

Р. Н. КИРАКОСЯН

О РАЦИОНАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЗАЩЕМЛЕННОЙ
КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ
МАТЕРИАЛА

Задачам проектирования равнопрочных упругих пластинок посвящены работы [1, 2] и др. Наиболее полное представление о современном состоянии вопроса рационального проектирования конструкций можно составить с помощью работ [3, 4].

Известно [5], что если спроектировать тонкостенную конструкцию такой переменной толщины, при которой во всей конструкции 1) удовлетворяется условие текучести в смысле обобщенных напряжений, 2) удельная диссипация энергии деформирования принимает постоянное значение, 3) существует кинематически возможное поле перемещений, то такая конструкция будет иметь наименьший объем. В работе [6] в рамках деформационной теории пластичности произвольного упрочняющегося материала показано, что равнопрочная пластинка отвечает этим требованиям и решена задача проектирования шарнирно опертой круглой пластинки наименьшего объема.

Задача с помощью введения неизвестной постоянной [7] сводилась к задаче Коши относительно двух дифференциальных уравнений первого порядка.

При численном интегрировании этой системы выяснилось, что граничное условие шарнирного опирания удовлетворяется за счет превращения в нуль толщины, вследствие чего кривизна пластинки в радиальном направлении вблизи опорной кромки принимает неограниченно большое значение, и машина не может продолжать процесс интегрирования до удовлетворения условия заделки. В настоящей заметке показывается, что при подходящем вмешательстве машина может проинтегрировать дифференциальные уравнения задачи до удовлетворения граничного условия заделки.

1. Как было показано в [6], равнопрочная пластинка обладает свойством постоянства удельной диссипации энергии деформаций и имеет наименьший объем. Путем введения неизвестной постоянной и специальных обозначений [7], задача проектирования пластинки наименьшего объема при произвольном упрочнении материала сводится к задаче Коши относительно системы

$$\frac{dx}{dr} = v, \quad \frac{d\sigma}{dr} = v \frac{30x^2 - 39xv + 10v^2 + (\bar{P}_1)^{5/2} \frac{q}{v} e^{-2\sigma}}{15x^2 - 24xv + 8v^2} \quad (1.1)$$

Здесь

$$r = ce^{-\rho}, \quad \kappa = -\frac{h_0}{2\varepsilon_2} \kappa_2, \quad \bar{P}_\kappa = 3\kappa^2 - 3\kappa\nu + \nu^2, \quad \bar{q} = \frac{c^2}{3\sqrt{3}F\bar{h}_0^2\varepsilon_2^3}q$$

$$\dot{h}_i = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\bar{P}_\kappa}} \kappa_0 h_0, \quad F = \frac{1}{3\varepsilon_1^3} \int_0^{\varepsilon_1} \varepsilon_i \varepsilon_i d\varepsilon_i, \quad h_0 = h|_{r=0} = \frac{c}{\kappa_0} \sqrt{\frac{2q}{3\sqrt{3}F\bar{h}_0^2}}$$

$$\kappa_0 = \kappa|_{r=0}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_i|_{z=\pm h/2} \quad (1.2)$$

h — толщина, r — расстояние от центра, ε_2 — предел упругих деформаций материала, κ_2 — кривизна в кольцевом направлении пластинки, q — интенсивность изгибающей нагрузки, c — неизвестная постоянная, ε_i и σ_i — интенсивности деформаций сдвигов и касательных напряжений.

Интегрирование уравнений (1.1) производится от некоторого достаточно большого ρ , при начальных значениях κ , ν , определяемых из асимптотических разложений

$$\kappa = \kappa_0 + \frac{3\sqrt{3}}{40} \frac{\kappa_0^2 q e^{-2\rho}}{\kappa_0 q e^{-2\rho}} + \dots$$

$$\nu = -\frac{3\sqrt{3}}{20} \frac{\kappa_0^2 q e^{-2\rho}}{\kappa_0 q e^{-2\rho}} + \dots \quad (1.3)$$

и кончается там ($\rho = \rho_2$), где удовлетворяется граничное условие задачи. В случае шарнирного опирания это условие имеет вид

$$\frac{3\kappa - 2\nu}{(\bar{P}_\kappa)^{3/2}} \Big|_{\rho_a = \rho_m} = \bar{M}_1 \Big|_{\rho_a = \rho_m} = 0, \quad \left(M_1|_{r=a} = \frac{q}{q} c^2 \bar{M}_1|_{r=a} = 0 \right) \quad (1.4)$$

в случае же заделки —

$$\kappa \Big|_{\rho_a = \rho_2} = -\frac{h_0}{2\varepsilon_2} \frac{1}{a} \frac{dw}{dr} \Big|_{r=a} = 0 \quad (1.5)$$

(здесь a — радиус пластинки).

