ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 4, 1979 Механика

В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

ОСРЕДНЕНИЕ ПО ОБЪЕМУ КАК МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СРЕД С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

Излагается метод осреднения дифференциальных уравнений поля путем интегрирования их по объему и представления интегралов в конечно-разностной форме. Сопутствующее изменение масштаба описания позволяет интерпретировать конечно-разностные уравнения как континуальные и требует введения новых реологических замыканий. Метод иллюстрируется на примере теории упругости микронеоднородных сред. Указаны также иные приложения.

1. *Постановка проблемы.* При составлении уравнений механики сплошных сред рассматриваются элементарные (дифференциальные) объемы ΔV, линейный масштаб которых l должен быть много меньше внешнего масштаба L задачи, но много больше λ — характерного масштаба микродвижения частиц, слагающих изучаемую сплошную среду: $L \gg l \gg \lambda$. Если масштаб λ имеет молекулярные размеры (λ — «почти нуль»), как это предполагается, например, в теории вязкой жидкости или же в классической теории упругости, то балансовые уравнения для объема ΔV можно упрощать за счет предельного перехода $l \to 0$. Если же масштаб связан с надмолекулярным строением (движением) частиц, то он возрастает на много порядков, и предельный переход $l \to 0$ следует понимать как условие $l/L \to 0$, или точнее $l/L \ll 1$. Соответственно, предельный переход производится фактически за счет выбора достаточно большого внешнего масштаба L. Условие $l/L \ll 1$ есть условие «дифференциальности» объема ΔV. Второе ограничение $l \gg \lambda$ размеров объема ΔV по сути дела есть условие «представительности» тех интервалов осреднения (самого объема ΔV или же его сечений), к которым приводит правило составления балансовых соотношений. В тех случаях, когда не выполняется условие $L \gg l$, балансовые уравнения для ΔV не могут быть интерпретированы как точные континуальные уравнения. При использовании в них средних значений балансовые уравнения понимаются как соответствующие, например, «гидравлическому» приближению. Если же не выполнено условие $l \gg \lambda$, то осреднение по пространственным интервалам не может приводить к «регулярным средним» значениям.

Итак, если выполнены условия $L \gg l \gg \lambda$, $l^3 \sim \Delta V$, уравнения баланса для ΔV могут считаться дифференциальными. Для них характерно наличие внутреннего движения или состояния масштаба λ (размер «моля» в турбулентности, макромолекулы в полимерном растворе или в жидком кристалле, порового канала или взвешенной частицы). Определение среднего движения частиц в элементарном объеме ΔV как поступательного, оказывается недостаточным — все характерные особенности континуума с микроструктурой связаны с относительным движением частиц: «молей» относительно среднего потока или взвешенных частиц — относительно несущей среды. Относительное движение может быть не только поступательным, но и вращательным. В этом случае среднее движение в ΔV нужно задавать в виде профиля, тем более, что в замыкающие реологические связи (вязкой жидкости или же более сложных моделей) входят градиенты поля скорости или смещений. При нестационарных микродвижениях также допустимо осреднение по достаточно большому (представительному) интервалу времени. Получаемые балансовые уравнения следует понимать как уравнения корреляционных связей между параметрами течения во времени для пространственного интервала масштаба λ. Иными словами, в этом случае получаются уравнения, определяющие индивидуальный элемент микроструктуры «в среднем». Естественно, что уравнения корреляционных связей, вообще говоря, отличаются от континуальных макроуравнений движения среды с микроструктурой.

2. *Уравнения равновесия микронеоднородной упругости**. Введем два масштаба исследования напряженно-деформированного состояния среды: микро- (с координатами x_i) и макромасштаб (с координатами X_i). Допустим, что в микромасштабе (то есть для дифференциального элемента $dv = dx_1 dx_2 dx_3$) выполняются уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \tag{2.1}$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x)$ — симметричный тензор микронапряжений,

$f_i = f_i(x)$ — вектор объемных сил.

