

Р. Н. ОВАКИМЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КООКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ОБОЛОЧЕК

В связи с разработкой конструкции нового вида кабелей для сверхпроводящих линий электропередач [1] практический интерес представляет исследование их механической устойчивости под действием возникающих электромагнитных нагрузок.

В принципе сверхпроводящий кабель представляет собой коаксиальную систему из двух круговых цилиндрических оболочек; тончайший слой сверхпроводящего сплава толщиной 20—40 $\mu\text{к}$ покрывает внутреннюю оболочку только снаружи, а внешнюю оболочку — лишь изнутри. Низкая температура, необходимая для сохранения сверхпроводящих свойств стенок коаксиала, обеспечивается потоком криогенной жидкости, протекающей через кольцевой зазор коаксиала. В сверхпроводящем кабеле токопроводом, как правило, служит внутренняя оболочка (точнее — ее наружная поверхность), а внешняя оболочка является своего рода «магнитным экраном» препятствующим прониканию магнитного поля за пределы коаксиала, одновременно выполняя роль защитного кожуха, предохраняющего кабель от механических повреждений.

Основными внешними нагрузками в коаксиале являются: 1) гидродинамическое давление потока криогенной жидкости, обладающей всеми свойствами идеальной жидкости, и 2) электромагнитное давление, возникающее при взаимодействии протекаемого тока с собственным магнитным полем.

До настоящего времени системы сверхпроводящих коаксиалов, в основном, исследовались на устойчивость физического состояния сверхпроводимости материала оболочек (например, [1, 2]); механическая же устойчивость подобных систем почти не рассматривалась (в частности, такая попытка была сделана в [3], где исследовался одномерный случай).

Необходимость исследования механической прочности и устойчивости сверхпроводящих коаксиалов особенно возрастает в случае транспортирования токов в десятки и сотни тысяч ампер. Уже сегодня сверхпроводники III рода, например, Nb_3Sn [6], благодаря высокому значению критического магнитного поля $H_{крит} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ а/м}$ позволяют пропускать огромные токи в несколько тысяч килоампер (технически это трудно осуществить, так как возникающие пондеромоторные усилия $q \approx 5 \cdot 10^8 \text{ н/м}^2$, например, более, чем в полтора раза превышают предел прочности меди $\sigma_s = 3.1 \cdot 10^8 \text{ н/м}^2$). Во всех случаях установление верхней границы допустимой силы тока, при которой сохраняется начальная форма токопровода, является одним из основных требований при проектировании сверхпроводящих кабелей большой мощности. В предлагаемой работе исследуются

устойчивость сверхпроводящего коаксиала под действием возникающих электромагнитных нагрузок; влияние криогенной жидкости не учитывается.

В обозначениях [4] в цилиндрической системе координат x, φ, r (фиг. 1) рассмотрим внутреннюю оболочку радиуса срединной поверхности R_1 и толщины h , изготовленную из упругого изотропного материала с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ . Наружная оболочка радиуса R_2 условно принимается абсолютно жесткой и недеформируемой, что не влияет на сущность рассматриваемого явления, но значительно облегчает вычисления.

Пусть по сверхпроводящей поверхности оболочки R_1 вдоль оси x транспортируется постоянный электрический ток силы J . В установившемся состоянии вектор линейной плотности тока

$$i_0 = \frac{J}{2\pi R_1} e_x = i_0 e_x \quad (1.1)$$

где $i_0 = \text{const}$ (согласно принятой в теории оболочек погрешности величиной $\frac{h}{2R_1}$ по сравнению с единицей пренебрегаем).

Магнитное поле, возникающее в окружающем пространстве от осевого тока (1.1), вследствие сверхпроводимости оболочек R_1 и R_2 , существует лишь в коаксиальном зазоре $R_2 \geq r \geq R_1$ и равно

$$H_0 = -i_0 \frac{R_1}{r} e_\varphi \quad (1.2)$$

причем на поверхностях оболочек R_1 и R_2

$$H_0^{(1)} = -i_0 e_\varphi \quad H_0^{(2)} = -i_0 \frac{R_1}{R_2} e_\varphi \quad (1.3)$$

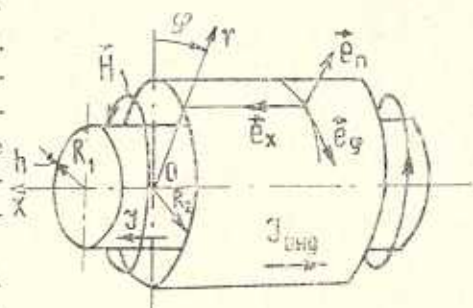
Здесь и в дальнейшем все физические величины с нижним индексом «0» характеризуют невозмущенное состояние оболочки; верхние индексы $^{(1)}$ и $^{(2)}$ относятся к оболочкам R_1 и R_2 соответственно.

