ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, №3, 1979 Механика

М. В. БЕЛУБЕКЯН

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН

Динамическое поведение упругих систем под действием сил диссипативного характера представляет интерес, в частности, потому, что такие силы могут быть причиной дестабилизации системы, хотя в большинстве случаев они приводят к демпфированию колебаний [1, 2].

В настоящей работе рассматривается простой пример такой нагрузки, обусловленной взаимодействием магнитного поля и упругими колебаниями электропроводящей пластинки. Другая модель, учитывающая демпфирование, изучалась в [3].

1. Уравнение, описывающее магнитоупругие колебания пластинки, находящейся в постоянном поперечном магнитном поле $\mathbf{H}_0$, при справедливости гипотезы магнитоупругости тонких тел имеет следующий вид [4]:

$$D\triangle^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2\sigma h^3}{3c^2} H_0^2 \frac{\partial \triangle w}{\partial t} \tag{1.1}$$

Здесь $w$ — поперечные перемещения частиц пластинки, $2h$ — толщина, $D$ — жесткость пластинки, $\rho$ — плотность, $\sigma$ — электропроводность материала пластинки, $c$ — постоянная, равная скорости света в пустоте.

Аналогичное уравнение в случае, когда пластинка служит проводником равномерно распределенного продольного электрического тока плотности $\mathbf{J}_0$, приводится к виду [4, 5]

$$D\triangle^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{(4\pi)^2 \sigma}{c^4} j_0^2 \frac{2h^5}{15} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \tag{1.2}$$

Здесь координатная плоскость $(x, y)$, совпадающая со срединной плоскостью пластинки, выбрана так, что направление электрического тока совпадает с направлением оси $Ox$.

В частном случае, когда колебания зависят только от координаты $x$, уравнения (1.1) и (1.2) записываются в одинаковой форме

$$a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \delta \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.3}$$

где $a^2 = D/(2\rho h)$, $\delta = \sigma h^2 H_0^2/(3\rho c^2)$ в случае поперечного магнитного поля и $\delta = (4\pi)^2 \sigma h^4 j_0^2/(15\rho c^4)$ в случае токонесущей пластинки.

В дальнейшем изучаются решения частных задач для уравнения (1.3).

2. Рассмотрим задачу магнитоупругих колебаний бесконечной пластинки ($-\infty < x < \infty$) при следующих начальных условиях:

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial w(x, 0)/\partial t = \psi(x) \tag{2.1}$$

Решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям (2.1), приводится в [5]. В случае $\delta < 2a$ решение представляет периодические колебания с экспоненциальным затуханием возмущений, обусловленным параметром $\delta$ (наличием магнитного поля).

В случае же $\delta = 2a$ решение указанной задачи имеет вид [5]

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{3}{2} - \frac{(\xi - x)^2}{2\delta t} \right] \varphi(\xi) + t\psi(\xi) \right\} \exp\left[ - \frac{(\xi - x)^2}{2\delta t} \right] d\xi \tag{2.2}$$

Из (2.2) видно, что возмущения, обусловленные начальным возмущением $\psi(x)$, стремятся к бесконечности при $t \to \infty$. Таким образом, магнитное поле приводит к неустойчивости пластинки при условии, что $\delta = 2a$ и $\psi(x) \neq 0$.

Следует отметить, что условие $\delta = 2a$ требует наличия сильного магнитного поля напряженностью порядка $10^5$ *гаусс*.

Решение (2.2), полученное в [5] при помощи интегральных преобразований Фурье и Лапласа, можно получить и другим способом.

Уравнение (1.3) имеет автомодельное решение следующего вида:

$$w = t^{\alpha}\Phi(\eta), \quad \eta = (x - x_0)/\sqrt{t}, \quad \tau = t \tag{2.3}$$

где $\alpha$ и $x_0$ — произвольные параметры.