Значение неизвестной постоянной определяется по формуле

$$c = ae^{\rho_a} \quad (1.6)$$

Исследования показывают, что сначала удовлетворяется условие шарнирного опирания (1.4). При этом, когда $\rho \rightarrow \rho_m + 0$, значение $\nu = \frac{h_0}{2\varepsilon_2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)$ при умеренных κ стремится к минус бесконечности, и машина не может переходить за точку $\rho = \rho_m$. С целью продолжения процесса вычислений за значение ρ_m необходимо предварительно определить значения κ и ν для некоторой точки $\rho_2 = \rho_m - \varepsilon$, находящейся в другой стороне точки $\rho = \rho_m$ на достаточно малом расстоянии

и принимать эти значения в качестве начальных условий для дальнейшего интегрирования уравнения (1.1). При переходе через линию $\rho = \rho_m$ изгибающие моменты меняют свои знаки, в силу чего соответствующим образом меняется и картина деформирования пластинки. Если при $\rho \rightarrow \rho_m + 0$ значение $v \rightarrow -\infty$, то при $\rho \rightarrow \rho_m - 0$, наоборот, $v \rightarrow +\infty$. Фактически пластинка шарнирами, распределенными вдоль кольцевой окружности $\rho = \rho_m$ ($r = r_m$), разделяется на две — среднюю [$\rho > \rho_m$ ($0 \leq r < r_m$)] и наружную [$\rho_m > \rho > \rho_m$ ($r_m < r \leq a$)] части. Причем, на линии раздела толщина пластинки равна нулю, а кривизна в радиальном направлении d^2w/dr^2 не определена. На этой линии нет материала и для нее не имеет смысла говорить о соблюдении достаточных условий наименьшего объема, в частности, о виртуальности перемещений. Остается вопрос о характере сопряжения двух частей, обеспечивающем наименьший объем всей пластинки. При $\rho \rightarrow \rho_m + 0$ значение v убывает очень быстро (от умеренных значений стремится к минус бесконечности в промежутке, не превышающем 1% радиуса пластинки). Естественно, значение v будет так быстро убывать и при удалении от линии раздела $\rho = \rho_m$ в другую сторону. Действительно, расчеты показывают, что в точках наружной части пластинки, близких к линии раздела ρ_m , для значения v можно взять любое достаточно большое положительное число и это почти не отражается на результатах решения. В силу этого можно полагать

$$v \Big|_{\rho_m - \varepsilon} = -v \Big|_{\rho_m + \varepsilon} \quad (1.7)$$

Так как при удалении от центра прогибы пластинки монотонно должны убывать, то $\chi = -\frac{h_0}{2\varepsilon} \frac{1}{a} \frac{dw}{dr}$ будет положительной и для кольцевой части пластинки. При $\rho \rightarrow \rho_m + 0$ значение χ стремится к конечной величине. С точки зрения формального соблюдения виртуальности деформаций необходимо χ продолжать в кольцевую область пластинки непрерывно. Однако, как уже отмечалось, соблюдение виртуальности деформаций на шарнирной окружности раздела $\rho = \rho_m$ из-за отсутствия материала не обязательно, следовательно, не обязательна и непрерывность χ на этой линии. Поэтому для χ нужно полагать

$$\chi \Big|_{\rho_m - \varepsilon} = \chi_1 \quad (1.8)$$

где χ_1 следует выбирать так, чтобы объем пластинки оказался наименьшим.

В табл. 1 приводятся безразмерные значения толщины в середине и объема пластинки, вычисленные при разных χ_1 , когда $\chi_0 = 1$.