Определим электромагнитные явления, возникающие в системе при наличии сверхпроводящей оболочки R_2 .

Как известно [5], в стационарном состоянии дифференциальные уравнения Максвелла в коаксиальном зазоре будут

$$\text{rot } H_0 = 0, \quad \text{div } B_0 = 0 \quad (1.4)$$

где $B_0 = \mu H_0$ — магнитная индукция в системе СИ, μ — относительная магнитная проницаемость среды кольцевого зазора (напомним, что в сверх-



Фиг. 1.

проводниках $\mu = 0$), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А² — магнитная проницаемость вакуума, H_0 — напряженность магнитного поля, определяемая по выражению (1.2).

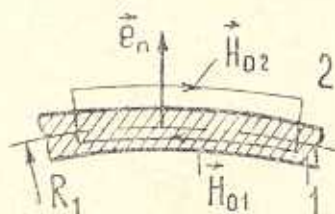
В общем случае граничные условия на поверхности раздела сред при наличии поверхностных токов типа (1.1) имеют следующий вид [5]:

$$e_n \times (H_{02} - H_{01}) = i \quad e_n \cdot (B_{02} - B_{01}) = 0 \quad (1.5)$$

Здесь H_{01} , H_{02} и B_{01} , B_{02} — напряженности индукции магнитного поля по обе стороны от поверхности раздела сред 1 и 2 (фиг. 2), e_n — нормаль к поверхности в положительном направлении r , i — линейная плотность тока.

Так как в области $r < R_1$, то есть внутри оболочки R_1 , магнитное поле отсутствует, то в (1.5) следует принять $H_{01}^{(1)} = 0$, а следовательно, и $B_{01}^{(1)} = 0$, и потому

$$e_n \times H_{02}^{(1)} = i_0, \quad e_n \cdot \mu_0 H_{02}^{(1)} = 0 \quad (1.6)$$



Фиг. 2.

Подстановкой значений $H_0^{(1)}$ (1.3) и i_0 (1.1) в граничные условия (1.6) убеждаемся в их тождественном выполнении, причем из второго условия (1.6) следует касательность магнитных силовых линий к сверхпроводящей поверхности оболочки R_1 .

Перейдем к граничным условиям на поверхности сверхпроводящей оболочки R_2 , памятуя, что по ней первоначально токи не транспортировались. Как показано в различных исследованиях явлений сверхпроводимости материала (укажем, например, [6]), согласно эффекту Мейснера на поверхности сверхпроводников I-го рода, а также сверхпроводников III-го рода (до достижения первой критической величины напряженности внешнего магнитного поля $H_{кр1}$), помещенных во внешнее магнитное поле, индуцируются поверхностные токи, которые создают магнитные поля, препятствующие прониканию внешних магнитных полей в толщу сверхпроводника (глубина проникновения не превышает 10^{-5} см).

Считая, что поверхности оболочек обладают свойствами сверхпроводников указанного рода, в граничных условиях (1.5) для оболочки R_2 следует принять $H_{02}^{(2)} = 0$ и $B_{02}^{(2)} = 0$, так что

$$e_n \times (-H_{01}^{(2)}) = i_{\text{внд}}, \quad e_n \cdot (-\mu_0 H_{01}^{(2)}) = 0 \quad (1.7)$$

Используя значение $H_{01}^{(2)}$ (1.3) при $r = R_2$, из первого уравнения условий (1.7) получим плотность индуцируемого поверхностного тока экранировки

$$i_{\text{внд}} = -i_0 \frac{R_1}{R_2} e_n \quad (1.8)$$

равного по величине, но противоположного по направлению току силы I в оболочке R_1 .

Таким образом, при транспортировании электрического тока вдоль оси z по поверхности оболочки R_1 на внутренней сверхпроводящей поверхности оболочки R_2 индуцируется такой же силы электрический ток, но противоположного направления, вследствие чего магнитное поле оказывается заключенным в сверхпроводящем коаксиале оболочек R_1 и R_2 .

Электромагнитные силы, возникающие при взаимодействии протекаемого поверхностного тока с собственным магнитным полем, определяются векторным произведением

$$q = i \times B, \quad (1.9)$$

где q — поверхностная нагрузка, $[н/м^2]$, B_z — магнитная индукция на токонесущей поверхности тела.

Так для оболочки R_1 после подстановки в (1.9) выражений (1.1) и (1.3) имеем

$$q_0^{(1)} = -\mu_0 j_0^2 e_n = -q_0 e_n \quad (1.10)$$

Как следует из (1.10), возникающая электромагнитная нагрузка сжимает оболочку в радиальном направлении с силой, прямо пропорциональной квадрату линейной плотности тока j_0^2 .