Подставляя (2.3) в уравнение (1.3), для определения функции $\Phi(\eta)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$a^2\Phi^{IV} - \frac{\delta}{2}\eta\Phi^{III} - \left[ \delta(\alpha - 1) - \frac{\eta^2}{4} \right] \Phi^{II} - \left( \alpha - \frac{3}{4} \right)\eta\Phi^{I} +$$
$$+ \alpha(\alpha - 1)\Phi = 0 \tag{2.4}$$

Представляя решение уравнения (2.4) в виде

$$\Phi(\eta) = \exp(-\beta\eta^2) \tag{2.5}$$

и определяя произвольные параметры $\alpha$ и $\beta$ так, чтобы уравнение (2.4) удовлетворялось тождественно, что оказывается возможным только при условии $\delta = 2a$, получим следующее решение уравнения (1.3):

$$w = \sqrt{\frac{t}{2\pi\delta}} \exp\left[ - \frac{(x - x_0)^2}{2\delta t} \right] \tag{2.6}$$

Выражение (2.6) будет решением задачи магнитоупругих колебаний пластинки, удовлетворяющим условию $\delta = 2a$ и начальным условиям вида

$$w(x,\ 0)=0,\quad \partial w(x,\ 0)/\partial t=\delta(x-x_0)$$

где $\delta(x-x_0)$ — дельта-функция Дирака.

Решение (2.6), которое является частным случаем решения (2.2), показывает возрастание возмущений с течением времени.

Уравнение (2.4) имеет также частные решения в виде полиномов по $\eta$. Здесь они не приводятся, так как для рассматриваемых вопросов не представляют интереса. Более содержательные решения получаются при комбинировании полиномов по $\eta$ и функций вида (2.5). В частности, таким способом получается решение вида

$$w=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta t}}\left|\frac{3}{2}-\frac{(x-x_0)^2}{2\delta t}\right|\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\delta t}\right] \tag{2.7}$$

При получении (2.7) существенно используется условие $\delta=2a$.

Решение (2.7) удовлетворяет начальным условиям

$$w(x,\ 0)=\delta(x-x_0),\quad \partial w(x,\ 0)/\partial t=0$$

Решения (2.6) и (2.7) являются фундаментальными решениями задачи магнитоупругих колебаний бесконечной пластинки и, следовательно, решение при произвольных начальных условиях (2.1) имеет вид (2.2).

Таким образом, наличие добавочного члена, зависящего от скорости перемещения, в уравнении колебаний пластинки может привести к неустойчивости бесконечной пластинки.

Возникает вопрос — возможна ли неустойчивость для пластин конечных размеров?

3. Рассмотрим решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям (2.1) и следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} w(0,\ t)=0,&\quad \partial^2 w(0,\ t)/\partial x^2=0\\ w(l,\ t)=0,&\quad \partial^2 w(l,\ t)/\partial x^2=0\end{aligned} \tag{3.1}$$

Соответствующие задачи колебаний шарнирно-опертой пластины-полосы в поперечном магнитном поле или при наличии стороннего тока исследовались в [4—6].

Граничные условия (3.1) позволяют решать задачу методом разделения переменных. Представляя решение в виде

$$w=X(x)\,T(t) \tag{3.2}$$

получим для определения $X(x)$ самосопряженную задачу. При этом, в зависимости от параметра $\delta$, необходимо рассматривать три случая.

В случае $\delta<2a$ решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям (2.1) и граничным условиям (3.1), имеет вид

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{A_k\cos\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\sqrt{a^2-\delta^2/4}\,t\right]+B_k^{(1)}\sin\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\sqrt{a^2-\delta^2/4}\,t\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\delta}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right]\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.3}$$

где

$$A_k = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{k\pi\xi}{l}\, d\xi$$

$$B_k^{(1)} = \frac{l}{(k\pi)^2}(a^2 - \delta^2/4)^{-\frac{1}{2}} \int_0^l \left[\frac{\delta}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \varphi(\xi) + \psi(\xi)\right] \sin\frac{k\pi\xi}{l}\, d\xi$$

Из (3.3) видно, что в этом случае колебания имеют затухающий характер с экспоненциальным затуханием в зависимости от времени. Частоты колебаний, по сравнению с частотой собственных колебаний пластинки при $\delta = 0$, уменьшаются, причем уменьшение одинаково для всех гармоник. Следует отметить, что коэффициенты $B_k^{(1)}$, в отличие от $A_k$, более сложным образом зависят от начальных условий и, кроме того, зависят также от коэффициента $\delta$. С возрастанием $\delta$ (напряженности магнитного поля) коэффициенты $B_k^{(1)}$, характеризующие амплитуду колебаний, возрастают.

