ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 3, 1979 Механика

Ш. М. ХАЧАТРЯН

О НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ИХ УРАВНЕНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ОБЩЕЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, обладающего свойством общей анизотропии. На основе асимптотического метода [1—3] построены итерационные процессы, описывающие возможные напряженные состояния в цилиндрической оболочке с показателем изменяемости меньше единицы. Предлагаются двумерные уравнения, позволяющие сравнительно просто найти напряженно-деформированное состояние в цилиндрической оболочке с общей анизотропией.

Обсуждается применимость прикладных и асимптотического методов и показано, что она существенно зависит от отношений упругих коэффициентов.

1. Вопросу определения напряженно-деформированного состояния изотропной цилиндрической оболочки, исходя из уравнений трехмерной задачи теории упругости, посвящено много работ.

Развивая метод однородных решений, А. Н. Базаренко и И. И. Ворович изучили напряженное состояние изотропной цилиндрической оболочки конечных размеров, подверженных действию нагрузок, приложенных по всей поверхности. Они показали, что возможны четыре типа напряженных состояний в цилиндрической оболочке и предложили уточненную прикладную теорию круговой цилиндрической оболочки [4].

Л. Рейсс [5—6] методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости получил двумерные уравнения изотропной цилиндрической оболочки, представляя напряжения и перемещения в виде конечных рядов по степеням малого параметра. Был построен также погранслой.

Асимптотический метод определения напряженно-деформированного состояния произвольных изотропных оболочек с исчерпывающей полнотой разработан А. Л. Гольденвейзером [1—3]. Понятовский использовал этот метод для определения напряженного состояния в сплошном цилиндре [7]. Л. А. Агаловян распространил асимптотический метод на ортотропные оболочки, выявив характерные особенности, связанные с анизотропией [8].

Вайдер и Чанг [9] методом асимптотического интегрирования построили исходное приближение внутренней задачи анизотропной цилиндрической оболочки, соответствующее показателю изменяемости $^1/_2$. Они не рассматривали напряженно-деформированные состояния, соответствующие другим показателям изменяемости, а также погранслой.

Вариационный метод изучения напряженного состояния сплошного цилиндра использовал В. Л. Бердичевский [10].

Пусть имеем цилиндрическую оболочку радиуса R, длиной L и толщиной $2h$. Материал оболочки обладает цилиндрической анизотропией общего вида, а ось анизотропии совпадает с осью цилиндра. Цилиндр загружен по внешней и внутренней поверхностям

$$\sigma_{rx} = \pm \varepsilon^{-a} X^{\pm}(x, \theta), \quad \sigma_{r\theta} = \pm \varepsilon^{-a} Y^{\pm}(x, \theta), \quad \sigma_r = \pm Z^{\pm}(x, \theta) \tag{1.1}$$

на торцах $X = 0$, L могут быть заданы произвольные пока краевые условия.

Для нахождения решения уравнений теории упругости анизотропного тела, удовлетворяющего условиям (1.1) и торцевым условиям, вводится безразмерная цилиндрическая координатная система по формулам

$$\xi = \frac{x}{R\varepsilon^a} = \frac{x}{R(h_*)^{a/b}}, \quad \zeta = \frac{r-R}{R\varepsilon^b} = \frac{r-R}{h}, \quad \varphi = \frac{\theta}{\varepsilon^a} \tag{1.2}$$

где $\varepsilon = (h_*)^{1/b}$ — малый параметр, $h_* = h/R$ — относительная полутолщина, a, b — целые положительные числа, $b > a$. После этих преобразований соответствующие уравнения теории упругости будут содержать малый параметр ε.

Решение подобного рода сингулярно возмущенных уравнений складывается из двух типов решений — внутреннего, т. е. незатухающего при удалении от границы в глубь области, и типа погранслоя [1—3, 11].

Решение внутренней задачи будем искать в виде [1—3]

$$Q = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(s)} \tag{1.3}$$

Q — любое из напряжений и безразмерных перемещений, $U_x = u_x/R$, $U_\theta = u_\theta/R$, $U_r = u_r/R$, $Q^{(s)} = 0$ при $s < 0$, q — целое число, подбирается так, чтобы после подстановки в уравнения теории упругости получить рекуррентную систему относительно $Q^{(s)}$. При разыскивании таких непротиворечивых значений q надо раздельно рассматривать случаи [1—3]

$$\text{а)} \quad t = \frac{a}{b} < \frac{1}{2}, \qquad \text{б)} \quad t = \frac{1}{2}, \qquad \text{в)} \quad t > \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

которым соответствуют

$$\begin{gathered}(\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{\theta x}) \to q = b, \quad (\sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}) \to q = a, \quad \sigma_r \to q = c \\ (U_x, U_\theta) \to q = b - a, \quad U_r \to q = b - c\end{gathered} \tag{1.5}$$

где

$$c = 0 \text{ при } t \leqslant \frac{1}{2}, \qquad c = 2a - b \text{ при } t \geqslant \frac{1}{2} \tag{1.6}$$

При $l < 1/2$ есть вторая непротиворечивая комбинация значений q, отличающаяся от (1.5) значениями для перемещений

$$(U_x, U_\theta) \to q = 2b - 3a, \quad U_r \to q = 2b - 2a \tag{1.7}$$

Подставляя (1.3) в уравнения теории упругости, с учетом (1.5) получим систему (здесь и в последующем, для удобства записи, запятыми выделены частные производные)

$$\sigma_{r,\zeta}^{(s)} + \sigma_{rx,\xi}^{(s-b+2a-c)} + \sigma_{r\theta,\varphi}^{(s-b+2a-c)} - \sigma_\theta^{(s-c)} + \zeta\sigma_{r,\zeta}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{rx,\xi}^{(s-2b+2a)} + \sigma_r^{(s-b)} = 0$$

$$\sigma_{r\theta,\zeta}^{(s)} + \sigma_{\theta x,\xi}^{(s)} + \sigma_{\theta,\varphi}^{(s)} + \zeta\sigma_{r\theta,\zeta}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{\theta x,\xi}^{(s-b)} + 2\sigma_{r\theta}^{(s-b)} = 0$$

$$\sigma_{rx,\zeta}^{(s)} + \sigma_{x,\xi}^{(s)} + \sigma_{\theta x,\varphi}^{(s)} + \zeta\sigma_{rx,\zeta}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{x,\xi}^{(s-b)} + \sigma_{rx}^{(s-b)} = 0$$

$$U_{x,\zeta}^{(s)} = a_{11}\sigma_x^{(s)} + a_{12}\sigma_\theta^{(s)} + a_{13}\sigma_r^{(s-b+c)} + a_{14}\sigma_{r\theta}^{(s-b+a)} + a_{15}\sigma_{rx}^{(s-b+a)} + a_{16}\sigma_{\theta x}^{(s)}$$

