, 1]$;

тогда для решения (1.1) в виде ряда по однородным решениям с коэффициентами (1.7) краевые условия (1.6) выполняются в тех точках $\rho\in(0.1)$, *где одновременно:*

c) *ряд Дини функции* $W(\rho)$ *сходится к* $W(\rho)$,

d) *ряд Фурье—Бесселя* $T(\rho)$ *сходится к* $T(\rho)$,

e) *ряд Фурье—Бесселя производной* $W'(\rho)$ *сходится,*

f) *ряд Дини первообразной* $T^*(\rho)=\int\limits_0^\rho T(\rho)d\rho$ *сходится.*

Доказательство основывается на исследовании предельного перехода $x\to-0$ в представлениях (2.9), (2.11).

В силу условий c), d) по признаку Абеля равномерной сходимости рядов заключаем:

$$\lim_{x\to-0} w_1(\rho, x)=W(\rho) \tag{3.1}$$

$$\lim_{x\to-0} \tau_1(\rho, x)=T(\rho), \quad 0<\rho<1$$

С помощью оценок типа (2.4) при $p=iy$ легко доказать, что для интегралов $w_{\rm IV}$ и $\tau_{\rm IV}$ выполняются условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла ([9], стр. 142) при $\rho<1$, поэтому

$$\lim_{x\to-0} w_{\rm IV}(\rho, x)=\lim_{x\to-0}\tau_{\rm IV}(\rho, x)=0, \quad \rho<1 \tag{3.2}$$

Условия a), b) теоремы позволяют преобразовать интегрированием по частям ряды $w_{\rm III}$, $\tau_{\rm III}$

$$w_{\rm III}(\rho, x)=-\sum_{k=1}^{\infty} D_k[T^*]J_0(\lambda_k\rho)\,x\lambda_k e^{\lambda_k x}$$

$$\tau_{\rm III}(\rho, x)=-\sum_{k=1}^{\infty} F_k[W']J_1(\lambda_k\rho)\,x\lambda_k e^{\lambda_k x}$$

Члены этих рядов также, как и ряды $w_{\rm II}$ и $\tau_{\rm II}$, представляют собой произведения слагаемых рядов Дини (Фурье—Бесселя) на варианту $a_k(x)=-x\lambda_k e^{\lambda_k x}$, которая обладает следующими свойствами:

во-первых, при любых натуральном k и $x < 0$: $0 < a_k(x) \leqslant e^{-1}$, во-вторых, $a_k(x)$, как функция натурального аргумента k, монотонно возрастает при $0 < \lambda_k \leqslant -x^{-1}$ и монотонно убывает при $\lambda_k \geqslant -x^{-1}$.

На этот случай легко может быть обобщен признак Абеля [10], который совместно с условиями c) — f) теоремы показывает, что для рядов $w_{\text{II, III}}$ и $\tau_{\text{II, III}}$ допустим почленный переход к пределу

$$w_{\text{II, III}}(\rho, x), \quad \tau_{\text{II, III}}(\rho, x) \to 0 \text{ при } x \to -0, \ 0 < \rho < 1 \tag{3.3}$$

Формулы (3.1), (3.2), (3.3) доказывают теорему 1.

Замечание. Поскольку при $\rho \in (0, 1)$, как известно [11, 12], ряды Фурье—Бесселя и Дини ведут себя в смысле сходимости так же, как тригонометрические [13], для выполнения условий c) — f) теоремы 1 достаточно потребовать, например, чтобы в окрестности точки $\rho \in (0, 1)$ функции $W'(\rho)$, $T(\rho)$ удовлетворяли условиям Липшица с показателем $\alpha \in (0, 1]$.

Кроме того, укажем (без доказательства) еще на одну возможную формулировку теоремы разложения:

Теорема 2. *Если функции $W'(\rho)$ и $T(\rho)$ имеют ограниченное полное изменение на промежутке $[0, 1]$, то*

$$\lim_{x \to -0} w(\rho, x) = W(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < 1$$

$$\lim_{x \to -0} \tau(\rho, x) = \begin{cases} 0, & \rho = 0 \\ \dfrac{1}{2}[T(\rho - 0) + T(\rho + 0)], & 0 < \rho < 1 \end{cases}$$

4. *Случай конечного цилиндра.* Рассмотрим теперь цилиндр конечной высоты $(-l < x < l)$ со свободной боковой поверхностью, на торцевых поверхностях которого заданы касательные напряжения и нормальные перемещения, и предположим для определенности, что деформация является симметричной относительно плоскости $x = 0$. (Антисимметричный случай рассматривается аналогично, а общий — как наложение упомянутых двух). Итак, пусть

$$w|_{x=l} = -w|_{x=-l} = W(\rho), \quad \tau|_{x=l} = -\tau|_{x=-l} = T(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < 1$$