Если $\delta = 2a$, решение представляется в виде

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k^{(2)} t) \exp\left[-\frac{\delta}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right] \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.4}$$

где

$$B_k^{(2)} = \frac{1}{l}\int_0^l \left[\frac{\delta}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \varphi(\xi) + \psi(\xi)\right] \sin\frac{k\pi\xi}{l}\, d\xi$$

В этом случае колебания апериодические, так как начальные возмущения затухают со временем, не переходя положения равновесия. Здесь, в отличие от (3.3), характер затухания слагаемых, содержащих коэффициенты $A_k$ или $B_k^{(2)}$, в зависимости от времени, различный.

В случае $\delta > 2a$ решение имеет вид

$$w = \sum \left\{A_k^{(3)} \exp\left[-\frac{1}{2}(\delta^2 - 4a^2)^{1/2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right] + B_k^{(3)} \exp\left[\frac{1}{2}(\delta^2 - 4a^2)^{1/2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right]\right\} \exp\left[-\frac{\delta}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t\right] \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.5}$$

где

$$A_k^{(3)} = \frac{1}{2} A_k - \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2 (\delta^2 - 4a^2)^{-1/2} B_k^{(2)}$$

$$B_k^{(3)} = \frac{1}{2} A_k + \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2 (\delta^2 - 4a^2)^{-1/2} B_k^{(2)}$$

Характер колебаний здесь такой же, как и в случае $\delta = 2a$. При этом чем больше $\delta$ (напряженность магнитного поля), тем быстрее затухание слагаемых с коэффициентами $A_k^{(3)}$ и тем медленнее затухание слагаемых с коэффициентами $B_k^{(3)}$.

Таким образом, для ограниченной пластинки с граничными условиями (3.1) второй член уравнения (1.3) приводит к затуханию колебаний. Если для бесконечной пластинки условие $\delta = 2a$ есть условие перехода от затухающих колебаний к возрастающим во времени колебаниям, то при граничных условиях (3.1) условие $\delta = 2a$ означает переход от периодических колебаний с затуханием к апериодическим колебаниям.

4. Рассмотрим приближенные решения задачи для других граничных условий, не допускающих разделения переменных.

Пусть граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0, \quad \partial w(0, t)/\partial x = 0 \\ w(l, t) = 0, \quad \partial w(l, t)/\partial x = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

что соответствует условиям для пластинки, заделанной по краям $x = 0$ и $x = l$.

Представляя решение уравнения (1.3) в форме

$$w = X(x)\, e^{i\omega t} \tag{4.2}$$

и имея в виду граничные условия (4.1), для определения $X(x)$ получим самосопряженную задачу. Это обстоятельство позволяет надеяться, что метод Галеркина применим для задачи с граничными условиями (4.1). В качестве системы функций, используемых в методе Галеркина, берутся собственные функции соответствующей задачи колебаний пластинки в отсутствии магнитного поля ($\delta = 0$). Первые два приближения показывают, что характер колебаний аналогичен колебаниям с граничными условиями (3.1). Условие перехода от периодических колебаний к апериодическим определяется равенством $\delta \approx 1.72 \cdot 2a$. Точное решение этой же задачи [6] дает для условия перехода значение $\delta \approx 1.7 \cdot 2a$.

В случае граничных условий

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0, \quad \partial w(0, t)/\partial x = 0 \\ w(l, t) = 0, \quad \partial^2 w(l, t)/\partial x^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

подстановка (4.2) в уравнение (1.3) и условия (4.3) приводит к самосопряженной задаче относительно функции $X(x)$. Характер решения, полученного методом Галеркина, такой же, как и в случае граничных условий (3.1) и (4.2). Условие перехода от периодических колебаний к апериодическим дается равенством $\delta \approx 1.33 \cdot 2a$.