$$\begin{aligned} U_{\theta,\varphi}^{(s)} + U_r^{(s-c)} &= a_{12}\sigma_x^{(s)} + a_{22}\sigma_\theta^{(s)} + a_{23}\sigma_r^{(s-b+c)} + a_{24}\sigma_{r\theta}^{(s-b+a)} + \\ &+ a_{25}\sigma_{rx}^{(s-b+a)} + a_{26}\sigma_{\theta x}^{(s)} + \zeta\big(a_{12}\sigma_x^{(s-b)} + a_{22}\sigma_\theta^{(s-b)} + \\ &+ a_{23}\sigma_r^{(s-2b+c)} + a_{24}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+a)} + a_{25}\sigma_{rx}^{(s-2b+a)} + a_{26}\sigma_{\theta x}^{(s-b)}\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{r,\zeta}^{(s)} &= a_{13}\sigma_x^{(s-b+c)} + a_{23}\sigma_\theta^{(s-b+c)} + a_{33}\sigma_r^{(s-2b+2c)} + \\ &+ a_{34}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+a+c)} + a_{35}\sigma_{rx}^{(s-2b+a+c)} + a_{36}\sigma_{\theta x}^{(s-b+c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &U_{\theta,\zeta}^{(s)} + U_{r,\varphi}^{(s-b+2a-c)} + \zeta U_{\theta,\zeta}^{(s-b)} - U_\theta^{(s-b)} = \\ &= a_{14}\sigma_x^{(s-b+a)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-b+a)} + a_{34}\sigma_r^{(s-2b+a+c)} + \\ &+ a_{44}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+2a)} + a_{45}\sigma_{rx}^{(s-2b+2a)} + a_{46}\sigma_{\theta x}^{(s-b+a)} + \\ &+ \zeta\big(a_{14}\sigma_x^{(s-2b+a)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-2b+a)} + a_{34}\sigma_r^{(s-3b+a+c)} + \\ &+ a_{44}\sigma_{r\theta}^{(s-3b+2a)} + a_{45}\sigma_{rx}^{(s-3b+2a)} + a_{46}\sigma_{\theta x}^{(s-2b+a)}\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{r,\xi}^{(s-b+2a-c)} + U_{x,\zeta}^{(s)} &= a_{15}\sigma_x^{(s-b+a)} + a_{25}\sigma_\theta^{(s-b+a)} + \\ &+ a_{35}\sigma_r^{(s-2b+a+c)} + a_{45}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+2a)} + a_{55}\sigma_{rx}^{(s-2b+2a)} + a_{56}\sigma_{\theta x}^{(s-b+a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{x,\varphi}^{(s)} + U_{\theta,\xi}^{(s)} + \zeta U_{\theta,\xi}^{(s-b)} &= a_{16}\sigma_x^{(s)} + a_{26}\sigma_\theta^{(s)} + a_{36}\sigma_r^{(s-b+c)} + \\ &+ a_{46}\sigma_{r\theta}^{(s-b+a)} + a_{56}\sigma_{rx}^{(s-b+a)} + a_{66}\sigma_{\theta x}^{(s)} + \zeta\big(a_{16}\sigma_x^{(s-b)} + \\ &+ a_{26}\sigma_\theta^{(s-b)} + a_{36}\sigma_r^{(s-2b+c)} + a_{46}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+a)} + a_{56}\sigma_{rx}^{(s-2b+a)} + a_{66}\sigma_{\theta x}^{(s-b)}\big) \end{aligned}$$

Система уравнений (1.8) интегрируется относительно ζ в каждом из трех случаев (1.4).

2. Рассмотрим случай $l < 1/2$, то есть $2a < b$. После интегрирования уравнений (1.8) по ζ получим

$$U_x^{(s)} = U^{(s)} + U^{*(s)}, \quad U_\theta^{(s)} = V^{(s)} + V^{*(s)}$$
$$U_r^{(s)} = W^{(s)} + W^{*(s)} \tag{2.1}$$

$$\sigma_x^{(s)} = \sigma_{x0}^{(s)} + \sigma_x^{*(s)} \quad (x\theta), \qquad \tau_{\theta x}^{(s)} = \tau_{\theta x 0}^{(s)} + \tau_{\theta x}^{*(s)} \tag{2.2}$$

$$\tau_{rx}^{(s)} = \zeta\tau_{rx1}^{(s)} + \tau_{rx0}^{(s)} + \tau_{rx}^{*(s)} \quad (x\theta), \qquad \sigma_r^{(s)} = \zeta\sigma_{r1}^{(s)} + \sigma_{r0}^{(s)} + \sigma_r^{*(s)} \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{x0}^{(s)} &= B_{11}\varepsilon_1^{(s)} + B_{12}\varepsilon_2^{(s)} + B_{16}\omega^{(s)} \quad (x\theta;\ 12) \\ \tau_{x\theta 0}^{(s)} &= B_{16}\varepsilon_1^{(s)} + B_{26}\varepsilon_2^{(s)} + B_{66}\omega^{(s)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\sigma_{r1}^{(s)} = \sigma_{\theta 0}^{(s)}, \qquad \tau_{rx1}^{(s)} = -\left(\sigma_{x,\,\xi}^{(s)} + \tau_{\theta x,\,\varphi}^{(s)}\right) \quad (x\theta) \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_1^{(s)} = U_{,\,\xi}^{(s)}, \qquad \varepsilon_2^{(s)} = V_{,\,\varphi}^{(s)} + W^{(s)}, \qquad \omega^{(s)} = U_{,\,\varphi}^{(s)} + V_{,\,\xi}^{(s)} \tag{2.6}$$

Величины со звездочкой известны и определяются по формулам

$$\begin{aligned}
W^{*(s)} &= \int_0^{\zeta} \left(a_{13}\sigma_x^{(s-b)} + a_{23}\sigma_\theta^{(s-b)} + a_{33}\sigma_r^{(s-2b)} + \right. \\
&\quad \left. + a_{34}\tau_{r\theta}^{(s-2b+a)} + a_{35}\tau_{rx}^{(s-2b+a)} + a_{36}\tau_{\theta x}^{(s-b)}\right) d\zeta \\
V^{*(s)} &= -\int_0^{\zeta} \left(U_{r,\,\varphi}^{(s-b+2a)} + \zeta U_{\theta,\,\zeta}^{(s-b)} - U_\theta^{(s-b)}\right) d\zeta + \\
&\quad + \int_0^{\zeta} \left(a_{14}\sigma_x^{(s-b+a)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-b+a)} + \ldots + a_{46}\tau_{\theta x}^{(s-b+a)}\right) d\zeta + \\
&\quad + \int_0^{\zeta} \zeta \left(a_{14}\sigma_x^{(s-2b+a)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-2b+a)} + \ldots + a_{46}\tau_{\theta x}^{(s-2b+a)}\right) d\zeta \\
U^{*(s)} &= \int_0^{\zeta} \left(a_{15}\sigma_x^{(s-b+a)} + a_{25}\sigma_\theta^{(s-b+a)} + a_{35}\sigma_r^{(s-2b+a)} + \right. \\
&\quad \left. + a_{45}\tau_{r\theta}^{(s-2b+2a)} + a_{55}\tau_{rx}^{(s-2b+2a)} + a_{56}\tau_{\theta x}^{(s-b+a)} - U_{r,\,\xi}^{(s-b+2a)}\right) d\zeta \\
\sigma_x^{*(s)} &= B_{11}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{12}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{16}\omega^{*(s)} + \zeta B_{16}\varepsilon_0^{(s-b)} + \\
&\quad + a_3\sigma_r^{(s-b)} + a_4\tau_{r\theta}^{(s-b+a)} + a_5\tau_{rx}^{(s-b+a)} + \\
&\quad + \zeta\left(a_1'\sigma_x^{(s-b)} + a_2'\sigma_\theta^{(s-b)} + a_3'\sigma_r^{(s-2b)} + a_4'\tau_{r\theta}^{(s-2b+a)} + \right. \\
&\quad \left. + a_5'\tau_{rx}^{(s-2b+a)} + a_6'\tau_{\theta x}^{(s-b)}\right), \quad (x\theta;\ 12;\ a_i b_i;\ a_i' b_i') \\
\tau_{\theta x}^{*(s)} &= B_{16}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{26}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{66}\omega^{*(s)} + \zeta B_{66}\varepsilon_0^{(s-b)} + \\
&\quad + c_3\sigma_r^{(s-b)} + c_4\tau_{r\theta}^{(s-b+a)} + c_5\tau_{rx}^{(s-b+a)} + \\
&\quad + \zeta\left(c_1'\sigma_x^{(s-b)} + c_2'\sigma_\theta^{(s-b)} + \ldots + c_6'\tau_{\theta x}^{(s-b)}\right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\sigma_r^{*(s)} = \int_0^\zeta \sigma_\theta^{*(s)} d\zeta - \int_0^\zeta \left(\zeta\sigma_{r,\xi}^{(s-b)} + \sigma_{rx,\xi}^{(s-b+2a)} + \right.$$