Как видно из табл. 1, значения толщины в середине $\frac{h_0}{a} \sqrt{\frac{\sigma_s}{(1-\nu^2)q}}$ с возрастанием χ_1 монотонно убывают, а объем $\frac{V}{\pi a^3} \sqrt{\frac{\sigma_s}{(1-\nu^2)q}}$ свое

Таблица 7^а

z_1	1.5	1.75	$1.987 = z _{\rho_m+0}$	2.25	2.5
$\frac{h_0}{a} \sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}}$	0.9308	0.8636	0.8004	0.7337	0.6739
$\frac{V}{\pi a^3} \sqrt{\frac{\tau_s}{q(1-\nu^2)}}$	0.5448	0.5341	0.5317	0.5344	0.5422

наименьшее значение принимает при $z_1 = z|_{\rho_m+0}$, то есть при непрерывном продолжении z в кольцевую область пластинки.

Имея в виду вышесказанное, можно полагать

$$z|_{\rho_m-\varepsilon} = z|_{\rho_m+\varepsilon}, \quad v|_{\rho_m-\varepsilon} = -v|_{\rho_m+\varepsilon} \quad (1.9)$$

Используя этот прием, можно получить решение задачи не только при защемлении, но и при шарнирном опирании, когда, кроме поверхностной нагрузки, к опорной кромке пластинки приложены изгибающие моменты обратного направления. Таким образом, один раз интегрируя уравнения (1.1) до удовлетворения условия заделки (1.5), попутно получают решения задачи при любых граничных условиях. Причем, эти решения не зависят от физико-механических характеристик материала и носят общий характер.

В табл. 2 представлены некоторые результаты решения задачи защемленной равнопрочной пластинки под действием равномерно-распределенной нагрузки (столбцы 1—8). С целью сравнения приводится также решение задачи упруго-пластического изгиба защемленной пластинки постоянной толщины [7] (столбцы 9—14). В рассмотренном случае ($\nu_s = 1$, $\lambda = 0.95$) экономия в объеме доходит до 26%.

Для наглядности на фиг. 1 и 2 представлены графики изменения безразмерных прогибов

$$w^* = \frac{w}{a^2 z_s} \sqrt{\frac{q(1-\nu^2)}{\sigma_s}} \text{ и толщины } h^* = \frac{h}{a} \sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}}$$

равнопрочной пластинки и пластинки постоянной толщины.

Любопытно отметить, что у упругих и упруго-пластических защемленных пластинок постоянной толщины d^2w/dr^2 , M_r , M_θ превращаются в нуль в разных сечениях, а у рациональной пластинки M_r и M_θ превращаются в нуль одновременно в сечениях перегиба деформированной поверхности пластинки, где d^2w/dr^2 скачкообразно меняет свой знак.

При несжимаемости материала для всех пластинок в сечениях заделки $M_r = 2M_\theta$.

Рациональная пластинка в середине и в сечениях заделки имеет одинаковую толщину.