Рассмотрим уравнение (1.3) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0, \qquad \partial w(0, t)/\partial x = 0 \\ \partial^2 w(l, t)/\partial x^2 = 0, \qquad \partial^3 w(l, t)/\partial x^3 = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

которые соответствуют граничным условиям для полосы-пластины с заделанным краем при $x = 0$ и свободным краем при $x = l$.

Решение уравнения (1.3) представляется в виде

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\, u_k(x) \tag{4.5}$$

где

$$u_k = \sin\lambda_k x - \operatorname{sh}\lambda_k x - a_k(\cos\lambda_k x - \operatorname{ch}\lambda_k x)$$

$$a_k = (\cos\lambda_k l + \operatorname{ch}\lambda_k l)^{-1}(\sin\lambda_k l + \operatorname{sh}\lambda_k l)$$

Здесь $u_k(x)$ — известные собственные функции задачи колебаний консольной балки [7] (каждое слагаемое из (4.5) удовлетворяет граничным условиям (4.4) ), $\lambda_k$ — соответствующие собственные значения, являющиеся корнями следующего уравнения:

$$\cos\lambda_k l \operatorname{ch}\lambda_k l = -1$$

Для определения функций $f_k(t)$ применяется метод Галеркина. В первом приближении функция $f_1(t)$ определяется из следующего уравнения:

$$b_1^2 f_1^{''}(t) + \delta\lambda_1^2 l\left(1 - \frac{2a_1}{\lambda_1 l}\right) f_1^{'}(t) + b_2^2 a^2 f_1(t) = 0 \tag{4.6}$$

Так как $\lambda_1 l \approx 1{,}875$ [7], то легко показать, что $2a_1 > \lambda_1 l$, и, следовательно, решение уравнения (4.6) экспоненциально возрастает по времени $t$ для произвольного значения параметра $\delta$. Это свойство решения уравнения (4.6) сохраняется и при учете последующих приближений по методу Галеркина, а также если вместо функций $u_k(x)$ используются полиномы, удовлетворяющие граничным условиям (4.4).

Физически такое решение не будет верным, так как пластинка не может терять устойчивость при произвольно малом $\delta$ (произвольно малой напряженности магнитного поля).

Отметим, что если решение задачи с граничными условиями (4.4) представить в виде (4.2), то для определения функции $X(x)$ получается несамосопряженная задача. Поэтому задача решалась также при помощи модифицированного метода Галеркина для несамосопряженных задач, предложенного в [8]. После представления решения в виде (4.2) приближенное решение задачи строится при помощи функций, удовлетворяющих граничным условиям как несамосопряженной задачи относительно $X(x)$, так и соответствующей сопряженной задачи. Исследование характеристического уравнения относительно $\omega$, которое получается вследствие применения модифицированного метода Галеркина, показывает, что корни уравнения имеют отрицательную мнимую часть при произвольно малом $\delta$, то есть получается экспоненциально возрастающее по времени решение (неустойчивое решение).

Приведенные приближенные исследования задачи в случае граничных условий (4.4), хотя и дают физически неверный результат, однако указывают на возможность существования неустойчивости.

5. Другое приближенное решение уравнения (1.3) с граничными условиями (4.4) можно получить с использованием автомодельного решения (2.3).

Рассмотрим решение задачи для больших моментов времени. Учитывая, что большим значениям $t$ соответствуют малые значения $\eta$, уравнение (2.4) заменим следующим уравнением:

$$a^2\Phi^{IV} - \delta(\alpha - 1)\Phi^{II} + \alpha(\alpha - 1)\Phi = 0 \qquad (5.1)$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (5.1), определяются по формуле

$$r^2 = (2a^2)^{-1}\left[\delta(\alpha - 1) \pm \sqrt{\delta^2(\alpha - 1)^2 - 4a^2\alpha(\alpha - 1)}\right] \qquad (5.2)$$

Исследование решений уравнения (5.1) на основе (5.2) показывает, что наибольший интерес представляет случай

$$\delta = 2a\alpha^{1/2}(\alpha - 1)^{-1/2}, \quad \alpha > 1 \qquad (5.3)$$

С учетом (2.3), (5.3) и при $x_0 = 0$ приближенное решение уравнения (1.3) для больших $t$ представляется в виде

$$w = t^{\alpha}\left[C_1\exp\left(\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right) + C_2\frac{x}{\sqrt{t}}\exp\left(\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right) + C_3\exp\left(-\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right) + \right.$$
$$\left. + C_4\frac{x}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\mu x}{\sqrt{t}}\right)\right] \qquad (5.4)$$