На наружную оболочку R_2 действует, наоборот, распирающая нагрузка, которая согласно (1.3) и (1.8) будет равна

$$q_0^{(2)} = q_0 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 e_n \quad (1.11)$$

Эта сила повышает устойчивость оболочки R_2 и в дальнейшем не будет учитываться, тем более, что оболочка R_2 была принята абсолютно недеформируемой.

Исследуем устойчивость оболочки R_1 , находящейся под действием равномерного давления $q_0^{(1)}$ (1.10), и определим критическую величину этой нагрузки, а, следовательно, и плотности тока j_{cr} , при которой оболочка теряет свою начальную круговую форму.

Используем метод малых возмущений, налагаемых на оболочку R_1 по всем трем направлениям e_x , e_r , e_n в зависимости от координат x , φ и времени t . В частности, радиальные возмущения (вдоль e_n) будут

$$\zeta = \zeta_0 \exp i(kx + n\varphi - \omega t) \quad (1.12)$$

где ζ_0 — амплитуда возмущения, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны в продольном направлении, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ — целое число волн, укладываемых в окружном направлении φ , $\omega = \omega_R + i\omega_I$ — круговая частота колебаний, в общем случае комплексная величина (ω_R — вещественная, ω_I — мнимая части).

Возмущение поверхности влечет за собой изменение поверхностной плотности тока как по величине, так и по направлению, что в свою очередь изменяет напряженность магнитного поля в коаксиале. Препятствуя про-

никанию возмущений магнитного поля в сверхпроводник, на поверхностях оболочек R_1 и R_2 индуцируются новые токи, так называемые экранирующие токи, которые создают магнитные поля, равные по величине, но противоположные по направлению возмущениям магнитных полей. Практически в сверхпроводниках рассматриваемого рода отсутствуют явления отражения и преломления электромагнитных волн, обычно наблюдаемые в материалах конечной проводимости. Для определения указанных взаимосвязанных изменений электромагнитного поля необходимо решение дифференциальных уравнений Максвелла в нестационарном виде. Но, как показано в [5], в случае ограниченной частоты колебаний $\lesssim 10^5$ гц при отсутствии посторонних источников тока и в непосредственной близости от токопроводящих тел с большой точностью можно использовать квазистационарные уравнения Максвелла.

В нашем случае при большой силе тока, обычно пропускаемого по сверхпроводящему кабелю, частота колебаний не превышает 10^5 гц, а характерный размер оболочки намного меньше длины электромагнитной волны $\frac{\omega}{k} \ll c$ (c — скорость света), что позволяет использовать квазистационарные уравнения Максвелла. По внешнему виду эти уравнения совпадают со стационарными уравнениями (1.4), где теперь вместо H_0 следует писать $H_0 + h$ (h — возмущение магнитного поля).

Согласно принципу суперпозиции полей из (1.4) имеем

$$\operatorname{rot} h = 0, \quad \operatorname{div} h = 0 \quad (1.13)$$

где во втором уравнении отброшена постоянная μ_0 .

Векторным уравнениям (1.13) удовлетворяет потенциальная функция

$$h = -\operatorname{grad} \psi \quad (1.14)$$

которая совместно со вторым уравнением (1.13) сводится к уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Функцию ψ ищем соответственно ξ (1.12) в виде

$$\psi = f(r) \exp i(kx + n\varphi - \omega t) \quad (1.15)$$

Подставляя (1.15) в уравнение Лапласа, после соответствующего дифференцирования по координатам x , φ , r получим уравнение Бесселя

$$r^2 f''(r) + r f'(r) - (n^2 + k^2 r^2) f(r) = 0 \quad (1.16)$$

Решение уравнения (1.16) выражается через функции Бесселя чисто мнимого аргумента

$$f(r) = C_1 I_n(kr) + C_2 K_n(kr) \quad (1.17)$$

где произвольные постоянные C_1 , C_2 определяются из граничных условий электромагнитного поля в возмущенном состоянии. Выпишем эти условия.