$$\left. + \zeta\sigma_{rx}^{(s-2b+2a)} + \sigma_{r\theta,\varphi}^{(s-b+2a)} + \sigma_r^{(s-b)}\right) d\zeta$$

$$\sigma_{r\theta}^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left(\sigma_{\theta x,\xi}^{*(s)} + \sigma_{\theta,\varphi}^{*(s)}\right) d\zeta - \int_0^\zeta \left(\zeta\sigma_{r\theta,\xi}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{\theta x,\xi}^{(s-b)} + 2\sigma_{r\theta}^{(s-b)}\right) d\zeta$$

$$\sigma_{rx}^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left(\sigma_{x,\xi}^{*(s)} + \sigma_{\theta x,\varphi}^{*(s)}\right) d\zeta - \int_0^\zeta \left(\sigma_{rx}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{rx,\xi}^{(s-b)} + \zeta\sigma_{x,\xi}^{(s-b)}\right) d\zeta$$

$$\varepsilon_1^{*(s)} = U_{,\xi}^{*(s)}, \quad \varepsilon_2^{*(s)} = V_{,\varphi}^{*(s)} + W^{*(s)}$$
$$\omega^{*(s)} = U_{,\varphi}^{*(s)} + V_{,\xi}^{*(s)}, \quad \varepsilon_0^{(s)} = U_{0,\xi}^{(s)} \tag{2.8}$$

$$a_i = -(a_{1i}B_{11} + a_{2i}B_{12} + a_{i6}B_{16}), \quad a_i' = -(a_{2i}B_{12} + a_{i6}B_{16})$$
$$b_i = -(a_{1i}B_{12} + a_{2i}B_{22} + a_{i6}B_{26}), \quad b_i' = -(a_{2i}B_{22} + a_{i6}B_{26}) \tag{2.9}$$
$$c_i = -(a_{1i}B_{16} + a_{2i}B_{26} + a_{i6}B_{66}), \quad c_i' = -(a_{2i}B_{26} + a_{i6}B_{66})$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 6)$$

B_{ij} — упругие коэффициенты, приводимые в [12].

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим систему

$$L_{11}U^{(s)} + L_{12}V^{(s)} + L_{13}W^{(s)} = p_1^{(s)}$$
$$L_{12}U^{(s)} + L_{22}V^{(s)} + L_{23}W^{(s)} = p_2^{(s)} \tag{2.10}$$
$$L_{13}U^{(s)} + L_{23}V^{(s)} + L_{33}W^{(s)} = q^{(s)}$$

где

$$L_{11} = B_{11}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi} + B_{66}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad (12;\ \xi\varphi)$$

$$L_{12} = B_{16}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi} + B_{26}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{2.11}$$

$$L_{13} = B_{12}\frac{\partial}{\partial\xi} + B_{26}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad L_{23} = B_{22}\frac{\partial}{\partial\varphi} + B_{26}\frac{\partial}{\partial\xi}, \qquad L_{33} = B_{22}$$

$$p_1^{(s)} = -X_1^{(s)} + \frac{1}{2}\left[\sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta = -1)\right]$$

$$p_2^{(s)} = -Y_1^{(s)} + \frac{1}{2}\left[\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = -1)\right] \tag{2.12}$$

$$q^{(s)} = Z_2^{(s)} - \frac{1}{2}\left[\sigma_r^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_r^{*(s)}(\zeta = -1)\right]$$

$$X_{1,2}^{(s)} = 1/2\,(X^{+(s)} \pm X^{-(s)}) \quad (XY), \quad Z_{1,2}^{(s)} = 1/2\,(Z^{+(s)} \mp Z^{-(s)})$$

$$X^{\pm(0)} = X^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = Y^{\pm}, \quad Z^{\pm(0)} = Z^{\pm} \tag{2.13}$$

$$X^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = Z^{\pm(s)} \equiv 0 \text{ при } s \lessgtr 0$$

$$\tau_{r0}^{(s)} = Z_1^{(s)} - 1/2\,[\sigma_r^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_r^{*(s)}(\zeta = -1)]$$

$$\tau_{rx0}^{(s)} = X_2^{(s)} - 1/2\,[\sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta = -1)] \tag{2.14}$$

$$\tau_{r\theta0}^{(s)} = Y_2^{(s)} - 1/2\,[\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = -1)]$$

Вводя вместо напряжений статически эквивалентные им внутренние силы и моменты, можно показать, что уравнения (2.10) и все остальные расчетные формулы этого пункта в исходном приближении совпадают с уравнениями [12] безмоментной теории цилиндрической оболочки, материал которой обладает плоскостью упругой симметрии, параллельной срединной плоскости.

3. В случае $l = 1/2$, интегрируя систему (1.8) относительно ζ, получим

$$U_r^{(s)} = W^{(s)} + W^{*(s)}$$

$$U_x^{(s)} = -\zeta W_{,\xi}^{(s)} + U^{(s)} + U^{*(s)} \tag{3.1}$$

$$U_\theta^{(s)} = -\zeta W_{,\eta}^{(s)} + V^{(s)} + V^{*(s)}$$

$$\sigma_x^{(s)} = \zeta\tau_{x1}^{(s)} + \tau_{x0}^{(s)} + \sigma_x^{*(s)} \ (x\theta), \qquad \sigma_{\theta x}^{(s)} = \zeta\tau_{\theta x1}^{(s)} + \tau_{\theta x0}^{(s)} + \sigma_{x\theta}^{*(s)}$$

$$\sigma_{xr}^{(s)} = 1/2\,\zeta^2\tau_{xr2}^{(s)} + \zeta\tau_{xr1}^{(s)} + \tau_{xr0}^{(s)} + \sigma_{rx}^{*(s)} \quad (x\theta) \tag{3.2}$$

$$\sigma_r^{(s)} = 1/6\,\zeta^3\tau_{r3}^{(s)} + 1/2\,\zeta^2\tau_{r2}^{(s)} + \zeta\tau_{r1}^{(s)} + \tau_{r0}^{(s)} + \sigma_r^{*(s)}$$