Таблица 2

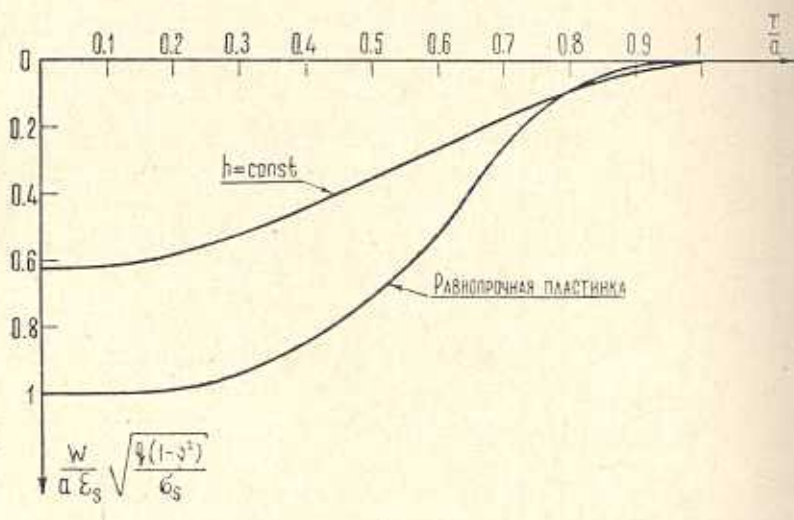
Пластина постоянной толщины

Равноречная пластина

$\gamma_0 = 1, \rho_m = 0.761, \rho_s = 0.334, c/a = 1.396, \bar{q} = 10, \lambda = 0.95$
 $\frac{h_0}{a} \sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}} = 0.803, \frac{V}{\pi a^3} \sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}} = 0.531,$
 $\frac{w^*}{a \bar{\epsilon}_s} \sqrt{\frac{q(1-\nu^2)}{\sigma_s}}, h^* = \frac{h}{a} \sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}}$
 $\gamma_0 = 1, \rho_m = 2.325, \rho_s = -0.0764, c/a = 0.926,$
 $\bar{q} = 10, h^* = 0.717,$
 $\frac{V}{\pi a^3} \sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}} = 0.717, \lambda = 0.95$

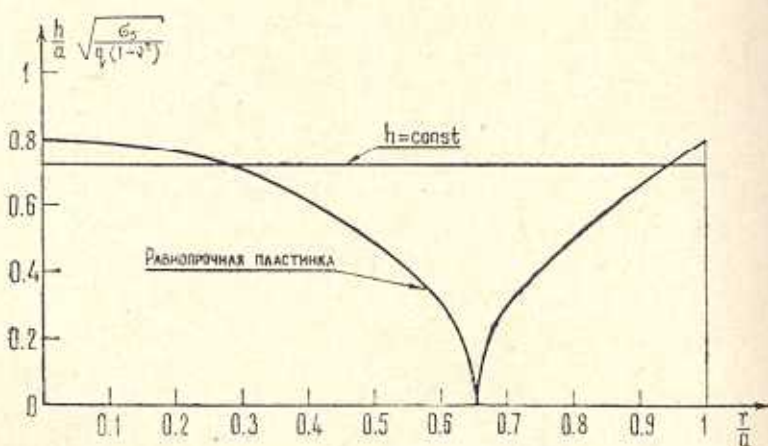
ρ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	r/a	γ	ν	h^*	\bar{M}_1	\bar{M}_2	w^*	ϕ	r/a	γ	ν	$3\lambda - 2\nu$	w^*	
3	0.070	1.003	-0.006	0.794	0.570	0.569	1.037	3	0.046	1.000	0.002	3	0.627	
2.6	0.104	1.007	-0.015	0.789	0.562	0.559	1.028	2.6	0.069	0.997	0.018	2.954	0.622	
2.0	0.189	1.025	-0.052	0.761	0.527	0.519	0.999	2.2	0.103	0.981	0.047	2.859	0.615	
1.6	0.282	1.058	-0.129	0.712	0.466	0.448	0.940	1.8	0.153	0.956	0.101	2.667	0.598	
1.4	0.344	1.092	-0.215	0.667	0.412	0.388	0.886	1.4	0.228	0.898	0.196	2.303	0.560	
1.3	0.380	1.116	-0.285	0.635	0.375	0.348	0.852	1.2	0.279	0.853	0.261	2.037	0.528	
1.1	0.465	1.196	-0.552	0.541	0.278	0.245	0.750	1.0	0.341	0.794	0.331	1.718	0.485	
0.9	0.568	1.375	-1.482	0.370	0.135	0.107	0.580	0.8	0.416	0.720	0.400	1.361	0.423	
0.78	0.640	1.725	-6.995	0.143	0.021	0.013	0.414	0.55	0.535	0.609	0.508	0.810	0.320	
0.761	0.652	1.987	-55.707	0.024	0.001	0	0.375	0.40	0.621	0.524	0.630	0.313	0.242	
0.72	0.680	1.421	8.574	0.211	-0.046	-0.015	0.307	0.35	0.653	0.491	0.682	0.109	0.213	
0.59	0.774	0.689	4.028	0.453	-0.210	-0.069	0.122	0.325	0.669	0.473	0.711	0	0.198	
0.50	0.847	0.379	2.940	0.579	-0.346	-0.131	0.044	0.20	0.759	0.375	0.884	-0.643	0.124	
0.40	0.936	0.128	2.140	0.710	-0.524	-0.236	0.010	0.10	0.838	0.278	1.061	-1.288	0.065	
0.34	0.993	0.011	1.772	0.790	-0.649	-0.326	0	0	0.926	0.160	1.357	-2.235	0.019	
0.334	1	0	1.738	0.797	-0.662	-0.331	0	-0.0764	1.0	0	3.773	-7.545	0	

В задачах оптимального проектирования плит от нулевых толщин можно «освободиться» двумя способами:



Фиг. 1.

