ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXII, №3, 1979 Механика

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, В. Б. ЗЕЛЕНЦОВ

МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ДЕФОРМАЦИИ ЧИСТОГО СДВИГА

В работе [1] предложен метод решения контактных задач теории упругости для тел конечных размеров, основанный на построении и использовании системы однородных решений. В настоящей работе этим методом решены две двумерные контактные задачи о чистом сдвиге штампом цилиндрического упругого тела, поперечное сечение которого представляет собой прямоугольник. Проведено исследование бесконечной алгебраической системы, к которой сводятся задачи. Доказана высокая эффективность метода. На основании полученного численного материала в довольно широком диапазоне изменения параметров $\lambda = ab^{-1}$, $\beta = hb^{-1}$ предложены аналитические решения задач. Полученные численные результаты сравниваются с результатами работы [2].

1. Рассматриваются две задачи о сдвиге штампом цилиндрического упругого тела, поперечное сечение которого представляет собой прямоугольник $|x| \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant h$, $|z| < \infty$. В предположении, что $u = v = 0$ во всей призме, а w не зависит от z, задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta w(x, y) = 0 \tag{1.1}$$

со следующими граничными условиями:

$$y = 0 \quad w = 0 \quad (|x| \leqslant b)$$

$$y = h \qquad G\frac{\partial w}{\partial y} = \tau_{yz} = 0, \quad a < |x| < b$$

$$w = \varepsilon, \qquad |x| \leqslant a$$

$$a) \qquad x = \pm b \quad w = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant h \tag{1.2}$$

$$б) \qquad x = \pm b \quad G\frac{\partial w}{\partial x} = \tau_{xz} = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant h \tag{1.3}$$

Отсюда видно, что задачи a и $б$ различаются лишь условиями на боковых гранях.

Следуя схеме метода решения [1], необходимо знать решение задачи о чистом сдвиге упругого слоя $0 \leqslant y \leqslant h$. Для этого необходимо решить краевую задачу для уравнения Лапласа (1.1). Граничные условия задачи имеют вид

$$y = 0 \quad w = 0 \qquad |x| < \infty$$

$$y = h \quad \tau_{yz} = G\frac{\partial w}{\partial y} = \tau(x) \qquad |x| \leqslant a \tag{1.4}$$

$$\tau_{yz} = 0 \qquad |x| > a$$

Решение такой задачи, полученное с помощью интегрального преобразования Фурье, известно и имеет вид

$$w_1(x, y) = \frac{1}{\pi G}\int_{-a}^{a}\tau(\xi)\,d\xi\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{th}\alpha y}{\alpha}\cos\alpha(x-\xi)\,d\alpha\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi G}\int_{-a}^{a}\tau(\xi)\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}(\xi - x) + \sin\frac{\pi y}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}(\xi - x) - \sin\frac{\pi y}{2}}\,d\xi \tag{1.5}$$

Также необходимо построить решение краевой задачи (1.4) с однородными граничными условиями. Решение такой задачи можно записать в виде ряда по однородным решениям

$$w_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{ch}\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{x}{h}\sin\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{y}{h} \tag{1.6}$$

где A_k — произвольные постоянные.

Далее, для выполнения граничных условий на боковых гранях используем суперпозицию полученных решений w_1 и $-w_2$ и условие ортогональности функций $\sin\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{y}{h}$ на отрезке $0 \leqslant y \leqslant h$. В результате этого получим выражение вида

$$A_n p_n = \frac{4}{\pi G(2n-1)}e^{-\gamma_n}\int_0^a \tau(\xi)\operatorname{ch}\left(\gamma_n\frac{\xi}{b}\right)d\xi \tag{1.7}$$

где для задачи а) $p_n = (-1)^{n-1}\operatorname{ch}\gamma_n$, б) $p_n = (-1)^n\operatorname{sh}\gamma_n$, $\gamma_n = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right)bn^{-1}$.