где $\tau_{x0}^{(s)}$, $\tau_{\theta0}^{(s)}$, $\tau_{x\theta0}^{(s)}$ определяются по формулам (2.4), (2.6), а для остальных величин имеем

$$\tau_{x1}^{(s)} = B_{11}\varkappa_1^{(s)} + B_{12}\varkappa_2^{(s)} + B_{16}\tau^{(s)} \quad (x\theta,\ 12) \tag{3.3}$$

$$\tau_{\theta x1}^{(s)} = B_{16}\varkappa_1^{(s)} + B_{26}\varkappa_2^{(s)} + B_{66}\tau^{(s)}$$

$$\varkappa_1^{(s)} = -W_{,\xi\xi}^{(s)}, \quad \varkappa_2^{(s)} = -W_{,\eta\eta}^{(s)}, \quad \tau^{(s)} = -2W_{,\xi\eta}^{(s)} \tag{3.4}$$

$$\tau_{rx(k+1)}^{(s)} = -(\tau_{xk,\xi}^{(s)} + \tau_{x\theta k,\eta}^{(s)}) \quad (x\theta) \quad (k = 0,\ 1)$$

$$\tau_{r(k+1)}^{(s)} = -(\tau_{rxk,\xi}^{(s)} + \tau_{r\theta k,\eta}^{(s)} - \tau_{\theta k}^{(s)}) \quad (k = 0,\ 1) \tag{3.5}$$

$$\tau_{r3}^{(s)} = -(\tau_{rx2,\xi}^{(s)} + \tau_{r\theta2,\eta}^{(s)})$$

$$V^{*(s)} = \int_0^{\zeta} (a_{14}\sigma_x^{(s-a)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-a)} + \ldots + a_{46}\sigma_{x\theta}^{(s-a)})\,d\zeta +$$

$$+\int_0^\zeta \zeta\left(a_{14}\sigma_x^{(s-3a)}+a_{24}\sigma_\theta^{(s-3a)}+\ldots+a_{46}\sigma_{x\theta}^{(s-3a)}\right)d\zeta-$$

$$-\int_0^\zeta\left(\zeta U_{\theta,\zeta}^{(s-2a)}-U_\theta^{(s-2a)}+W_{,\varphi}^{*(s)}\right)d\zeta \qquad (3.6)$$

$$U^{*(s)}=\int_0^\zeta\left(a_{15}\sigma_x^{(s-a)}+a_{25}\sigma_\theta^{(s-a)}+\ldots+a_{56}\sigma_{x\theta}^{(s-a)}-W_{,\xi}^{*(s)}\right)d\zeta$$

$$\sigma_r^{*(s)}=-\int_0^\zeta\left(\sigma_{rx,\xi}^{*(s)}+\sigma_{r\theta,\varphi}^{*(s)}+\sigma_\theta^{*(s)}\right)d\zeta-$$

$$-\int_0^\zeta\left(\zeta\sigma_{r,\zeta}^{(s-2a)}+\zeta\sigma_{rx,\xi}^{(s-2a)}+\sigma_r^{(s-2a)}\right)d\zeta$$

Не написанные здесь величины со звездочками определяются по формулам (2.7)—(2.8), только в них надо положить $b=2a$.

Перемещения определяются из уравнений, имеющих структуру (2.10), но оператор L_{33} и нагрузки $p_i^{(s)}$, $q^{(s)}$ уже имеют вид

$$L_{33}=B_{22}+\frac{1}{3}\Big[B_{11}\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}+4B_{16}\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\partial\varphi}+$$

$$+2\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\varphi^2}+4B_{26}\frac{\partial^4}{\partial\xi\partial\varphi^3}+B_{22}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\Big] \qquad (3.7)$$

$$p_1^{(s)}=-X_1^{(s)}+\frac{1}{2}\left[\sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta=1)-\sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta=-1)\right] \quad (12;\ x\theta;\ XY) \qquad (3.8)$$

$$q^{(s)}=Z_2^{(s)}+X_{2,\xi}^{(s)}+Y_{2,\varphi}^{(s)}-1/2\left[\sigma_r^{*(s)}(\zeta=1)-\sigma_r^{*(s)}(\zeta=-1)+\right.$$

$$\left.+\sigma_{rx,\xi}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{rx,\xi}^{*(s)}(\zeta=-1)+\sigma_{r\theta,\varphi}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{r\theta,\varphi}^{*(s)}(\zeta=-1)\right]$$

$$\tau_{rx0}^{(s)}=X_2^{(s)}-\frac{1}{2}\left[\sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_{rx}^{*(s)}(\zeta=-1)\right]-\frac{1}{2}\tau_{rx2}^{(s)} \quad (x\theta;\ XY)$$

$$\tau_{r0}^{(s)}=Z_1^{(s)}-\frac{1}{2}\left[\sigma_r^{*(s)}(\zeta=1)+\sigma_r^{*(s)}(\zeta=-1)\right]-\frac{1}{2}\tau_{r2}^{(s)} \qquad (3.9)$$

Уравнения и расчетные формулы, построенные в этом пункте, в исходном приближении совпадают с уравнениями теории напряженных состояний с большой изменяемостью (теория пологих оболочек) [12].

Проинтегрировав относительно ζ сначала первых три уравнения (1.8) и соотношения (3.2), потом те же уравнения и соотношения, умноженные на ζ, в пределах $(-1,1)$, получим такие уравнения, которые можно получить, если применять известную гипотезу о недеформируемых нормалях, а в уравнениях закона Гука пренебрегать вместе с напряжением σ_r и напряжения σ_{rx} и $\sigma_{r\theta}$, затем принимать предположения теории пологих оболочек.

Система уравнений (2.10) с помощью операторного метода может быть приведена к одному дифференциальному уравнению с частными производными восьмого порядка относительно некоторой потенциальной функции $\Phi^{(s)}(\xi, \varphi)$, через которую могут быть представлены все расчетные величины задачи. Однако, в отличие от изотропного и ортотропного случаев, напряженное и деформированное состояние оболочки здесь не расчленяется на симметричное и обратно симметричное относительно начальной образующей $\varphi = 0$.

Из (3.8), (3.6) и (2.7) видно, что $p_i^{(s)} \equiv 0$, $q^{(s)} \equiv 0$ при $s = 1, 2, \ldots, a-1$. Это значит, что поправки к внутреннему напряженному состоянию будут сказываться, начиная с приближения $s = a$. В изотропном и ортотропном случаях, а также в случае материала, обладающего плоскостью упругой симметрии, $p_i^{(s)} = q^{(s)} \equiv 0$ при $s = 1, 2, \ldots, 2a-1$, то есть поправки сказываются с приближения $s = 2a$. Это значит, что погрешность гипотез Кирхгоффа в случае оболочки с общей анизотропией порядка $O(\varepsilon^a)$, а в случае ортотропных и изотропных оболочек, а также оболочек, имеющих плоскость упругой симметрии, — $O(\varepsilon^{2a})$, то есть гипотезы Кирхгоффа приводят к большой погрешности в случае оболочки с общей анизотропией. Из (2.7) видно, что неучет касательных напряжений σ_{rx} и $\sigma_{r\theta}$ приводит к формальной погрешности порядка $O(\varepsilon^a)$, а неучет нормального напряжения σ_r — к погрешности порядка $O(\varepsilon^{2a})$. Однако, как убедимся ниже, из выражений $p_i^{(a)}$, $q^{(a)}$ вытекает, что эти погрешности могут быть и больше в зависимости от степени анизотропии.

Операторы L_{ij} совпадают с соответствующими операторами пологих оболочек [12]. Если же сравнить L_{ij} с соответствующими операторами классической теории, то заметим, что в нашем случае в операторах L_{22} и L_{23} отсутствуют соответственно следующие члены (по обозначениям монографии [12]):

$$\frac{4}{R^2}\left(D_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + D_{26}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{4}D_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) \tag{3.10}$$

$$-\frac{1}{R}\left(\frac{2D_{16}}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} + \frac{D_{12}+4D_{66}}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta} + \frac{4D_{26}}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \frac{D_{22}}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\right)$$

Из (2.7), (3.6) видно, что эти члены в результате асимптотического интегрирования уравнений трехмерной задачи появляются, начиная с приближения $s = 2a$. Однако имеются того же порядка другие члены тоже. Следовательно, эти члены не являются главными, и если, все же, мы хотим их удержать, то необходимо удержать все члены такого же порядка. Неучет этих членов может привести к погрешности порядка $O(\varepsilon^{2a})$. Начиная с приближения $s = a$, появляются новые члены, связанные с общей анизотропией и исчезающие, когда имеется плоскость упругой симметрии, неучет которых приводит к формальной погрешности порядка $O(\varepsilon^a)$. При асимптотическом подходе их учет связан с новыми нагрузочными членами $p_i^{(a)}$ и $q^{(a)}$, которые имеют вид

$$\begin{gathered} p_1^{(a)} = L'_{13} W^{(0)}, \quad p_2^{(a)} = L'_{23} W^{(0)} \\ q^{(a)} = L'_{31} U^{(0)} + L'_{32} V^{(0)} + L'_{33} W^{(0)} \end{gathered} \tag{3.11}$$