Если умножить уравнение (2.1) на координату x_k, то получим

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} x_k) + f_i x_k \tag{2.2}$$

Доумножение этого уравнения на альтернирующий тензор E_{lik} приводит к уравнению баланса момента количества движения

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(E_{lki}\sigma_{ij}x_k) + E_{lki}f_i x_k = 0, \quad E_{lki}\sigma_{ik} = 0 \tag{2.3}$$

Проинтегрируем теперь уравнение (2.1) по элементарному макрообъему $\Delta V = \Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$. Тогда в силу непрерывности поля σ_{ij} получим

---

* См. аннотацию доклада В. И. Левина и В. Н. Николаевского от 09.01.76. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 4.

$$\int\limits_S \sigma_{ij} dS_j + \int\limits_V f_i dV = 0, \qquad dV = dx_1 dx_2 dx_3 \tag{2.4}$$

где S — поверхность объема ΔV, $dS_j = n_j dS$ — ее элемент с нормалью n_j. Разделив (2.4) на ΔV и определив среднее по объему и по площадке $\Delta S_j = \Delta X_k \Delta X_m$ следующим образом:

$$\langle \cdots \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} (\cdots)\, dV, \quad \langle \cdots \rangle_j = \frac{1}{\Delta X_k \Delta X_m} \int\limits_{\Delta S_j} (\cdots)\, n_j dS, \tag{2.5}$$

$$k \neq m \neq j$$

получим результирующее маркоуравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \langle \sigma_{ij} \rangle_j + \langle f_i \rangle = 0 \tag{2.6}$$

Здесь макродивергенция есть сумма следующих разностей:

$$\frac{1}{\Delta V} \Delta \int\limits_{\Delta S_1} \sigma_{i1} dS_1 = \frac{1}{\Delta X_1} \left(\langle \sigma_{i1} \rangle_1 \Big|_{X_1 + \frac{\Delta X_1}{2}} - \langle \sigma_{i1} \rangle_1 \Big|_{X_1 - \frac{\Delta X_1}{2}} \right) \tag{2.7}$$

при переходе к дифференциальной записи, справедливой в асимптотическом смысле (при $\Delta X_i / L \to 0$, где L — внешний масштаб задачи). Величина средней объемной силы $\langle f_i \rangle$ есть регулярная функция макрокоординаты $X_i = x_i - \xi_i$ центра масс объема ΔV. Здесь ξ_i — вектор, соединяющий центр масс с произвольной точкой внутри ΔV. Из конечно-разностного представления (2.7) видно, что средние усилия $\langle \sigma_{ij} \rangle_j$ на ориентированных площадках (гранях объема ΔV) можно считать регулярными функциями координат центра масс объема, смещенного на расстояние $\pm (1/2) \Delta X_k$.

Осреднение уравнения (2.2) по объему приводит к следующему результату:

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = \langle \sigma_{ik} \rangle_k + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \sigma_{ij} \xi_k \rangle_j - \langle f_i \xi_k \rangle \tag{2.8}$$

где $\langle \sigma_{ik} \rangle$ — тензор напряжений, осредненный по объему. Согласно (2.8) макронапряжение $\langle \sigma_{ik} \rangle_k$ выражается [1] через среднее обьемное напряжение и тензор более высокого ранга. В терминологии Миндлина [2] величины $\mu_{ijk} = \langle \sigma_{ij} \xi_k \rangle_j$ — двойные напряжения, $\langle f_i \xi_k \rangle$ — двойная массовая сила. Из дифференциального уравнения (2.8) видно, что двойные напряжения считаются функциями центра масс, то есть вычисляются как средние по ориентированной площадке, проведенной через центр масс ΔV.