Теперь получим интегральные уравнения для рассматриваемых задач, используя суперпозицию решений $w_1(x, y)$ и $-w_2(x, y)$ при $y = h$ и граничные условия (1.2), (1.3). Имеем

$$w_1(x, h) - w_2(x, h) = \varepsilon \qquad |x| \leqslant a \tag{1.8}$$

Тогда интегральные уравнения запишутся в следующем виде:

$$-\int_{-a}^{a}\tau(\xi)\ln\left|\operatorname{th}\frac{\pi(\xi - x)}{4}\right|d\xi = \pi G\varepsilon + \pi G\sum_{n=1}^{\infty}A_n\omega_n\operatorname{ch}\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{x}{h} \tag{1.9}$$

где для задачи а) $\omega_n = (-1)^{n-1}$, б) $\omega_n = (-1)^n$.

Решение интегральных уравнений (1.9) можно представить в форме

$$\tau(x) = G\varepsilon\tau_0(x) + G\sum_{n=1}^{\infty} A_n\omega_n\tau_n(x) \tag{1.10}$$

где ω_n то же, что в (1.9).

Подставляя решения в интегральные уравнения и приравнивая коэффициенты при неизвестных A_n в левых и правых частях, получим интегральные уравнения для определения $\tau_n(x)$

$$-\int_{-a}^{a} \tau_n(\xi)\ln\left|\operatorname{th}\frac{\pi(\xi-x)}{4}\right| d\xi = \begin{cases} \pi & (n=0) \\ \pi\operatorname{ch}\pi\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{x}{h} & (n>1) \end{cases} \tag{1.11}$$

Решение интегральных уравнений представим в виде [3]:

$$a\tau_0(x) = \frac{\pi\operatorname{ch}\pi(2\gamma)^{-1}}{\gamma K(\sqrt{1-\operatorname{th}^2\pi(2\gamma)^{-1}})\sqrt{2(\operatorname{ch}\pi\gamma^{-1}-\operatorname{ch}\pi x\gamma^{-1})}} \tag{1.12}$$

$$a\tau_n(x) = \frac{S(n)}{\gamma\sqrt{2(\operatorname{ch}\pi\gamma^{-1}-\operatorname{ch}\pi x\gamma^{-1})}} -$$

$$-\frac{\pi(2n-1)^2}{4\sqrt{2}\gamma}\int_x^1 \frac{P_{n-1}(\operatorname{ch}\pi\gamma^{-1}x)\operatorname{sh}(\pi\gamma^{-1}\varepsilon)\pi\gamma^{-1}d\varepsilon}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\pi\gamma^{-1}\varepsilon-\operatorname{ch}\pi\gamma^{-1}x)}} \tag{1.13}$$

Здесь

$$S(n) = \frac{\pi\operatorname{ch}\pi(2\gamma)^{-1}}{K(\sqrt{1-\operatorname{th}^2\pi(2\gamma)^{-1}})\,P_{-1/2}(\gamma_0)}P_{n-1}(\gamma_0) +$$

$$+\frac{\pi\operatorname{sh}\pi\gamma^{-1}}{P_{-1/2}(\gamma_0)}\left[P_{-1/2}(\gamma_0)P^1_{n-1}(\gamma_0) - P_{n-1}(\gamma_0)P^1_{-1/2}(\gamma_0)\right] \tag{1.14}$$

а $K(x)$ — полный эллиптический интеграл I рода, $P_n(x)$, $P_n^m(x)$ — полиномы и присоединенные функции Лежандра, $\gamma = \lambda\beta^{-1}$, $\gamma_0 = \operatorname{ch}\gamma$.

Используя рекуррентные формулы для полиномов Лежандра [4], для $\tau_n(x)$ ($n = 1, 2, 3$) можно получить следующие формулы:

$$a\tau_1(x) = \frac{S(1)}{\gamma\sqrt{2}}r^{-1}(x) - \frac{\pi(2n-1)^2}{2\sqrt{2}\gamma}r(x)$$

$$a\tau_2(x) = \frac{S(2)}{\gamma\sqrt{2}}r^{-1}(x) - \frac{\pi(2n-1)^2}{2\sqrt{2}\gamma}r(x)\left[\frac{r^2(x)}{3} + \operatorname{ch}\pi x\gamma^{-1}\right]$$

$$a\tau_3(x) = \frac{S(3)}{\gamma\sqrt{2}}r^{-1}(x) - \frac{\pi(2n-1)^2}{2\sqrt{2}\gamma}r(x)\left[\frac{3}{5}r^4(x) + \right.$$

$$\left. + 2\operatorname{ch}\pi x\gamma^{-1}r^2(x) + 3\operatorname{ch}^2\pi x\gamma^{-1} - 1\right]$$