где

$$\begin{gathered} L'_{13} = L'_{31} = \frac{1}{6} \left| a_5 \frac{\partial^2 L_{11}}{\partial \xi^2} + b_5 \frac{\partial^2 L_{11}}{\partial \varphi^2} + 2c_5 \frac{\partial^2 L_{11}}{\partial \xi \partial \varphi} + \right. \\ \left. + a_4 \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \xi^2} + b_4 \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \varphi^2} + 2c_4 \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \xi \partial \varphi} \right| + \\ + \frac{1}{3} \left[a_4 \left(\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 L_{22}}{\partial \xi \partial \varphi} \right) + a_5 \left(\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \xi \partial \varphi} \right) + \right. \\ \left. + c_4 \left(\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 L_{22}}{\partial \varphi^2} \right) + c_5 \left(\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 L_{12}}{\partial \varphi^2} \right) \right] \\ (12;\ \xi\varphi;\ a_5 b_4;\ a_4 b_5;\ c_4 c_5) \\ L'_{33} = \frac{2}{3} \left[b_4 \left(\frac{\partial L_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{22}}{\partial \varphi} \right) + b_5 \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{12}}{\partial \varphi} \right) \right] + \\ + \frac{1}{3} \left| a_5 \frac{\partial^2 L_{13}}{\partial \xi^2} + b_5 \frac{\partial^2 L_{13}}{\partial \varphi^2} + 2c_5 \frac{\partial^2 L_{13}}{\partial \xi \partial \varphi} + \right. \\ \left. + a_4 \frac{\partial^2 L_{23}}{\partial \xi^2} + b_4 \frac{\partial^2 L_{23}}{\partial \varphi^2} + 2c_4 \frac{\partial^2 L_{23}}{\partial \xi \partial \varphi} \right| - \\ - \frac{1}{3} \left[a_4 \left(\frac{\partial^3 L_{12}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 L_{22}}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \right) + b_4 \left(\frac{\partial^3 L_{12}}{\partial \xi \partial \varphi^2} + \frac{\partial^3 L_{22}}{\partial \varphi^3} \right) + \right. \\ + a_5 \left(\frac{\partial^3 L_{11}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 L_{12}}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \right) + b_5 \left(\frac{\partial^3 L_{11}}{\partial \xi \partial \varphi^2} + \frac{\partial^3 L_{12}}{\partial \varphi^3} \right) + \\ \left. + 2c_4 \left(\frac{\partial^3 L_{12}}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3 L_{22}}{\partial \xi \partial \varphi^2} \right) + 2c_5 \left(\frac{\partial^3 L_{11}}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3 L_{12}}{\partial \xi \partial \varphi^2} \right) \right] \end{gathered} \tag{3.12}$$

Из (3.11) — (3.12) видно, что если имеет место соотношение

$$a_i,\ b_i,\ c_i \sim O(\varepsilon^{-a}) \quad (i = 4,\ 5) \tag{3.13}$$

то поправки от приближения $s = a$ будут порядка первого члена (нулевого приближения) в разложении (1.3), и асимптотика (1.5) не будет верна. Поправки от приближения $s = 2a$, то есть от членов типа (3.10), будут важны, если имеет место

$$a_i,\ b_i,\ c_i \sim O(\varepsilon^{-2a}) \quad (i = 3,\ 4,\ 5) \tag{3.14}$$

в чем можно убедиться, если вычислить нагрузочные члены для приближения $s = 2a$.

Если упругие коэффициенты материала таковы, что имеет место соотношение (3.13) (вычисления показывают, что для реальных материалов этот случай может встретиться редко), то напряженно-деформированное состояние уже нельзя описать уравнением восьмого порядка. Используя прием вывода уравнений, используемый в [2, 3], можно прийти к системе

$$\begin{gathered} L_{11}U^{(s)} + L_{12}V^{(s)} + (L_{13} - L_{13}')W^{(s)} = p_1^{(s)} \\ L_{12}U^{(s)} + L_{22}V^{(s)} + (L_{23} - L_{23}')W^{(s)} = p_2^{(s)} \\ (L_{13} - L_{13}')U^{(s)} + (L_{23} - L_{23}')V^{(s)} + (L_{33} - L_{33}')W^{(s)} = q^{(s)} \end{gathered} \tag{3.15}$$

которая эквивалентна одному дифференциальному уравнению с частными производными десятого порядка.

4. В случае $t > 1/2$, полагая в уравнениях (1.8) $c = 2a - b$, после интегрирования получим формулы (3.1)—(3.5), (2.4), (2.6). Меняются лишь выражения для $\tau_{r1}^{(s)}$, $\tau_{r2}^{(s)}$, $\varepsilon_2^{(s)}$ и $\varepsilon_2^{*(s)}$.

Эти величины определяются по формулам

$$\tau_{r1}^{(s)} = -(\tau_{rx0,\xi}^{(s)} + \tau_{r\theta 0,\varphi}^{(s)}), \qquad \tau_{r2}^{(s)} = -(\tau_{rx1,\xi}^{(s)} + \tau_{r\theta 1,\varphi}^{(s)}) \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_2^{(s)} = V_{,\varphi}^{*(s)}, \qquad \varepsilon_2^{*(s)} = V_{,\varphi}^{*(s)} \tag{4.2}$$

Величены со звездочкой в этом случае имеют вид

$$W^{*(s)} = \int_0^{\zeta} (a_{13}\sigma_x^{(s-2b+2a)} + a_{23}\sigma_\theta^{(s-2b+2a)} + \ldots + a_{36}\sigma_{\theta x}^{(s-2b+2a)})\, d\zeta$$

$$V^{*(s)} = \int_0^{\zeta} (a_{14}\sigma_x^{(s-b+a)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-b+a)} + \ldots + a_{46}\sigma_{\theta x}^{(s-b+a)})\, d\zeta -$$

$$- \int_0^{\zeta} \zeta (a_{14}\sigma_x^{(s-2b+a)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-2b+a)} + \ldots + a_{46}\sigma_{\theta x}^{(s-2b+a)})\, d\zeta -$$

$$- \int_0^{\zeta} (\zeta U_{0,\zeta}^{(s-b)} - U_0^{(s-b)} + W_{,\varphi}^{*(s)})\, d\zeta$$

$$U^{*(s)} = \int_0^{\zeta} (a_{15}\sigma_x^{(s-b+a)} + a_{25}\sigma_\theta^{(s-b+a)} + \ldots + a_{56}\sigma_{x\theta}^{(s-b+a)} - W_{,\xi}^{*(s)})\, d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(s)} = B_{11}\varepsilon_1^{*(s)} + B_{22}\varepsilon_2^{*(s)} + B_{16}\omega^{*(s)} + B_{12}U_r^{(s-2a+b)} +$$
$$+ B_{16}\zeta\varepsilon_\theta^{(s-b)} + a_3\sigma_r^{(s-2b+2a)} + a_4\sigma_{r\theta}^{(s-b+a)} + a_5\sigma_{rx}^{(s-b+a)} +$$

$$+\zeta\left(a_1^{'}\sigma_x^{(s-b)}+a_2^{'}\sigma_\theta^{(s-b)}+a_3^{'}\sigma_r^{(s-2b+2a)}+\right.$$