Двойные напряжения являются моментом распределения усилий на ориентированной площадке ΔS_j более высокого порядка, чем макротензор $\langle \sigma_{ij} \rangle_j$; они в свою очередь могут быть выражены через свое средне-объемное значение $\langle \sigma_{ij} \xi_k \rangle$ и моменты еще более высокого ранга — тройные напряжения. Для получения нужного соотношения следует домножить уравнение (2.1) на диаду $x_k x_m$ и осреднить. Если продолжить эту процедуру, то в результате получится цепочка макроуравнений, включающих в себя макротензора n-ого ранга, вообще говоря, несимметричные из-за правила введения их как средних по ориентированным площадкам.

Уравнение момента количества движения получается путем умножения уравнения (2.8) на альтернирующий тензор E_{ilk}. Результат

$$E_{ilk} \langle \sigma_{lk} \rangle_k + \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial X_j} + C_i = 0 \tag{2.9}$$

показывает, что антисимметричная часть макронапряжения отлична от нуля, если существуют моментные напряжения $\mu_{ij} = \langle E_{ilk} \sigma_{lj} \xi_k \rangle_j$ и распределение по объему моментов сил $C_i = \langle E_{ilk} f_l \xi_k \rangle$.

Если в макрообъеме ΔV рассматриваемый материал — однородный континуум, то элементарный объем можно свести к точке ($\xi_i \to 0$, $\mu_{ik} \to 0$, $\langle \sigma_{ik} \rangle_j \to \sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle$) и достаточно только обычное уравнение равновесия (2.6), совпадающее с исходным (2.1).

3. *Кинематика среды.* Вектор макросмещения $U_i(X)$ вводится как среднее по объему смещение

$$U_i = \langle \rho u_i \rangle / \langle \rho \rangle = \langle u_i \rangle, \quad \rho = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

Поле микросмещений $u_i(x)$ определим как сумму регулярной и нерегулярной $\overset{*}{u}_i$ составляющих:

$$u_i(\xi) = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \xi_j + \overset{*}{u}_i, \qquad \langle \overset{*}{u}_i \rangle = 0 \tag{3.2}$$

Соответственно деформация ε_{ij} определится следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{d X_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{*}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{*}{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.3}$$

Осреднение по объему дает

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \langle \overset{*}{u}_i \rangle_j}{\partial X_j} + \frac{\partial \langle \overset{*}{u}_j \rangle_i}{\partial X_i}\right) \tag{3.4}$$

Определение средней по объему деформации (3.4) упрощается, если

$$\langle \overset{*}{u}_i \rangle_j = \langle \overset{*}{u}_i \rangle = 0 \tag{3.5}$$

В пользу гипотезы (3.5) можно выдвинуть следующий аргумент. Учет различия результатов осреднения по площадкам различной ориентации может ставить в соответствие микроскаляру φ макровектор $\langle \varphi \rangle_j$, а микровектору φ_i — макротензор $\langle \varphi_i \rangle_j$. Подобную ситуацию будем исключать по физическим соображениям. Различие средних по объему и поверхностям следует сохранять только для тензоров ранга выше второго, включающих в свое полиадное представление вектор ориентации площадки (нормаль, расход): введение вектора-ориентира площадки осреднения может менять для них количественное соотношение компонент, нарушать симметрию тензора, но ранг их будет сохраняться.

Если (3.5) справедливо, то второе слагаемое из (3.4) выпадает, то есть средняя по объему деформация есть симметричная часть градиента поля средних смещений. Если же считать, что условие (3.5) справедливо лишь при $i = j$, то второе слагаемое (3.4) будет отлично от нуля и его учет приводит к появлению некоторой дополнительной кинематической степени свободы.

Число сохраняемых дополнительных кинематических средних параметров должно соответствовать числу уравнений равновесия. Если число степеней свободы меньше числа уравнений из цепочки, то в результате получаются градиентальные модели среды. В. М. Левин проанализировал случай, когда в законе Гука

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

тензор упругих модулей $L_{ijkl}(x, \chi)$ является случайной функцией микрокоординат (χ — параметр случайности в допущении, что осреднение по объему эквивалентно статистическому).