В этом случае решение задачи можно разыскивать в виде [6] (см. (1.1), (1.3))

$$\begin{gathered} w(\rho, x) = \frac{x}{l} C_0 + \sum_k{}' C_k w_k(\rho) \operatorname{sh} p_k x / \operatorname{sh} p_k l \\ \tau(\rho, x) = \sum_k{}' C_k \tau_k(\rho) \operatorname{sh} p_k x / \operatorname{sh} p_k l \end{gathered} \tag{4.1}$$

При такой форме записи решения после повторения выкладок пункта 2 оказывается, что неизвестные C_k даются той же формулой (1.7), что и для полубесконечного цилиндра.

Для исследования предельного перехода преобразуем (4.1) к виду

$$w(\rho, x) = w_{\infty}(\rho, x) - w_l(\rho, x), \quad \tau(\rho, x) = \tau_{\infty}(\rho, x) - \tau_l(\rho, x) \tag{4.2}$$

введя обозначения

$$\begin{Bmatrix} w_{\infty} \\ w_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 - \dfrac{x}{l} \end{Bmatrix} C_0 + \sum_k{}' C_k w_k(\rho) \begin{Bmatrix} e^{p_k(x-l)} \\ d_k(x) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{\infty} \\ \tau_l \end{Bmatrix} = \sum_k{}' C_k \tau_k(\rho) \begin{Bmatrix} e^{p_k(x-l)} \\ d_k(x) \end{Bmatrix}$$

$$d_k(x) = e^{p_k(x-l)} - \operatorname{sh} p_k x / \operatorname{sh} p_k l$$

Учитывая (1.4) и асимптотику

$$d_k(x) = O(\exp[-p_k(x+l)]), \quad k \to \infty$$

можно показать, что ряды w_l, τ_l сходятся равномерно, скажем, при $0 < x < l$. Поэтому, в силу очевидного свойства $d_k(l) = 0$, заключаем

$$w_l, \tau_l \to 0 \quad \text{при} \quad x \to l - 0, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \tag{4.3}$$

Первые слагаемые в (4.2) совпадают при замене $x - l$ на x с представлениями для соответствующих величин в полубесконечном цилиндре. Их поведение при приближении к торцу определяется теоремами 1 и 2. Учитывая (4.3), заключаем окончательно:

результаты теорем 1 и 2 распространяются и на случай конечного цилиндра.

Автор благодарит Я. С. Уфлянда и А. С. Зильберглейта за прочтение рукописи и сделанные замечания.

Ленинградский ордена Ленина
политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступила 21 XI 1978

Ա. Ն. ԶԼՈՏԻՆ

ԳԼԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ԸՍՏ ՀԱՄԱՍԵՌ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ստացված թեորեմներում ուսումնասիրվել են այն պայմանները, որոնց դեպքում ազատ կողմնային մակերևույթով կլոր գլանի համար առաձգականության տեսության հավասարումների լուծումը, որը կառուցվել է ըստ հա-

մասնո լուծումների շարքի տեսքով, բավարարում է գլանի հիմքերի վրա եզրային պայմաններին։ Շարքերի գործակիցները որոշվում են Պ. Ա. Շիֆի ընդհանրացված օրթոգոնալության հարաբերակցությունների օգնությամբ։

SOME THEOREMS ON EXPANSION INVOLVING ELEMENTARY SOLUTIONS FOR THE CYLINDER

A. N. ZLATIN

S u m m a r y

The end problem of the elastic cylinder is considered. The solution is assumed to be a series involving elementary ones for the cylinder with a free side surface. The limits on the realization of boundary conditions are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прокопов В. К.* Обзор работ по однородным решениям теории упругости. Тр. Ленинград. политехн. инст., 1967, № 279.
2. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области, и о некоторых его обобщениях. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
3. *Ворович И. И.* Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек. Материалы I Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси, Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975.
4. *Оразов М. Б.* О полноте собственных и присоединенных векторов самосопряженного квадратичного пучка. Функц. анализ и его прилож., 1976, т. 10, № 2.
5. *Schiff P. A.* Sur l'équilibre d'un cylindre élastiqe. J. math. pures et appl., 1883, ser. 3, t. 9.
6. *Нуллер Б. М.* О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
7. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section. Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1913–1914, v. 49, p. 4, No. 17.
8. *Прокопов В. К.* Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра. Тр. Ленинград. политехн. инст., 1950, № 2.
9. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., «Наука», 1974.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2 М., «Наука», 1966.
11. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М., ИЛ, 1960.
12. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. 1. М., ИЛ, 1960.
13. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М., «Мир», 1965.