$$\left.+a_4^{'}\sigma_{r\theta}^{(s-2b+a)}+a_5^{'}\sigma_{rx}^{(s-2b+a)}+a_6^{'}\sigma_{\theta x}^{(s-b)}\right)\quad (x\theta;\ 12;\ a_i b_i;\ a_i^{'} b_i^{'}) \tag{4.3}$$

$$\sigma_{\theta x}^{*(s)}=B_{16}\varepsilon_1^{*(s)}+B_{26}\varepsilon_2^{*(s)}+B_{66}\omega^{*(s)}+B_{66}U_r^{(s-2a+b)}+$$

$$+B_{66}\zeta\varepsilon_\theta^{(s-b)}+c_3\sigma_r^{(s-2b+2a)}+c_4\sigma_{r\theta}^{(s-b+a)}+c_5\sigma_{rx}^{(s-b+a)}+$$

$$+\zeta\left(c_1^{'}\sigma_x^{(s-b)}+c_2^{'}\sigma_\theta^{(s-b)}+\ldots+c_6^{'}\sigma_{\theta x}^{(s-b)}\right)$$

$$\sigma_r^{*(s)}=-\int_0^\zeta\left(\sigma_{rx,\xi}^{*(s)}+\sigma_{r\theta,\varphi}^{*(s)}\right)d\zeta-$$

$$-\int_0^\zeta\left(\zeta\sigma_{r,\zeta}^{(s-b)}+\zeta\sigma_{rx,\xi}^{(s-b)}+\sigma_r^{(s-b)}-\sigma_\theta^{(s-2a+2b)}\right)d\zeta$$

$\sigma_{r\theta}^{*(s)}$, $\sigma_{rx}^{*(s)}$ опять определяются по формулам (2.7).

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим

$$L_{11}U^{(s)}+L_{12}V^{(s)}=p_1^{(s)}$$
$$L_{12}U^{(s)}+L_{22}V^{(s)}=p_2^{(s)} \tag{4.4}$$
$$L_{33}W^{(s)}=q^{(s)}$$

Операторы L_{ij}, нагрузки $p_i^{(s)}$, $q^{(s)}$ и неизвестные функции интегрирования $\tau_{rx0}^{(s)}$, $\tau_{r\theta 0}^{(s)}$ и $\tau_{r0}^{(s)}$ определяются соответственно по формулам (2.11), (3.7), (3.8) и (3.9), только в (3.7) в выражении L_{33} отсутствует слагаемое B_{22}.

Уравнения (4.4) при $s=0$ совпадают с уравнениями анизотропной пластинки, когда имеется плоскость упругой симметрии [13], то есть в случае $t>1/2$ в исходном приближении оболочка «работает» как пластинка.

Если в (1.5) для перемещений принять асимптотику (1.7) (особая асимптотика [3]), то, проделав аналогичные действия, придем к уравнениям, в исходном приближении совпадающим с уравнениями чисто моментного напряженного состояния.

5. Описанные выше напряженные состояния являются вообще проникающими, между тем в оболочке могут возникнуть и быстро затухающие напряженные состояния (погранслой).

Для построения погранслоя вблизи края $x=0$ $(\xi=0)$ в уравнениях теории упругости, преобразованных по формулам (1.2), вводится новая замена переменной по формуле

$$t=\xi/\varepsilon^{b-a}=x/h \tag{5.1}$$

Решение вновь полученных уравнений отыскивается в виде функций типа погранслоя

$$R_p = \varepsilon^{\varkappa_i} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s R_p^{(s)} (\varphi, \zeta) \exp(-\lambda t) \tag{5.2}$$

где R_p — любое из напряжений и перемещений, $\varkappa_i$ — показатели интенсивности, $\varkappa_{\sigma_i} = \varkappa$, $\varkappa_{u_i} = \varkappa + b$, $\lambda = \mathrm{const}$ характеризует показатель изменяемости и по свойству погранслоя, $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

После подстановки (5.2) в вышеуказанные уравнения и интегрирования вытекающих оттуда уравнений относительно ζ получим

$$\sigma_{xp}^{(s)} = \tau_{xp}^{(s)} + \sigma_{xp}^{*(s)}, \ldots, \quad \sigma_{\theta xp}^{(s)} = \tau_{\theta xp}^{(s)} + \sigma_{x\theta p}^{*(s)}$$

$$U_{xp}^{(s)} = U_p^{(s)} + U_p^{*(s)}, \quad U_{\theta p}^{(s)} = V_p^{(s)} + V_p^{*(s)}, \quad U_{rp}^{(s)} = W_p^{(s)} + W_p^{*(s)} \tag{5.3}$$

$$\tau_{xp}^{(s)} = \lambda^{-2} \tau_{rp,\,\zeta\zeta}^{(s)}, \quad \tau_{\theta xp}^{(s)} = \lambda^{-1} \tau_{r\theta p,\,\zeta}^{(s)}, \quad \tau_{rxp}^{(s)} = \lambda^{-1} \tau_{rp,\,\zeta}^{(s)}$$

$$\tau_{\theta p}^{(s)} = -a_{22}^{-1} \lambda^{-2} (a_{12} \tau_{rp,\,\zeta\zeta}^{(s)} + a_{25} \lambda \tau_{rp,\,\zeta}^{(s)} + a_{26} \lambda \tau_{r\theta p,\,\zeta}^{(s)} + a_{23} \lambda^2 \tau_{rp}^{(s)} + a_{24} \lambda^2 \tau_{r\theta p}^{(s)})$$

$$U_p^{(s)} = -\lambda^{-3} (A_1 \tau_{rp,\,\zeta\zeta}^{(s)} + A_4 \lambda \tau_{rp,\,\zeta}^{(s)} + A_5 \lambda \tau_{r\theta p,\,\zeta}^{(s)} + A_2 \lambda^2 \tau_{rp}^{(s)} + A_3 \lambda^2 \tau_{r\theta p}^{(s)}) \tag{5.4}$$

$$V_p^{(s)} = -\lambda^{-3} (A_5 \tau_{rp,\,\zeta\zeta}^{(s)} + A_6 \lambda \tau_{rp,\,\zeta}^{(r)} + A_7 \lambda \tau_{r\theta p,\,\zeta}^{(s)} + A_8 \lambda^2 \tau_{rp}^{(s)} + A_9 \lambda^2 \tau_{r\theta p}^{(s)})$$

$$W_p^{(s)} = -\lambda^{-4} [A_1 \tau_{rp,\,\zeta\zeta\zeta}^{(s)} + 2A_4 \lambda \tau_{rp,\,\zeta\zeta}^{(s)} + A_5 \lambda \tau_{r\theta p,\,\zeta\zeta}^{(s)} +$$

$$+ (A_2 + A_{10}) \lambda^2 \tau_{rp,\,\zeta}^{(s)} + (A_3 + A_8) \lambda^2 \tau_{r\theta p,\,\zeta}^{(s)} + A_{11} \lambda^3 \tau_{rp}^{(s)} + A_{12} \lambda^3 \tau_{r\theta p}^{(s)}]$$