На возмущенной поверхности внутренней оболочки $r = R_1 + \zeta$

$$e_n^* \times (H_{02}^{*(1)} + h^{(1)}) = i^{(1)}, \quad e_n^* \cdot (H_{02}^{*(1)} + h^{(1)}) = 0 \quad (1.18)$$

а на недеформируемой поверхности оболочки R_2

$$e_n \times (-H_{01}^{(2)} - h^{(2)}) = i_{\text{вкв}}^{(2)}, \quad e_n \cdot (-H_{01}^{(2)} - h^{(2)}) = 0 \quad (1.19)$$

Заметим, что в новом положении токонесущей поверхности $r = R_1 + \zeta$ напряженность магнитного поля в невозмущенном состоянии согласно формуле (1.2) будет равна

$$H_{02}^{*(1)} = -i_0 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1}\right) e_z \quad (1.20)$$

Нормаль к возмущенной поверхности оболочки R_1 определяется соотношением [4]

$$e_n^* = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} e_x - \frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi} e_\varphi + e_n \quad (1.21)$$

Рассмотрев совместно выражения (1.14), (1.15) и (1.17), а также соотношения (1.20) и (1.21), после дифференцирования и отбрасывания одинакового для всех экспоненциального множителя $\exp i(\dots)$ из вторых уравнений граничных условий (1.18), (1.19) получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} C_1 I_n'(kR_1) + C_2 K_n'(kR_1) &= ii_0 \frac{n}{R_1} \zeta_0 \\ C_1 I_n'(kR_2) + C_2 K_n'(kR_2) &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь обозначены выражения $I_n'(kR_1) = \frac{\partial}{\partial r} I_n(kr)|_{R_1}$ и т. д. Решая систему уравнений (1.22) относительно C_1 и C_2 , получим

$$C_1 = ii_0 \frac{n}{R_1} \frac{K_n'(kR_2)}{\Delta} \zeta_0; \quad C_2 = -ii_0 \frac{n}{R_1} \frac{I_n'(kR_2)}{\Delta} \zeta_0$$

где для сокращения записи через Δ обозначена положительная величина

$$\Delta = I_n'(kR_2) K_n'(kR_2) - I_n'(kR_1) K_n'(kR_1) \quad (1.23)$$

После подстановки значений C_1 , C_2 в (1.17), а затем в (1.15), с учетом выражения (1.12) получим

$$\psi = i_0 \frac{K_n'(kR_2) I_n(kr) - I_n'(kR_2) K_n(kr)}{\Delta} \frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi} \quad (1.24)$$

Из вида функции ψ (1.24) следует, что возмущение магнитного поля $h = -\text{grad}\psi$ (1.14) возникает только при наличии деформации оболочки в окружном направлении $\frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi}$.

Используя (1.24), выпишем значения h (1.14) на поверхностях оболочек R_1 и R_2 :

$$h^{(1)} = i_0 \left[\frac{\Delta_1}{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_1 \partial x \partial \varphi} e_x + \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} e_z \right) - \frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi} e_n \right] \quad (1.25)$$

$$h^{(2)} = i_0 \frac{1}{R_1 \cdot \Delta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_2 \partial x \partial \varphi} e_x + \frac{\partial^2 \zeta}{R_2^2 \partial \varphi^2} e_z \right) \quad (1.26)$$

где через Δ , обозначена положительная величина

$$\Delta_1 = I_n(kR_2) K_n(kR_1) - K_n(kR_2) I_n(kR_1) \quad (1.27)$$

и используется известное соотношение $I_n'(x) K_n(x) - K_n'(x) I_n(x) = \frac{1}{x}$.

Определив возмущения магнитного поля (1.25), (1.26), из первых уравнений граничных условий (1.18), (1.19) получим выражения линейных плотностей токов на поверхностях оболочек R_1 и R_2 :

$$i^{(1)} = i_0 \left[\left(1 - \frac{\zeta}{R_1} - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) e_x + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1 \partial x \partial \varphi} e_z + \frac{\partial \zeta}{\partial x} e_n \right] \quad (1.28)$$

$$i^{(2)} = -i_0 \frac{R_1}{R_2} \left[\left(1 - \frac{1}{R_2 \Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) e_x + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1 \partial x \partial \varphi} e_z \right] \quad (1.29)$$

Токи $i^{(1)}$ (1.28) и $i^{(2)}$ (1.29) можно представить в виде суммы двух токов — транспортного и вихревого.

Для оболочки R_1 выражение транспортного тока будет

$$i_{\text{тп}}^{(1)} = i_0 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) e_{xt} \quad (1.30)$$

где $i_0 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right)$ — величина линейной плотности тока, протекающего через поперечное сечение оболочки в осевом направлении

$$e_{xt} = e_x + \frac{\partial \zeta}{\partial x} e_n \quad (1.31)$$

Заметим, что направление тока e_{xt} (1.31) в общем случае деформации не совпадает с направлением деформируемого продольного волокна оболочки [4]

$$e_x^* = e_x + \frac{\partial v}{\partial x} e_z + \frac{\partial \zeta}{\partial x} e_n \quad (1.32)$$

где v — перемещение элемента оболочки в тангенциальном направлении φ . Это объясняется природой электрического тока, состоящего из потока свободных электронов, когда на их начальное направление вдоль x не может влиять деформация кристаллической (ионной) решетки по φ .