где

$$r(x) = \sqrt{\operatorname{ch} \pi\gamma^{-1} - \operatorname{ch} \pi x \gamma^{-1}}$$

Здесь также использовалось интегральное представление вида [5]:

$$P_\nu^\mu(\operatorname{ch} z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\operatorname{sh} z)^\mu}{\Gamma(1/2-\mu)} \int_0^z \frac{\operatorname{ch}\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)v\right]}{(\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} v)^{\mu+1/2}} dv, \quad \left(\operatorname{Re}\mu < \frac{1}{2}\right)$$

Далее, подставив (1.10) в (1.7), получим бесконечные алгебраические системы для определения постоянных A_n соответственно для задач *а* и *б*:

$$p_n A_n = \frac{4}{\pi(2n-1)} e^{-\gamma_n} \left[\varepsilon \int_0^1 \tau_0(\xi) \operatorname{ch} \gamma_n \frac{\xi}{b} d\xi + \right.$$

$$\left. + G \sum_{k=1}^{\infty} A_k (-1)^{k-1} \int_0^1 \tau_k(\xi) \operatorname{ch} \frac{\pi}{h}\left(n - \frac{1}{2}\right) \xi d\xi \right] \tag{1.15}$$

p_n и γ_n означают то же, что в (1.7).

Введем следующие обозначения: $x_n = A_n \varepsilon^{-1} \omega_n p_n$

$$f_n = \frac{4}{\pi(2n-1)} e^{-\gamma_n} \int_0^1 \tau_0(\xi) \operatorname{ch} \gamma_n b^{-1} \xi d\xi$$

$$a_{kn} = \frac{4}{\pi(2n-1) p_k} e^{-\gamma_n} \int_0^1 \tau_k(\xi) \operatorname{ch} \gamma_n b^{-1} \xi d\xi \tag{1.16}$$

Тогда бесконечная система (1.15) приобретает вид

$$x_n = f_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} x_k \qquad (n = 1, 2 \ldots) \tag{1.17}$$

Подставив (1.13), (1.14) в (1.16), получим формулы для всех элементов бесконечной системы (1.17)

$$f_n = \frac{2}{2n-1} \frac{e^{-\gamma_n}}{K\left(\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \pi (2\gamma)^{-1}}\right)} \operatorname{ch} \pi (2\gamma)^{-1} P_{n-1}(\gamma_0) \tag{1.18}$$

$$a_{kn} = \left[\frac{1}{2} S(k) P_{n-1} - \frac{\pi}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{sh}(\pi\gamma^{-1}) P_{n-1} P_{k-1}^1 - \right.$$

$$\left. - P_{k-1}^1 P_{n-1}^1)(k-n)^{-1}(k+n-1)^{-1} \right] p_k^{-1} \tag{1.19}$$

$$a_{kk}=\left[\frac{1}{2}S(k)P_{k-1}-\frac{\pi}{8}\operatorname{sh}(\pi\gamma^{-1})(2k-1)\left(P_{k-1}\frac{\partial P_{k-1}^1}{\partial k}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-P_{k-1}^1\frac{\partial P_{k-1}}{\partial k}\right)\right]p_k^{-1}$$

где для задачи *а*) $\omega_n=(-1)^{n-1}$, $p_n=\operatorname{ch}\gamma_n$; для задачи *б*) $\omega_n=(-1)^n$; $p_n=\operatorname{sh}\gamma_c$, $P_k^n=P_k^n(\gamma_0)$.

Решив бесконечную систему, найдем затем решение поставленных задач по формуле (1.11). С учетом принятых обозначений, имеем

$$a(G\varepsilon)^{-1}\tau(x)=\tau_0(x)\pm\sum_{n=1}^{\infty}x_np_n^{-1}\tau_n(x) \qquad (1.20)$$

где p_n обозначает то же, что и в (1.19).