$\sigma_{xp}^{*(s)}, \sigma_{x\theta p}^{*(s)}, \sigma_{rxp}^{*(s)}, \sigma_{\theta p}^{*(s)}, U_p^{*(s)}, V_p^{*(s)}$ и $W_p^{*(s)}$ определятся по формулам (5.4), если там $\tau_{rp}^{(s)}, \tau_{r\theta p}^{(s)}$ формально заменить соответственно через $\sigma_{rp}^{*(s)}, \sigma_{r\theta p}^{*(s)}$, а затем к полученным выражениям прибавить соответственно $R_x^{(s)}, R_{\theta x}^{(s)}, R_{rx}^{(s)}, R_\theta^{(s)}, R_U^{(s)}, R_V^{(s)}, R_W^{(s)}$, которые в свою очередь определяются по формулам

$$R_{xr}^{(s)} = \lambda^{-1} [\zeta (\sigma_{rp,\,\zeta}^{(s-b)} - \lambda \sigma_{rxp}^{(s-b)}) + \sigma_{r\theta p,\,\varphi}^{(s-b+a)} + \sigma_{rp}^{(s-b)} - \sigma_{\theta p}^{(s-b)}]$$

$$R_{\theta x}^{(s)} = \lambda^{-1} [\zeta (\sigma_{r\theta p,\,\zeta}^{(s-b)} - \lambda \sigma_{\theta xp}^{(s-b)}) + \sigma_{xp,\,\varphi}^{(s-b+a)} + 2\sigma_{r\theta p}^{(s-b)}]$$

$$R_x^{(s)} = \lambda^{-1} [\zeta (\sigma_{rxp,\,\zeta}^{(s-b)} - \lambda \sigma_{xp}^{(s-b)}) + \sigma_{\theta xp,\,\varphi}^{(s-b+a)} + \sigma_{rxp}^{(s-b)}]$$

$$R_\theta^{(s)} = a_{22}^{-1} [U_{rp}^{(s-b)} + U_{\theta p,\,\varphi}^{(s-b+a)} - \zeta (a_{12} \sigma_{xp}^{(s-b)} + a_{22} \sigma_{\theta p}^{(s-b)} + \ldots +$$

$$+ a_{26} \sigma_{\theta xp}^{(s-b)}) - (a_{12} R_x^{(s)} + a_{25} R_{rx}^{(s)} + a_{26} R_{\theta x}^{(s)})] \tag{5.5}$$

$$R_U^{(s)} = -\lambda^{-1} (a_{11} R_x^{(s)} + a_{12} R_\theta^{(s)} + a_{15} R_{rx}^{(s)} + a_{16} R_{\theta x}^{(s)})$$

$$R_V^{(s)} = -\lambda^{-1} (a_{16} R_x^{(s)} + a_{26} R_\theta^{(s)} + a_{56} R_{rx}^{(s)} + a_{66} R_{\theta x}^{(s)})$$

$$R_W^{(s)} = -\lambda^{-1} (a_{15} R_x^{(s)} + a_{25} R_\theta^{(s)} + a_{55} R_{rx}^{(s)} + a_{56} R_{\theta x} - R_{U,\,\zeta}^{(s)})$$

$\tau_{rp}^{(s)}$ и $\tau_{r\theta p}^{(s)}$ — решения однородной системы уравнений, соответствующей системе уравнений (5.6), а $\sigma_{rp}^{*(s)}$ и $\sigma_{r\theta p}^{*(s)}$ — частные решения этой же системы

$$L_1\sigma_{rp}^{(s)} + L_2\sigma_{r\theta p}^{(s)} = R_1^{(s)}$$
$$L_2\sigma_{rp}^{(s)} + L_3\sigma_{r\theta p}^{(s)} = R_2^{(s)} \tag{5.6}$$

где

$$L_1 = A_1\frac{\partial^4}{\partial\zeta^4} + 2A_4\lambda\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3} + (2A_2 + A_{10})\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2A_{11}\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{14}\lambda^4$$

$$L_2 = A_5\lambda\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3} + (A_3 + A_6)\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + (A_8 + A_{12})\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{13}\lambda^4$$

$$L_3 = A_7\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2A_9\lambda^3\frac{\partial}{\partial\zeta} + A_{15}\lambda^4 \tag{5.7}$$

$$R_1^{(s)} = \lambda^4[R_{W,\zeta}^{(s)} - (a_{13}R_x^{(s)} + a_{23}R_\theta^{(s)} + a_{35}R_{rx}^{(s)} + a_{36}R_{\theta x}^{(s)})]$$

$$R_2^{(s)} = \lambda^4[U_{rp,\varphi}^{(s-b+a)} - U_{\theta p}^{(s-b)} + \zeta U_{\theta,\zeta}^{(s-b)} + R_{V,\zeta}^{(s)} -$$
$$-\zeta(a_{14}\sigma_x^{(s-b)} + a_{24}\sigma_\theta^{(s-b)} + \ldots + a_{46}\sigma_{\theta x}^{(s-b)}) -$$
$$-(a_{14}R_x^{(s)} + a_{24}R_\theta^{(s)} + a_{45}R_{rx}^{(s)} + a_{46}R_{\theta x}^{(s)})]$$

$$A_1 = a_{22}^{-1}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2),\quad A_2 = a_{22}^{-1}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})$$
$$A_3 = a_{22}^{-1}(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}),\quad A_4 = a_{22}^{-1}(a_{15}a_{22} - a_{12}a_{25})$$
$$A_5 = a_{22}^{-1}(a_{16}a_{22} - a_{12}a_{26}),\quad A_6 = a_{22}^{-1}(a_{56}a_{22} - a_{25}a_{26})$$
$$A_7 = a_{22}^{-1}(a_{66}a_{22} - a_{26}^2),\quad A_8 = a_{22}^{-1}(a_{36}a_{22} - a_{23}a_{26})$$
$$A_9 = a_{22}^{-1}(a_{46}a_{22} - a_{24}a_{26}),\quad A_{10} = a_{22}^{-1}(a_{55}a_{22} - a_{25}^2)$$
$$A_{11} = a_{22}^{-1}(a_{35}a_{22} - a_{23}a_{25}),\quad A_{12} = a_{22}^{-1}(a_{45}a_{22} - a_{24}a_{25})$$
$$A_{13} = a_{22}^{-1}(a_{34}a_{22} - a_{23}a_{24}),\quad A_{14} = a_{22}^{-1}(a_{33}a_{22} - a_{23}^2)$$
$$A_{15} = a_{22}^{-1}(a_{44}a_{22} - a_{24}^2)$$

Полагая

$$\sigma_{r\theta p}^{(s)} = L_1\Psi^{(s)},\quad \sigma_{rp}^{(s)} = -L_2\Psi^{(s)} \tag{5.8}$$

решение однородной системы (5.6) сводится к определению $\Psi^{(s)}$ из уравнения

$$(L_1L_3 - L_2^2)\,\Psi^{(s)} = 0 \tag{5.9}$$

Уравнение (5.9) в раскрытом виде имеет вид

$$B_0\frac{\partial^6\Psi^{(s)}}{\partial\zeta^6} + B_1\lambda\frac{\partial^5\Psi^{(s)}}{\partial\zeta^5} + B_2\lambda^2\frac{\partial^4\Psi^{(s)}}{\partial\zeta^4} + B_3\lambda^3\frac{\partial^3\Psi^{(s)}}{\partial\zeta^3} +$$
$$+ B_4\lambda^4\frac{\partial^2\Psi^{(s)}}{\partial\zeta^2} + B_5\lambda^5\frac{\partial\Psi^{(s)}}{\partial\zeta} + B_6\lambda^6\Psi^{(s)} = 0 \tag{5.10}$$

Коэффициенты B_i легко выражаются через A_i. Отметим, что (5.10) совпадает с уравнением погранслоя для пластинки с общей анизотропией [13].

В случае ортотропных и изотропных материалов отличны от нуля только $A_1, A_2, A_7, A_{14}, A_{15}$, поэтому $L_2 \equiv 0$, и система уравнений (5.6) распадается на два уравнения, которые определяют решения типа плоского и антиплоского погранслоев, соответственно.