Если же дополнительной кинематической переменной будет поворот φ_i микрочастицы, отличный в общем случае от среднего поворота $\Omega_i = 1/2\ (\mathrm{rot}\,U)_i$, то помимо уравнения количества движения (2.6) нужно вводить в анализ баланс момента количества движения (2.9).

Вообще говоря, кинематика локальных полей для микронеоднородных сред типа упругих смесей более сложна — она должна включать в себя средние деформации микрочастиц, а также градиенты от них. При этом следует пользоваться уравнением (2.8), несколько более общим, нежели (2.9).

Итак, интегрирование микроуравнений по дифференциальному макрообъему ΔV как метод осреднения приводит к континуальным обобщенным моделям известным как среды Коссера или иначе к моделям асимметричной механики. Проблема дальнейшего развития метода связана с построением реологических замыканий, что требует либо использования конкретных представлений о микроструктуре, либо постановки специальных реологических опытов, приводящих к измерениям необходимых реологических модулей.

4. *Многофазные смеси.* Следует подчеркнуть, что метод осреднения по объему при введении различных скоростей движения фаз был подробно развит применительно к механике пористых сред [3]. При этом построение выполнялось в рамках симметричной механики — вводилась гипотеза, что действующий на гранях объема макротензор напряжений симметричен. Эта гипотеза для рассмотренных в [3] движений была вполне оправдана.

Важным элементом построения было составление уравнений движения для каждой из фаз в отдельности с использованием осреднений по объему.

но плоским сечением, а также средних по поверхностям раздела фаз внутри ΔV. Такими средними являются силы и работы взаимодействия между фазами. Эти величины должны постулироваться дополнительно — в согласии с физическими требованиями. Сила взаимодействия вводилась так, что уравнения движения фаз оказались недивергентными, поскольку в них включалась движущая сила $m\partial p/\partial X_i$, где m — пористость, p — поровое давление, (но не сила: $-\partial(mp)/\partial X_i$, как в случае диффузионных моделей смесей, где величина mp играет роль «парциального» давления). Работа межфазового взаимодействия постулировалась таким образом, чтобы термодинамические соотношения Гиббса для внутренней энергии каждой из фаз были полными дифференциалами. При этом оказалось, что внутренняя энергия несущей фазы (матрицы среды) была функцией не только истинной плотности и энтропии, но и объемной концентрации; соответствующей термодинамической силой оказались эффективные напряжения Терцаги [3].

Учет асимметричных составляющих тензоров макронапряжений оказался существенным в другом предельном случае по объемному содержанию фаз, когда несущей фазой была жидкость, а взвешенные твердые частички могли обладать собственной угловой скоростью, отличной от скорости вращения жидкости [4].

Были предприняты попытки развить метод осреднения по объему и для гидродинамики суспензии. При этом Г. Бреннер [5] отмечал, что в макроуравнения движения входят среднеповерхностные напряжения, неравные среднеобъемным, хотя и не проводил процедуры преобразования поверхностных интегралов к балансовым дифференциальным соотношениям в макромасштабе. Существенно, что Г. Бреннер учитывал собственное вращение взвешенных частиц, связывая его с асимметричной частью макронапряжений. Напротив, Ю. А. Буевич с соавторами, например, см. [6], предполагал вслед за Дж. Бэтчелором [7], что макронапряжение есть среднее по объему от микронапряжений и пришел к выводу об обязательной симметрии тензора макронапряжений (см. по этому поводу [1]). Хотя при этом проводилась идея о вычислении макронапряжений через средние усилия на поверхности взвешенной частицы, эффект ее собственного вращения в отсутствие внешних немеханических полей был пропущен.