Сдвигающая сила находится интегрированием (1.20) и имеет вид

$$(G\varepsilon)^{-1}T=\alpha\left[P_{-1/2}(\gamma_0)\pm\sum_{n=1}^{\infty}x_np_n^{-1}P_{n-1}(\gamma_0)\right] \qquad (1.21)$$

где

$$\alpha=\pi\operatorname{ch}\pi(2\gamma)^{-1}K^{-1}\left(\sqrt{1-\operatorname{th}^2\pi(2\gamma)^{-1}}\right)2^{-1}$$

p_n — то же, что и в (1.19).
Знак «+» — для задачи *а*, знак «—» — для задачи *б*.

2. Теперь легко перейти к исследованию полученной бесконечной системы (1.17). Установим поведение f_n, a_{kn} при больших номерах k, n. Для этого необходимо установить асимптотики по индексу P_n и P_{n-1}^1. Пользуясь [4], [6], выпишем нулевые члены асимптотик P_n и P_{n-1}^1

$$P_n(\operatorname{ch}\pi\gamma^{-1})\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n\operatorname{sh}\pi\gamma^{-1}}}e^{+\gamma_n}\quad(z\ll n) \qquad (2.1)$$

$$P_{n-1}^1(\operatorname{ch}\pi\gamma^{-1})\sim\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\operatorname{sh}\pi\gamma^{-1}}}e^{+\gamma_n}\quad(z\ll n) \qquad (2.2)$$

Тогда легко получаем

$$f_n\sim\left[2\sqrt{\pi}K\left(\sqrt{1-\operatorname{th}^2\pi\gamma^{-1}}\right)\operatorname{th}\pi(2\gamma)^{-1}n\sqrt{\pi}\right]^{-1}\times$$

$$\times\exp\left(-\pi(b-a)h^{-1}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right) \qquad (2.3)$$

$$a_{kn}\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{n}\,(k+n)}\exp\left(-\pi(b-a)h^{-1}(k+n-1)\right)$$

Из предыдущего видно, что элементы матрицы и свободные члены бесконечной системы экспоненциально убывают. Значит, полученная бесконечная система (1.17) принадлежит к типу нормальных систем Пуанкаре-Коха [7].

3. По изложенной схеме решения задач *а* и *б* был составлен алгоритм для реализации на ЭВМ. Бесконечная система (1.17) решалась методом редукции. Необходимо заметить, что сферические функции и их производные по индексу считались с использованием удобного интегрального представления [5]

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{2^\mu (z^2-1)^{-\mu/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} \int_0^\pi \left(z+\sqrt{z^2-1}\cos t\right)^{\nu+\mu} (\sin t)^{-2\mu}\, dt \qquad (3.1)$$

$$\operatorname{Re}\mu < 1/2$$

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\pi\Gamma(\nu+1)} \int_0^\pi \left(z+\sqrt{z^2-1}\cos t\right)^{\nu} \cos mt\,dt \qquad (3.2)$$

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Так как выражение $z+\sqrt{z^2-1}\cos t > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi$, $z > 0$, то интеграл является функцией непрерывной при всех действительных значениях ν. Следовательно, выражения (3.1) и (3.2) можно дифференцировать по ν любое количество раз. Тогда имеем

$$\frac{d^n P_\nu^m(z)}{d\nu^n} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{d^n}{d\nu^n}\left[\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\right] \int_0^\pi \left(z+\sqrt{z^2-1}\cos t\right)^{\nu} \cos mt\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\pi \left(z+\sqrt{z^2-1}\cos t\right)^{\nu} \ln^n\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos t\right) \cos mt\,dt \right\} \qquad (3.3)$$

Такое вычисление имеет большие преимущества перед известными авторами, так как все интегралы считаются очень быстро любой из известных стандартных процедур. В процессе счета было установлено, что для достижения необходимой точности решения, а именно 4 верных цифр, требуется решение всего 3-х уравнений для реального диапазона изменения параметров $0 < \lambda < 0.95$, $0 < \beta < 2$. Метод хорошо работает при $\frac{b-a}{h} > 1$. Это видно из формул (2.3). В табл. 1, 2 (соответственно, для задач *а*, *б*) приведены для сравнения числовые результаты по методу работы [2], любезно предоставленные ее автором, и числовые данные, полученные авторами статьи. Анализ показывает, что с помощью изложенного метода можно получить более точные результаты в гораздо более широком диапазоне параметров λ, β, чем методом работы [2].