Вторая составляющая тока $i^{(1)}$ (1.28) — индуцируемый вихревой ток экранировки

$$i_n^{(1)} = -i_0 \frac{\Delta_1}{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} e_x - \frac{\partial^2 \zeta}{R_1 \partial x \partial \varphi} e_z \right) \quad (1.33)$$

представляет замкнутую линию и не влияет на силу тока J , протекающего через поперечное сечение оболочки в направлении оси x . Этот ток так же, как и возмущение магнитного поля h , возникает лишь при наличии окружающей деформации $\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}$.

Для оболочки R_2 ток $i^{(2)}$ (1.29) является по своей природе индуцируемым током экранировки, но также может быть условно разделен на транспортный (1.8) и вихревой

$$i_n^{(2)} = i_0 \frac{1}{R_1 \Delta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{R_2^2 \partial \varphi^2} e_x - \frac{\partial^2 \zeta}{R_2 \partial x \partial \varphi} e_z \right) \quad (1.34)$$

который противоположен направлению тока $i_n^{(1)}$ (1.33) в оболочке R_1 . Вихревой характер токов (1.33) и (1.34) следует из равенства нулю расхождения этих векторов ($\text{div } i_n = 0$).

Перейдем к определению поверхностной нагрузки, действующей на токонесущую оболочку R_1 в возмущенном состоянии.

Согласно формуле (1.9), с учетом выражений напряженности магнитного поля в возмущенном состоянии (1.20) и (1.25) и линейной плотности тока (1.28) имеем

$$q^{(1)} = -\mu_0 (i^{(1)})^2 e_n^* \quad (1.35)$$

Из соотношения (1.35) следует, что поверхностная нагрузка $q^{(1)}$ электромагнитного происхождения всегда направлена по нормали e_n^* (1.21) к деформируемой поверхности оболочки R_1 , то есть носит следящий характер.

В работе [3], где рассматривался одномерный случай ($\partial/\partial \varphi = 0$), вихревые токи экранировки не возникали и выражение нагрузки имело более простой вид

$$q^{(1)} = -q_0 \left(1 - 2 \frac{\zeta}{R_1} \right) e_n^* \quad (1.35a)$$

где в данном случае

$$e_n^* = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} e_x + e_n$$

Для оболочки R_2 , используя уравнения (1.19), получим

$$q^{(2)} = q_0 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{R_2 \Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) e_n \quad (1.36)$$

из которого следует, что нагрузка $q^{(2)}$ в отличие от $q^{(1)}$ (1.35), играет стабилизирующую роль, то есть повышает устойчивость оболочки R_2 .

Возмущение электромагнитной нагрузки, необходимое при расчете устойчивости оболочки R_1 , определяется из разности векторов сил в возмущенном (1.35) и исходном (1.10) состояниях. В линейном приближении

$$\delta q = q^{(1)} - q_0^{(1)} = q_0 \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} e_x + \frac{\partial \zeta}{R_1 \partial \varphi} e_z + 2 \left(\frac{z}{R_1} + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial^2 \zeta}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) e_z \right] \quad (1.37)$$

Перейдем к составлению уравнений устойчивости оболочки.

В предварительно-напряженном состоянии оболочка R_1 находится под действием нагрузки $q_0^{(1)}$ (1.10) и сохраняет начальную круговую форму, так что основным внутренним усилием является окружное усилие $T_\varphi^0 = -q_0 R_1$. (Начальное состояние оболочки в подобных задачах устойчивости обычно считается безмоментным).

Выпишем уточненные уравнения устойчивости оболочки, являющиеся разностью уравнений равновесия в возмущенном и предварительно-напряженном состояниях в проекциях на e_x, e_φ, e_n

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{x\varphi}}{R_1 \partial \varphi} + T_\varphi^0 \left(\frac{\partial^2 u}{R_1^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial w}{R_1 \partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial T_\varphi}{R_1 \partial \varphi} + \frac{\partial T_{x\varphi}}{\partial x} + T_\varphi^0 \frac{\partial^2 u}{R_1 \partial x \partial \varphi} + \frac{N_x}{R_1} &= 0 \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_z}{R_1 \partial \varphi} - \frac{T_\varphi}{R_1} + T_\varphi^0 \left(\frac{w}{R_1^2} + \frac{\partial^2 w}{R_1^2 \partial \varphi^2} \right) + \lambda q_n - \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Здесь u, v, w — возмущения элемента оболочки соответственно в направлениях e_x, e_φ, e_n , λq_n — нормальная составляющая возмущения усилия δq (1.37), $-\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ — инерционный член, а выражения усилий, моментов и перерезывающих сил N_x, N_φ , с сохранением малых членов порядка $\alpha = \frac{h^2}{12R_1^2}$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{w}{R_1} + \frac{\partial v}{R_1 \partial \varphi} \right) - \alpha R_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ T_\varphi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{w}{R_1} + \frac{\partial v}{R_1 \partial \varphi} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{R_1 \partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{R_1 \partial \varphi} \right) \right] \\ T_{x\varphi} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ T_{\varphi x} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} \right) \right] \\ M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{R_1^2 \partial \varphi^2} - \frac{\partial u}{R_1 \partial x} - \nu \frac{\partial v}{R_1^2 \partial \varphi} \right) \\ M_\varphi &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{R_1^2 \partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1^2} \right) \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$M_{x\varphi} = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{R_1 \partial x \partial \varphi} - \frac{\partial v}{R_1 \partial x} \right)$$