Прием введения объемной силы F_i вместо тензора напряжений σ_{ij}:

$$F_i = \partial\sigma_{ij}/\partial X_j \tag{4.1}$$

известен в литературе, см. например, монографию [8], стр. 634. Отметим попутно, что в этой книге был получен неверный результат об обязательной симметрии тензора напряжений (стр. 636). Ошибка состояла в утверждении, что выражение

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)\, dS_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik})\, dV \tag{4.2}$$

сводится к поверхностному интегралу только в случае $\sigma_{ki} = \sigma_{ik}$. На самом деле может быть: $(\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) = \partial\mu_{ikj}/\partial X_j$, см. формулу (2.8), то есть асимметричная составляющая тензора напряжений может выражаться через дивергенцию тензора более высокого ранга (двойного напряжения Миндлина).

Р. И. Нигматулин в статье обзорного типа [9] также развивает метод интегрирования микроуравнений по элементарному макрообъему, использует понятия микро- и макрокоординат, трех типов осреднения и т. п., то есть по существу повторяет методологию книги [3], хотя и не ссылается на нее. Отличие состоит лишь в том, что вслед за Ю. А. Буевичем [6], в работе [9] принимается утверждение об эквивалентности осреднения по объему к плоским поверхностям. Более того, Р. И. Нигматулин претендует на доказательство этого, вообще говоря, неверного положения.

В самом деле, можно сформулировать ([3], стр. 13) условие, когда средние по объему и по плоским сечениям, независимо от ориентации последних, равны между собой. Действительно, из равенства

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} \sigma_{ij} dV = \frac{1}{\Delta X_j} \int\limits_{\Delta X_j} \langle \sigma_{ij} \rangle_j d\xi_j \tag{4.3}$$

следует, что

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle_j \tag{4.4}$$

при $\langle \sigma_{ij} \rangle_j = \text{const}$. Если же $\langle \sigma_{ij} \rangle_j = f(X_j)$, то условие (4.4) справедливо лишь приближенно. В самом деле, подставим разложение

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_j (X_k + \xi_k) = \langle \sigma_{ij} \rangle_j (X_k) + \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle_j}{\partial X_k} \xi_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle \sigma_{ij} \rangle_j}{\partial X^2} \xi_k^2 + \cdots$$

в интеграл (4.3). Тогда получим оценку нарушения равенства (4.4)

$$\langle \sigma_{ij} \rangle - \langle \sigma_{ij} \rangle_j = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle \sigma_{ij} \rangle_j}{\partial X_k^2} \frac{\Delta X^2}{12} \tag{4.5}$$

Если бы можно было устремить $\Delta X_k \to 0$, то получился бы результат (4.4), однако правая часть (2.11) оказалась бы тождественно совпадающей с локальным значением σ_{ij} (при $\Delta X_j \to 0$ стремится к нулю и площадь осреднения ΔS_j).

Итак, по оценке (4.5) возможное нарушение равенства (4.4) имеет порядок ΔX^2, то есть по крайней мере порядка квадрата масштаба микроструктуры λ^2. Если же учесть, что средне-объемный тензор напряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ симметричен, поскольку симметричен локальный тензор σ_{ij} напряжений, то именно правая часть оценки (4.5) будет главным членом антисимметричной компоненты тензора макронапряжений, которая и входит в уравнение моментов количества движения. С другой стороны, в уравнении баланса моментов количества движения инерционные члены будут пропорциональны произведению $\lambda^2 d\omega/dt$, где ω — угловая скорость в объеме ΔV, поскольку момент инерции имеет порядок $\rho\lambda^2\Delta V$. Как и следовало ожидать, нарушение (или выполнение) правила парности касательных напряжений (симметричности) тензора макронапряжений связано с балансом момента количества движения, а не с формализмом процедуры осреднения.

Р. И. Нигматулин [9] считает, что правой частью (4.5) можно пренебречь, хотя и записывает равенство (4.4) приближенно $\langle \sigma_{ij} \rangle \approx \langle \sigma_{ij} \rangle$, и вводит, вслед за Ю. А. Буевичем, силу типа (4.1), учитывающую, однако, (в отличие от [6, 7]) эффект собственного вращения взвешенной частицы. В результате рекомендуется [9] во изменение более ранних формулировок [10] учитывать эффект асимметрии практически так же, как и в [3]. Введение объемной силы (4.1) носит характер переобозначения.