В табл. 1, 2 введены обозначения $a\,(G\varepsilon)^{-1}\,\tau\,(x) = \tau^0\,(x)$, $T\,(G\varepsilon)^{-1} = T^0$.

Таблица 1

β	.7931		1		1.7692	
λ	.3448		.4348		.7692	
$\tau^0(x)$ / x		[2]		[2]		[2]
.0	.5930	.5923	.6208	.6168	.8082	.7723
.3	.6197	.6188	.6514	.6470	.8719	.8296
.6	.7320	.7310	.7800	.7734	1.1390	1.0701
.9	1.3242	1.3236	1.4467	1.4305	2.4748*	2.2846
T^0	1.8371	1.7095	1.9686	1.8180	3.0554	2.6255

Таблица 2

β	.3846		.5		1.5385	
λ	.7692		.5		.7692	
$\tau^0(x)$ / x		[2]		[2]		[2]
.0	2.0027	2.0027	1.0409	1.0411	.5208	.5232
.3	2.0091	2.0093	1.0634	1.0637	.5255	.5292
.6	2.0626	2.0636	1.1711	1.1719	.5519	.5583
.9	2.7077	2.7177	1.8679	1.8718	.7531	.7721
T^0	4.6651	4.6246	2.8285	2.7356	1.2651	1.2349

Расчеты показывают, что при $\beta \leqslant 2\,(1-\lambda)$ можно ограничиться нулевым приближением даже одного уравнения бесконечной системы (1.17). Тогда решение в этом диапазоне параметров можно записать в аналитическом виде

$$a\,(G\varepsilon)^{-1}\,\tau\,(x) = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\gamma}\left\{\left[1 + \frac{2S\,(1)}{\pi p_1}\right] r^{-1}\,(x) - \frac{\sqrt{2}}{p_1}\,r\,(x)\right\} \tag{3.4}$$

$$(G\varepsilon)^{-1}\,T = \alpha\left[P_{-1/2}\,(\gamma_0) + \frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi}{2}\,\beta^{-1}\right) p_1^{-1}\right] \tag{3.5}$$

В (3.4) и (3.5) обозначения те же, что и в (1.19), а α — то же, что в (1.21).

НИИ механики и прикладной
математики РГУ

Поступила 20 III 1978

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Վ. Բ. ԶԵԼԵՆՑՈՎ

ՄԱՔՈՒՐ ՍԱՀՔԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՀԱՄԱՍԵՌ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվել են ուղղանկյունաձև ձողի մաքուր սահքի վերաբերյալ երկու խառը խնդիրներ համասեռ լուծումների եղանակով։ Եղանակի բարձր արդյունավետությունը կայանում է նրանում, որ նրա օգնությամբ լուծվող խնդիրների ինտեգրալ հավասարումները բերվում են Պուանկարե—Կոխի անվերջ հանրահաշվական սիստեմի լուծման։

Դրա շնորհիվ այստեղ ուսումնասիրվող խնդիրների համար առաջարկվում են անալիտիկ լուծումներ։

THE METHOD OF HOMOGENEOUS SOLUTIONS IN MIXED PROBLEMS FOR A PURE SHEAR STRAIN

V. M. ALEXANDROV, V. B. ZELENTSOV

Summary

Two mixed problems for a pure shear of a rectangular beam are investigated by the method of homogeneous solutions. The superior efficiency of this method resides in the fact that it provides the reduction of the integral equations of the problems to the solution of the infinite algebraic system of Poincare-Koch. Accordingly, the analytical solutions of the problems in question are suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М* Метод однородных решений в контактных задачах теории упругости для тел конечных размеров. Изв. АН СССР, СКНЦ ВШ, сер. естеств. наук, 1974, вып. 4.
2. *Чебаков М. И.* Сдвиг штампом бруса прямоугольного сечения. Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции «Жесткость машиностроительных конструкций». М., 1976.
3. *Александров В. М.* Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1967, т. 20, № 1.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1, М., «Наука», 1973.
6. *Копсон Э. Т.* Асимптотические разложения. М., «Мир», 1966.
7. *Нуллер Б. М.* Контактная задача для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.