где

$$\mu = (2\alpha)^{1/2}\delta^{-1/2} \qquad (5.5)$$

Точное удовлетворение граничным условиям (4.4) при помощи функции (5.4) оказывается невозможным. Если же удовлетворить точно условиям на конце $x = 0$, приближенно условию $\partial^2 w(l, t)/\partial x^2 = 0$ с учетом, что $t \gg (\mu l)^2$, и требовать вместо $\partial^3 w(l, t)/\partial x^3 = 0$ выполнения условия

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial^3 w(l, t)}{\partial x^3} = 0 \qquad (5.6)$$

то из (5.4) получается приближенное решение в виде

$$w = Ct^{\alpha}\left(\operatorname{sh}\sqrt{\frac{2\alpha}{\delta t}}\,x - \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta t}}\,x\operatorname{ch}\sqrt{\frac{2\alpha}{\delta t}}\,x\right) \qquad (5.7)$$

Выполнение условия (5.6) требует, чтобы $\alpha$ было меньше 3/2. Поэтому, согласно (5.3), в решении (5.7) $\alpha$ должно удовлетворять следующему неравенству:

$$1 < \alpha < 3/2 \qquad (5.8)$$

Если принять (5.7) как приближенное решение задачи, то оно показывает, что пластинка неустойчивая при условии (5.3), где $\alpha$ удовлетворяет неравенству (5.8). Из (5.3) и (5.8) получается минимальное критическое значение параметра $\delta$, следовательно, и напряженности магнитного поля в виде

$$\delta_* = 2\sqrt{3}\,a$$

Заметим, что для бесконечной пластинки критическое значение получается в виде $\delta = 2a$.

Таким образом, показано, что второй член в уравнении (1.3) (магнитное демпфирование) при определенных условиях и для бесконечной области ($-\infty < x < \infty$) приводит к дестабилизации. Рассмотренные задачи для ограниченной области ($0 \leqslant x \leqslant l$) показывают, что указанный член имеет в основном демпфирующий характер. Исключение составляет задача с граничными условиями (4.4). В этом случае приближенные решения показывают на возможное наличие дестабилизирующего эффекта.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 V 1978

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

## ՍԱԼԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՐՑԵՐ

Ամփոփում

*Էլեկտրամագնիսական դաշտի և սալի առաձգական տեղափոխումների փոխազդեցությունը հաշվի առնող պարզ նմանօրինակի (մոդելի) հիման վրա ուսումնասիրվում է դիսսիպատիվ ուժերի ազդեցությունը սալի տատանումների բնույթի վրա։*

*Ցույց է տրվում, որ այդ ուժերը, որոնք հիմնականում ունեն մարող ազդեցություն, որոշակի պայմաններում կարող են առաջ բերել համակարգի անկայունություն։*

## ON MAGNETOELASTIC VIBRATION IN PLATES

M. V. BELUBEKIAN

Summary

The effect of dissipation loads on tbe mode of vibration in plates is discussed, using a simple model. This model takes into account the interaction of electromagnetic field with the plate's elastic displacements. It is shown that these loads, producing a damping effect generally, under certain conditions produce a destabilizing effect as well.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
2. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М., «Мир», 1971.
3. *Smith T. E., Herrmann G.* Stability of circulatory elastic systems in the presence of magnetic damping. Acta Mechanica, 1971, No. 12.
4. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., «Наука», 1977.
5. *Белубекян М. В.* О некоторых особенностях задач магнитоупругости токонесущих пластин. Докл. АН Арм. ССР, 1975, т. XI, № 2.
6. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* О колебаниях проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 1.
7. *Рэлей Дж. В.* Теория звука, т. 1. М., Гос. изд. техн.-теор. лит., 1955.
8. *Prasad S. N., Herrmann G.* Adjoint variational methods in nonconcervative stability problems. Int. J. Solids Structures, 1972, vol. 8.