В. Л. Бердичевский [11] анализирует движение суспензий взвешенных частиц, используя модельное представление об их периодическом распределении в несущей жидкости. Использование вариационного метода и частных предположений о характере течения в индивидуальной ячейке позволяет В. Л. Бердичевскому избежать явного введения средних интегрально-поверхностных представлений параметров движения. В его работе обсуждаются лишь средние по объему величины; с этой целью проводится осреднение по объему не уравнений, а их решений. Существенно, однако, что и при таком подходе тензор макронапряжений, определяемый как производная от диссипативной функции по кинематическим переменным, оказывается несимметричным, как и в работе [4].

Наконец, Ю. А. Буевич в недавней работе [12] представил момент взаимодействия между фазами через разность угловых скоростей движения жидкости, как и в [4], но не учитывает, что этот момент уравновешен в несущей жидкости антисимметричными составляющими макронапряжений.

5. *Некоторые замечания.* Подводя итог многолетней дискуссии по учету асимметричных эффектов для суспензий твердых частиц в вязкой жидкости, можно отметить, что к настоящему времени ее участники фактически пришли к выводам, аналогичным работе [4]. Что же касается метода осреднения по объему уравнений микродвижения, который непосредственно приводит к асимметрии тензора макронапряжений, то некоторые авторы стараются его избежать, а другие так видоизменить, чтобы все приемы введения средних величин оказались эквивалентными. Это обстоятельство объясняется тем, что метод осреднения по объему, если признать его справедливым, требует существенной переоценки известных теорий турбулентных потоков и статистической теории микронеоднородных твердых тел.

Обратимся в этой связи к известным постулатам осреднения [13]. Среди них центральное место занимает свойство коммутативности операций осреднения и дифференцируемости:

$$\langle \partial f/\partial x \rangle = (\partial/\partial x) \langle f \rangle \tag{5.1}$$

где символ $< \cdots >$ означает избранную процедуру осреднения. Рассмотрим с этой точки зрения операцию осреднения («сглаживания») по объему. Тогда левая часть (5.1) представима в виде

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{\Delta X_j}\int\limits_{X_j-(\Delta X_j/2)}^{X_j+(\Delta X_j/2)} \frac{\partial}{\partial x_j}\langle f\rangle_j dx_j =$$

$$= \frac{\langle f\rangle_j (X_j+\Delta X_j/2;\, \chi)-\langle f\rangle_j (X_j-\Delta X_j/2;\, \chi)}{\Delta X_j} = \frac{\Delta\langle f\rangle_j}{\Delta X_j}$$

где $\langle f\rangle_j = \langle f\rangle_j (X_j)$. Отсюда видна перестановочность осреднения и дифференцирования, если помнить, что при осреднении происходит изменение масштаба описания, а потому $\Delta\langle f\rangle_j/\Delta X_j \approx \partial\langle f\rangle_j/\partial X_j$— дифференциальная операция в *новом масштабе*, и что:

$$\langle f\rangle_j (X_j \pm \Delta X_j/2;\, \chi) = f(X_j \pm \Delta X_j/2)$$

не зависит уже от параметра случайности χ. Последнее выполняется для «представительной» (включающего в себя весь ансамбль реализаций) площадки ΔS_j. Кроме того, произошел естественный переход от осреднения по объему ΔV к осреднению по ориентированной площадке. Полная аналогия с правилом (5.1) достигается, если принять гипотезу:

$$\langle f\rangle = \langle f\rangle_j$$

Укажем в заключение, что асимметричная механика турбулентности, построенная [14] методом осреднения по объему при сохранении условия $R_{ij} = -\langle \rho v_i v_j\rangle_j \neq R_{ji} = -\langle \rho v_j v_i\rangle_i$, объяснила эксперименты по ближнему следу за телом [15], позволила учесть в краевых условиях эффект шероховатости [16] и обобщена на случай магнитной гидродинамики [17].