а) решить задачу по уточненной теории, то есть с учетом влияния деформаций поперечных сдвигов, совсем не имея дело с нулевыми толщинами;



Фиг. 2.

б) решить задачу по классической теории, получить «теоретическую» толщину, которая в сечениях, где отсутствуют изгибающие моменты, превращается в нуль. Далее, толщину этих «нулевых» сечений определить из условия касательных напряжений при одинаковом коэффициенте запаса. Первый способ является более точным, но существенно сложнее, чем второй. Однако, результаты, полученные этими двумя способами практи-

чески не будут отличаться друг от друга, так как для тонких изотропных плит, особенно на участках малых толщин, поправки уточненных теорий ничтожны.

Поэтому применение уточненной теории только с целью освобождения от «нулевых» толщин не оправдывается. С другой стороны, если толщину плиты в «нулевом» сечении определить из условия касательных напряжений (неважно каким способом), то все равно реальная конструкция не получится, так как вместо нулевой толщины теперь получится опять нереальная толщина в десятки раз меньшая, чем в центре пластинки.

В рассмотренном примере «нулевым» является сечение $r_0 = 0.65a$ (фиг. 2), перерезывающее усилие в котором будет

$$Q = \frac{qr_0}{2} = 0.325 qa \quad (2.1)$$

Если считать, что касательные напряжения по толщине пластинки распределяются по параболическому закону, то для толщины этого сечения получим

$$h_{\min} = \frac{3qr_0}{4\tau_{\max}} \quad (2.2)$$

где τ_{\max} — максимальное значение касательных напряжений по толщине.

Интенсивность касательных напряжений имеет вид

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{rz}^2} \quad (2.3)$$

Так как при $r = r_0$ $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$, то

$$\sigma_t|_{r=r_0} = \sqrt{3} \tau_{rz} \quad (2.4)$$

Имея в виду, что в рассмотренном случае

$$\sigma_t = E\epsilon_t \left[1 - \lambda \left(1 - \frac{\epsilon_s}{\epsilon_t} \right) \right], \quad \alpha_0 = 1, \quad \frac{\epsilon_t}{\epsilon_s} \Big|_{z=h/2} = 2 \quad (2.5)$$

то

$$\sigma_t|_{z=h/2} = 2\sigma_s (1 - 0.5\lambda) \quad (2.6)$$

где σ_s — предел упругости.

В сечении $r = r_0$ это условие примет вид

$$\sqrt{3} \tau_{\max} = 2\sigma_s (1 - 0.5\lambda) \quad (2.7)$$

С учетом (2.2) и (2.7) находим

$$h_{\min} = \frac{3\sqrt{3} r_0}{8(1 - 0.5\lambda)} \frac{q}{\sigma_s} \quad (2.8)$$

Для максимальной толщины при $\lambda = 0.95$ имеем (фиг. 2, табл. 2)

$$h_{\max} = 0.803a \sqrt{\frac{q(1-\nu^2)}{\sigma_s}} \quad (2.9)$$

Тогда

$$h_{\min} = 0.803a \frac{q}{\sigma_s} \quad (2.10)$$

Отношение этих толщин будет

$$\frac{h_{\max}}{h_{\min}} = \sqrt{\frac{\sigma_s(1-\nu^2)}{q}} \quad (2.11)$$

Для реальных конструкций $\frac{\sigma_s}{q} \approx 100 \div 500$ и $\frac{h_{\max}}{h_{\min}} = 10 \div 20$.

Таким образом, если исходить из условия касательных напряжений, то в сечении $r = r_s$ толщину следует брать в десятки раз меньше, чем в центре пластинки. Такая пластинка не реальна. Обычно, толщину «нулевых» сечений выбирают из других соображений. Практическую толщину в сечении $r = r_s$ можно принять, например,

$$h_{\min} = 0.3 h_{\max} \quad (2.12)$$

Как видно из графика фиг. 2, длина участка утолщения будет примерно $0.1a$. При этом объем пластинки увеличится на 2%. Это имеет смысл, так как окончательная экономия вместо 26% составит теперь 24%, но зато пластинка будет уже реальной.