$$M_{\varphi x} = -D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{R_1 \partial x \partial \varphi} - \frac{1}{2R_1} \left(\frac{\partial u}{R_1 \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$N_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{R_1 \partial \varphi} \quad N_\varphi = \frac{\partial M_\varphi}{R_1 \partial \varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x}$$

где $D = \frac{Ek^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость оболочки.

Рассматривая оболочку с шарнирным закреплением краев, представим u, v, w в виде гармонических колебаний типа (1.12) с соответствующими малыми амплитудами ξ_0, η_0 и ζ_0 . Подставив эти выражения в соотношения (1.39), уравнения устойчивости (1.38) сведем к системе алгебраических уравнений относительно амплитуд ξ_0, η_0, ζ_0

$$\begin{aligned} & - \left[N^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 + \left(\alpha \frac{1-\nu}{2} - p_0 \right) n^2 \right] \zeta_0 - \frac{1+\nu}{2} n N \eta_0 + \\ & + i \left[\nu + \alpha \left(N^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) + p_0 \right] N \zeta_0 = 0 \\ & - \left(\frac{1+\nu}{2} - p_0 \right) n N \zeta_0 - \left[n^2 + \frac{1-\nu}{2} N^2 + \alpha \left(3 \frac{1-\nu}{2} N^2 - n^2 \right) \right] \eta_0 + \\ & + i \left[1 + \alpha \left(\frac{3-\nu}{2} N^2 - 1 \right) \right] n \zeta_0 = 0 \quad (1.40) \\ & - i \left[\nu + \alpha \left(N^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \right] N \zeta_0 - i \left[1 + \alpha \left(\frac{3-\nu}{2} N^2 - 1 \right) \right] n \eta_0 - \\ & - \left[1 + \alpha (n^2 + N^2)^2 - 2\alpha n^2 - p_0 (n^2 - 1 + \beta) - \frac{R_1^2}{c_1^2} \omega^2 \right] \zeta_0 = 0 \end{aligned}$$

где для сокращения записи обозначены $p_0 = q_0 R_1 \frac{1-\nu^2}{Eh}$, $c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$ — квадрат продольной скорости звука в тонких телах, $N = kR_1$ и $\beta = 2 \left(1 - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{n^2}{R_1} \right)$ — коэффициент возмущения следящей нагрузки по (1.37).

Приравнявая определитель системы уравнений (1.40) нулю, в пренебрежении величинами высшего порядка малости, пропорциональными $\alpha^2, \alpha p_0, p_0^2$, получим характеристическое уравнение относительно частоты ω

$$\begin{aligned} & \frac{R_1^2}{c_1^2} \omega^2 = \frac{1-\nu^2}{(n^2 + N^2)^2} N^4 + \alpha \left[(n^2 + N^2 - 1)^2 - \right. \\ & \left. - 2(1-\nu) N^2 \frac{n^2(n^2 - 1) - N^4}{(n^2 + N^2)^2} \right] - p_0 \left[(n^2 - 1 + \beta) - N^2 \frac{n^2 - \nu N^2}{(n^2 + N^2)^2} \right] \quad (1.41) \end{aligned}$$

Как показали расчеты на ЭВМ, в широком диапазоне значений $\frac{h}{R_1}$ и $\frac{R_1}{l}$ [7] с большой точностью $\sim (10^{-3} - 10^{-2})\%$ можно пренебречь вторыми слагаемыми в квадратных скобках (1.41) и представить искомое соотношение в виде

$$\omega^2 \approx \Omega_1^2 - m \frac{q_0}{\rho R_1 h} \quad (1.42)$$

В правой части (1.42) первое слагаемое есть квадрат частоты собственных колебаний оболочки, которое с учетом значений N и c , сводится к следующему виду:

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{\rho h R_1^2} \left[E h \frac{k^4 R_1^4}{(n^2 + k^2 R_1^2)^2} + \frac{D}{R_1^2} (n^2 + k^2 R_1^2 - 1)^2 \right] \quad (1.43)$$

Полученный коэффициент $(n^2 + k^2 R_1^2 - 1)^2$ полностью соответствует физике колебаний оболочки, хотя и несколько отличается от общепринятого $(n^2 + k^2 R_1^2)^2$. Покажем это на примере свободно подвешенной оболочки: при $k \rightarrow 0$ и $n = 1$, что соответствует смещению оболочки в сторону как жесткого тела, колебания отсутствуют, что также следует из формулы (1.43) ($\Omega_1 = 0$). Следует отметить, что с принятой в теории оболочек погрешностью при $n \geq 4$ единицей можно пренебречь и принять $(n^2 + k^2 R_1^2)^2$.

Второе слагаемое в правой части соотношения (1.42) характеризует внешнюю нагрузку, причем коэффициент

$$m = n^2 - 1 + \beta \quad (1.44)$$

определяет вид радиальной нагрузки. Для консервативной нагрузки, вследствие отсутствия возмущений нагрузки ($\delta q = 0$), $\beta = 0$ и $m = n^2 - 1$.

Таким образом, для рассматриваемого случая нагружения

$$\omega^2 = \Omega_1^2 - \left(n^2 + 1 - 2 \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{n^2}{R_1} \right) \frac{q_0}{\rho R_1 h} \quad (1.45)$$

Оболочка R_1 будет устойчива при положительном значении правой части уравнения (1.42), что будет соответствовать отсутствию мнимой части ω_c в выражении частоты ω ; критический момент наступит при $\omega = 0$, когда

$$q_{кр} = \rho R_1 h \frac{\Omega_1^2}{n^2 + 1 - 2 \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{n^2}{R_1}} \quad (1.46)$$

Согласно выражению q_0 (1.10) можно получить также критическую величину линейной плотности тока

$$i_{кр} = \Omega_1 \sqrt{\frac{\rho R_1 h}{\mu_0 \left(n^2 + 1 - 2 \frac{n^2}{R_1} \frac{\Delta_1}{\Delta} \right)}} \quad (1.47)$$

а, следовательно, и критическую силу тока $J_{кр}$ (1.1). Значение $q_{кр}$ (1.46) вычисляется в каждом конкретном случае при заданных величинах $\frac{h}{R_2}$, $\frac{R_1}{l}$, $\frac{R_1}{R_2}$, а также E , ν , в зависимости от волновых чисел n , k .

В качестве примера рассмотрена коаксиальная система сверхпроводящих оболочек длины l с отношением радиусов $\frac{R_1}{R_2} = 0.8$. Материалом оболочек выбрана медь с $\nu = 0.34$. Вследствие шарнирного закрепления краев оболочек в продольном направлении происходит прогиб оболочки R_1 по одной полуволне, так что $kR_1 = \frac{\pi R_1}{l}$. На ЭВМ „Напри-2“ в широком диапазоне значений $\frac{h}{R_1}$ и $\frac{\pi R_1}{l}$ получены безразмерные величины критической нагрузки $q^* = q_{кр} \cdot \frac{10^6}{E}$ (строка 1 в табл. 1); в скобках даны числа волн n , по которым минимизируются значения $q_{кр}$. Для сравнения в строке 2 приведены значения q^* , вычисленные ранее в [7] для отдельно взятой оболочки.

Таблица 1

h/R_1 \ kR_1		$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$
0.048	1	0.288 (4)	1.333 (4)	4.50 (4)	10.66 (4)	35.99 (4)	287.9 (4)
	2	0.0747 (2)	0.326 (2)	1.08 (2)	2.542 (2)	8.539 (2)	68.12 (2)
0.24	1	0.334 (4)	1.418 (4)	4.649 (4)	10.9 (4)	36.53 (4)	291.0 (4)
	2	0.219 (4)	0.898 (3)	2.403 (3)	5.176 (3)	16.21 (3)	106.2 (2)
0.48	1	0.438 (6)	1.704 (5)	5.37 (5)	12.41 (5)	40.23 (4)	301.5 (4)
	2	0.38 (5)	1.451 (5)	4.128 (4)	8.63 (4)	26.35 (4)	155.05 (3)
1.2	1	0.849 (8)	3.213 (7)	9.392 (7)	19.86 (6)	59.21 (6)	336.3 (5)
	2	0.834 (8)	3.107 (7)	9.081 (7)	18.59 (6)	55.43 (6)	335.6 (5)
2.4	1	1.602 (11)	5.938 (10)	16.96 (9)	36.22 (8)	104.9 (8)	660.6 (6)
	2	1.598 (11)	5.911 (10)	16.82 (9)	35.71 (8)	103.4 (8)	629.9 (6)

Сравнивая значения q^* , полученные в обоих случаях, можно заметить, что в коаксиальной системе оболочка оказывается в более устойчивом состоянии, чем в свободном положении. С укорочением длины оболочки различие в значениях $q_{кр}$ уменьшается и при $\frac{\pi R_1}{l} = 2.4$ сводится почти к нулю; потеря устойчивости оболочки в коаксиале происходит как минимум при $n=4$ против $n=2$ в свободном состоянии.