Так как $\sigma_{rp}, \sigma_{r\theta p}, \sigma_{rxp}$ должны удовлетворять условиям отсутствия напряжений на внешней и внутренней поверхностях, то

$$L_1\Psi^{(s)}\big|_{\zeta=\pm1} = L_2\Psi^{(s)}\big|_{\zeta=\pm1} = L_2'\Psi^{(s)}\big|_{\zeta=\pm1} = 0 \tag{5.11}$$

$$(s = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ b - a - 1)$$

Отметим также, что если взять такое частное решение системы (5.6), которое удовлетворяет условиям

$$\sigma^{*(s)}_{rp}(\zeta = \pm 1) = \sigma^{*(s)}_{r\theta p}(\zeta = \pm 1) = \sigma^{*(s)}_{rxp}(\zeta = \pm 1) = 0 \tag{5.12}$$

то общее решение однородной системы при $s \geqslant b - a$ снова будет удовлетворять условиям (5.11). $\sigma^{(s)}_{xp}$, $\sigma^{(s)}_{\theta xp}$ и $\sigma^{(s)}_{rxp}$ выражаются через функцию $\Psi^{(s)}$ по формулам

$$\sigma^{(s)}_{xp} = -\lambda^{-2}L_2^*\Psi^{(s)}, \quad \sigma^{(s)}_{\theta xp} = \lambda^{-1}L_1'\Psi^{(s)}, \quad \sigma^{(s)}_{rxp} = -\lambda^{-1}L_2'\Psi^{(s)} \tag{5.13}$$

и удовлетворяют условиям самоуравновешенности

$$\int_{-1}^{1}\sigma^{(s)}_{xp}d\zeta = \int_{-1}^{1}\zeta\sigma^{(s)}_{xp}d\zeta = \int_{-1}^{1}\sigma^{(s)}_{\theta xp}d\zeta = \int_{-1}^{1}\sigma^{(s)}_{rxp}d\zeta = 0 \tag{5.14}$$

Эти условия легко проверяются непосредственным вычислением этих интегралов с учетом (5.13) и (5.11).

Условия (5.11) приводят к системе из шести однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций интегрирования. Чтобы эта система имела нетривиальное решение, определитель должен равняться нулю. Это приводит к трансцендентному уравнению, откуда определяется λ. Вещественная часть первого собственного значения этого трансцендентного уравнения с $\mathrm{Re}\lambda > 0$ будет характеризовать быстроту затухания погранслоя. Отметим, что если для изотропного и ортотропного случаев собственные значения определяются сравнительно легко — они определяются из трансцендентных уравнений, выведенных Л. А. Агаловяном [15], то в общем случае их определение связано с преодолением значительных математических трудностей.

Краевая задача (5.10), (5.11) есть обобщенная задача на собственные значения для операторного пучка. Задачи подобного рода исследовались в работах Я. Д. Тамаркина, В. М. Келдыша, М. Г. Крейна, А. С. Маркуса, А. Г. Костюченко, М. Б. Оразова и др. [16, 17]. В частности, в работе [17] доказана двукратная полнота корневых векторов квадратичных пучков, связанных с задачами теории упругости изотропного тела. По аналогии [17], для задачи (5.10), (5.11) можно утверждать, что совокупность собственных значений, соответствующая $\mathrm{Re}\lambda > 0$, трехкратно полна и три скалярные функции могут быть разложены по соответствующим собственным функциям. Последнее означает, что, используя решения внутренней задачи и погранслоя в каждом краю, можно удовлетворить трем граничным условиям пространственной задачи. Процедура удовлетворения торцевым условиям—предмет отдельного исследования.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 VII 1978

Շ. Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱՅՈՎ ՕԺՏՎԱԾ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԻ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՈՐՈՇԻՉ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ընդհանուր գլանային անիզոտրոպիայի հատկությամբ օժտված գլանային թաղանթի լարված-դեֆորմացված վիճակի որոշման խնդիրը։ Ասիմպտոտիկ մեթոդի հիման վրա կառուցվում են գլանային թաղանթի հնարավոր լարվածային վիճակները, որոնց փոփոխելիության գործակիցը փոքր է մեկից։ Ներքին լարվածային վիճակների որոշումը բերվում է այնպիսի հավասարումների հաջորդականության լուծման, որում հավասարումների ձախ մասերը համընկնում են թաղանթների դասական տեսության հավասարումների հետ, երբ թաղանթի նյութը ունի սիմետրիայի մեկ հարթություն, իսկ սահմանային շերտի տիպի լարվածային վիճակը նկարագրվում է վեցերորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումով և այն չի տրոհվում հարթ և հակահարթ (ոլորում) սահմանային շերտերի։

Առաջարկվում են երկչափ հավասարումներ, որոնք հնարավորություն են տալիս համեմատաբար պարզ ձևով որոշելու ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված գլանային թաղանթի լարված-դեֆորմացված վիճակը։

Քննարկվում են կիրառական տեսությունների կիրառելիության հարցը և ցույց է տրված, որ վերջինս էապես կախված է առաձգական գործակիցների հարաբերությունից։

ON STRESS STATES AND THE EQUATIONS TO DESCRIBE THEM FOR CYLINDRICAL SHELLS OF GENERAL ANISOTROPY

SH. M. KHACHATRIAN

Summary

The determination of stress-strain state of cylindrical shells made from material of general anisotropy is examined. On the basis of the

asymptotic method the iterative processes are constructed describing the possible stress state in the cylindrical shell. It is shown that the determination of interrior stress state may be reduced to the solution of a sequence of equations where the left sides coincide with the classical equations for shells having a surface of elastic symmetry, and the boundary stressed layer state is described by an ordinary differential equation of the sixth order and it does not fall into the plane and anti-plane boundary layers.

Two-dimensional equations are suggested providing a comparatively simple finding of stress-strain states for the above cylindrical shells.

The applicability of applied theories is discussed and it is shown to depend strictly on the ratio of elastic coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
2. *Гольденвейзер А. Л.* О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек. В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1968.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
4. *Базаренко Н. А., Ворович И. И.* Асимптотическое поведение решения задач теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
5. *Reiss E. L.* A theory for small rotationally simmetric deformation of cylindrical shells. Comm. Pure and Appl. Math., 1960, v. 13, No. 3.
6. *Reiss E. L.* On the theory of cylindrical shells. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1962, v. 15, No. 3.
7. *Понятовский В. В.* Применение асимптотического метода интегрирования к задаче равновесия тонкого бруса, произвольно нагруженного по боковой поверхности. МТТ, 1968, № 5.
8. *Агаловян Л. А.* О некоторых соотношениях линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения. МТТ, 1972, № 1.
9. *Widera O. E., Chung C. B.* A theory for non-homogeneous, anisotropic cylindrical shells. J. Compos. Mater., 1972, v. 6, Jan.
10. *Бердичевский В. Л.* Об уравнениях теории анизотропных неоднородных стержней. ДАН СССР, 1976, т. 228, № 3.
11. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М., «Мир», 1976.
12. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974.
13. *Агаловян Л. А., Хачатрян Ш. М.* К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией. В сб. «XI Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластин». Тезисы докладов, М., 1977.
14. *Агаловян Л. А.* О погранслое ортотропных пластинок. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1973, т. 26, № 2.
15. *Агаловян Л. А.* О погранслое пластинок. Докл. АН Арм. ССР, 1972, т. 55, № 3.
16. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН СССР, 1951, т. 77, № 1.
17. *Костюченко А. Г., Оразов М. Б.* О полноте корневых векторов некоторых самосопряженных квадратичных пучков. Функц. анализ., 1977, т. 11, вып. 4.