В задачах пластинок, работающих за пределами упругости материала, вопрос учета геометрической нелинейности приобретает особо важное значение. Однако, это не означает, что геометрически линейная постановка задач вообще не приемлема. Например, в случае, рассмотренном в пункте 1,

$$\frac{w}{h} = \frac{m}{n} \frac{\sigma_s \varepsilon_s}{q(1-\nu^2)} \quad (2.13)$$

где

$$m = \frac{w}{a \varepsilon_s} \sqrt{\frac{q(1-\nu^2)}{\sigma_s}}, \quad n = \frac{h}{a} \sqrt{\frac{\sigma_s}{q(1-\nu^2)}} \quad (2.14)$$

Полагая $\sigma_s/q = 100$, $\nu = 0.5$, $\varepsilon_s = 10^{-3}$, получим

$$\frac{w}{h} = 0.133 \frac{m}{n} \quad (2.15)$$

При $r_0 = 0.65a$, $m = 0.4$ (фиг. 1), в силу чего, чтобы $\frac{w}{h} \Big|_{r=r_s} < \frac{1}{5}$, нужно выполнение неравенства

$$n|_{r=r_0} > 0.267 \tag{2.16}$$

Имея в виду, что для центра пластинки $n = 0.803$, находим

$$\frac{h_{r=r_0}}{h_{\max}} \geq \frac{0.267}{0.803} = 0.33 \tag{2.17}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие применения геометрически линейной постановки $\left(\frac{w}{h} < \frac{1}{5}\right)$ [8] в остальных сечениях пластинки удовлетворяется с большим запасом.

Таким образом, в рассмотренном случае при $h|_{r=r_0} = \frac{h_{\max}}{3}$ задачу можно решать в геометрически линейной постановке.

Следует отметить, что это заключение верно с запасом, так как утолщая пластинку вблизи сечения $r = r_0$, прогибы считали прежними.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 5 XII 1977

Բ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՆՅՈՒԹԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻՑ ԳՈՒՐՍ ԱՄՐԱԿՑՎԱՅ
ԿՂՈՐ ՍԱԼԻ ՌԱՅԻՈՆԱԿ ՆԱԽԱԳԻՄՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Կամայական ամրապնդվող նյութի փոքր առաձգա-պլաստիկական տեսության շրջանակներում դիտարկվում է ամենափոքր ծավալի միաշերտ ամրակցված կլոր սալի նախագծման խնդիրը: Նվազագույն ծավալի բավարար պայմանների օգտագործումով խնդիրը թերվում է գեֆորմացված սալի կորության նկատմամբ եզրային խնդիրն: Անհայտ հաստատունի ներմուծմամբ եզրային խնդիրը հանգեցվում է Կոշու խնդիրն: Բերվում է կոնկրետ օրինակ:

ON RATIONAL DESIGN OF A ROUND FASTENED PLATE
BEYOND MATERIAL ELASTICITY BOUNDARY

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

Using the Drucker-Shield conditions the problem is solved to design a round fastened one-layer plate of the smallest volume for an arbitrary hardened material. The rational joining of the middle and circular parts of the plate is discussed.

A particular example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширко И. В. О форме равнопрочной пластинки. Инж. журнал, 1965, т. 5, вып. 2.
2. Лукин В. А. Осесимметричный изгиб равнопрочных пластинок. Изв. ВУЗов, сер. «Машиностроение», 1971, № 1.
3. Чирас А. А., Баркаускас Э., Каркаускас Р. П. Теория и методы оптимизации упруго-пластических систем. Л., Стройиздат, 1974.
4. Фейтман М. И., Шапиро Г. С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М., «Наука», 1976.
5. Шилд Р. Методы оптимального проектирования конструкций. Сб. Механика, 1962, 2 (72).
6. Киракосян Р. М. Об одной задаче круглой пластинки наименьшего объема за пределами упругости материала. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. XXX, № 1.
7. Ильюшин А. А. Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
8. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., Гостехиздат, 1956.