Для сверхпроводящего кабеля, предназначенного для работы в условиях сверхнизкой температуры, основным материалом толщи оболочки наиболее часто выбираются медь и ее сплавы, вследствие значительного улучшения всех механических свойств с понижением температуры. В част-

ности, при слабом изменении ударной вязкости и пластичности существенно возрастают предел прочности и твердость [8]; для модуля упругости меди принимается новое значение $E = 1.2 \cdot 10^{11}$ н/м² против $E = 1.1 \cdot 10^{11}$ н/м² при 15°С.

В качестве числового примера рассмотрим конструкцию сверхпроводящего коаксиального кабеля [6] при диаметре внутренней оболочки 67 мм, толщине стенки 0.32 мм $\left(\frac{h}{R_1} = \frac{1}{100}\right)$ и диаметре наружной оболочки 84 мм $\left(\frac{R_1}{R_2} = 0.8\right)$. Для отдельного узла длиной $l = 2.2$ м ($kR_1 = 0.048$) из табл. 1 получим $q^* = q_{кр} \cdot 10^9 / E \approx 36$, откуда следует $q_{кр} = 4.3 \cdot 10^6$ н/м², что почти на два порядка меньше предела пропорциональности меди $\sigma_n \approx 2 \cdot 10^8$ н/м². По формуле (1.10) $q_0 = \mu^2 \sigma_0^2$, приняв $\mu = 1$, вычислим критическую величину линейной плотности тока $i_{кр} = 1.85 \cdot 10^9$ а/м. Таким образом, допускаемая сила тока, транспортируемая по оболочке диаметром 67 мм, будет $J_{кр} = 390$ ка (по проекту предусматривается $J = 67$ ка). Следует заметить, что в наших расчетах не учитывалось влияние криогенной жидкости, что, по-видимому, привело к высокому значению критического тока. Совместное рассмотрение потока жидкого гелия и электромагнитных усилий является темой другой работы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 II 1973

Ռ. Ն. ՕՎԱԿԻՄՅԱՆ

ԳԵՐՀԱՂՈՐԳԻԶ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱՌԱՆՅՔ ՄԻՍՏԵՄԻ
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ռ ի մ

Փոքր գրգռումների մեթոդով բվադիստացիոնար դիճակի համար Մաքսվելի հավասարումների լուծմամբ ստացված են հոսանքի գծային խտության և մազնիսական դաշտի լարվածության արտահայտությունները:

Արտածվել է հոսանքատար թաղանթների սիստեմի լայնական էլեկտրամագնիսական ուժով բեռնավորելու դեպքի համար դիսպերսիոն հավասարումը:

ԷՀՄ օգնությամբ հաշվված են էլեկտրամագնիսական բեռի կրիտիկական արժեքները՝ ներքին թաղանթի տարրեր շափերի դեպքում: Յույց է տրված, որ հոսանքատար թաղանթը համառանցք սիստեմում ավելի կայուն է, քան ազատ վիճակում:

ON STABILITY OF A SYSTEM OF COAXIAL
SUPERCONDUCTING SHELLS

R. N. OVAKIMIAN

S u m m a r y

The electromagnetic load arising in a system of current-carrying shells is investigated. A proper dispersion equation is derived. The critical load values are computerised for different shells. In the coaxial state the current-carrying shell is shown to be more stable than in the free one.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сверхпроводящие линии электропередач. Сб. трудов, вып. 39, М., ЭНИН, 1975.
2. Киселев М. И. О волнах конечной амплитуды в токонесущей сверхпроводящей коаксиальной линии. ЖТФ, 1975, т. XLV, вып. 2(382).
3. Овакимян Р. Н. Об устойчивости коаксиальных токонесущих оболочек. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1970, т. XXIII, № 2.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромиздат, 1962.
5. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., изд. «Наука», 1976.
6. Букель В. Сверхпроводимость. М., изд. «Мир», 1975.
7. Овакимян Р. Н. Об устойчивости цилиндрической оболочки при следящей электромагнитной нагрузке. Тезисы докладов XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Харьков. М., 1977.
8. Частовский В. Г., Петровский Ю. В., Ровинский А. Е. Криогенная техника. М., изд. «Энергия», 1967.