Վ. Ն. ՆԻԿՈԼԱԵՎՍԿԻ

ԸՍՏ ԾԱՎԱԼԻ ՄԻՋԻՆԱՑՈՒՄԸ ՈՐՊԵՍ ՆԵՐՔԻՆ ԿԱԶՄՈՒԹՅԱՄԲ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴ

Ամփոփում

Մեթոդի էությունը կայանում է դաշտի դիֆերենցիալ հավասարումների միջինացումը ըստ ծավալի և ինտեգրալների ներկայացումը վերջավոր-տարբերական ձևով։

Մեթոդը ցուցադրվում է միկրոանհամասեռ միջավայրերի առաձգականության օրինակի վրա։ Նշվում են նաև ուրիշ կիրառություններ։

VOLUME AVERAGING AS A METHOD OF DEVELOPEMENT OF MATHEMATICAL MODELS OF MEDIA WITH INTERNAL STRUCTURE

V. N. NIKOLAEVSKII

S u m m a r y

The method consists of volume averaging of differential field equations and of representing integrals in a finite-difference form. The associated change in the scale of description leads to the interpretation of these finite-difference equations as continuous ones. However, new rheological laws are needed. The method is illustrated by the example of elasticity of microheterogeneous media. Some other applications are also noted.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николаевский В. Н.* Тензор напряжения и осреднение в механике сплошных сред. ПММ, 1975, вып. 2.
2. *Миндлин Р. Д.* Микроструктура в линейной упругости. Сб. пер. «Механика», 1964, № 4 (86).
3. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М., Изд-во «Недра», 1970.
4. *Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н.* К построению асимметричной гидромеханики суспензий с вращающимися твердыми частицами. В сб.: «Проблемы гидромеханики и механики сплошной среды». (К 60-летию академика Л. И. Седова). М., «Наука», 1969.
5. *Brenner H.* Rheology of two-phase systems. Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 2, Ann. Rev. Inc., Palo Alto, 1970. (русс. пер. в сб. „Реология суспензий", М., „Мир", 1975).
6. *Буевич Ю. А., Марков В. Г.* Континуальная механика монодисперсных суспензий. ПММ, 1973, т. 37, № 5 (часть 1), № 6 (часть 2).
7. *Batchelor G. K.* The stress system in a suspension of force-free particles. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt. 3.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Г. М.* Механика сплошных сред, изд. 2, М., Гостехиздат, 1953.
9. *Нигматулин Р. И.* Осреднение при математическом моделировании многофазных и, в частности, дисперсных смесей. В сб. «Аэрогазодинамика и физическая кинетика». Ин-т теоретич. и прикл. механики СО АН СССР, Новосибирск, 1970.
10. *Нигматулин Р. И.* Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. ПММ, 1970, т. 34, № 6.
11. *Бердичевский В. Л.* Об осреднении периодических структур. ПММ, 1977, т. 41, № 6.
12. *Буевич Ю. А., Щелчкова И. Н.* Реологические свойства однородных мелкодисперсных суспензий. Стационарные течения. Инст. физ. журнал., 1977, т. 33, № 5.
13. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. II, М.—Л., ГТТИ, 1948.

14. *Николаевский В. Н.* Асимметричная механика турбулентных потоков. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
15. *Iskenderov D. Sh., Nikolaevskii V. N.* Turbulent wake of a body and asymmetric hydrodynamics. Letters in Appl. Engng. Sci., 1977, vol. 5, No. 3.
16. *Николаевский В. Н., Искендеров Д. Ш., Коржов Е. Н.* Турбулентная жидкость как сплошная среда с внутренней структурой. Труды III Всесоюзн. семинара по моделям сплошн. среды. Новосибирск, 1976.
17. *Artemov M. A., Nikolaevskii V. N.* On equation of asymmetric turbulence in magnetohydrodynamics. Letters in Appl. Engng. Sci., 1976, vol. 4, No. 3.