ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, № 2, 1979 Механика

Е. В. КОВАЛЕНКО

# ОБ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОГО ОСНОВАНИЯ С ТОНКИМ УСИЛИВАЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ

Рассмотрено интегральное уравнение второго рода на конечном интервале с ядром, зависящим от разности аргументов. К уравнению такого типа приводится ряд плоских контактных задач для линейно-деформируемых оснований, поверхность которых усилена тонким упругим покрытием.

В данной работе установлена разрешимость указанного уравнения в функциональных пространствах, важных в приложениях, и построено решение в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра.

В качестве примера рассмотрена контактная задача теории упругости о вдавливании штампа в упругую полосу, покрытую «винклеровскими» пружинами и лежащую без трения на жестком основании. Результаты работы могут также найти применение в плоских контактных задачах при наличии абразивного износа [1].

1. Пусть поверхность линейно-деформируемого основания усилена по всей длине $|x|<\infty$ тонким упругим слоем, работающим по типу основания Фусса-Винклера. Допустим теперь, что такое слоистое основание нагружено некоторой распределенной нормальной нагрузкой $q(x)$ на участке $|x|\leqslant a$. Под действием ее граничные точки основания получат перемещение $v(x)$, которое складывается из перемещения $v_1(x)$, возникающего благодаря деформации линейно-деформируемого основания, и перемещения $v_2(x)$, возникающего благодаря чисто местным деформациям покрытия.

Известно, что для линейно-деформируемого основания [2, 3] функция $v_1(x)$ имеет вид

$$v_1(x) = -\frac{1}{\pi\theta_1}\int_{-a}^{a} q(\xi)\,d\xi\int_0^\infty \frac{L_1(u)}{u}\cos\left(u\,\frac{\xi-x}{\mu}\right)du$$

где $\theta_1$ — величина, характеризующая физико-механические свойства линейно-деформируемого основания, $\mu$ — характерный геометрический параметр.

Функция $v_2(x)$ в общем случае может быть представлена в форме

$$v_2(x) = -kq(x) - \frac{1}{\pi\theta_2}\int_{-a}^{a} q(\xi)\,d\xi\int_0^\infty \frac{L_2(u)}{u}\cos\left(u\,\frac{\xi-x}{\mu}\right)du$$

Здесь величины $k$, $\theta_2$ характеризуют упругие свойства покрытия.

Таким образом, функция $v(x)$, характеризующая перемещения граничных точек всего основания будет иметь вид

$$v(x) = -kq(x) - \frac{1}{\pi\theta_1}\int_{-a}^{a} q(\xi)\,d\xi \int_0^\infty \frac{L(u)}{u}\cos\left(u\frac{\xi - x}{\mu}\right)du \tag{1.1}$$

$$L(u) = L_1(u) + lL_2(u), \quad l = \frac{\theta_1}{\theta_2} \tag{1.2}$$

Для ряда практически важных случаев $L(u)/u$ в (1.2) удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $L(u)/u$ непрерывна, вещественна и четна на оси $|u| < \infty$.

2) функция

$$\frac{L(u)}{u} \geqslant 0 \quad (|u| < \infty) \tag{1.3}$$

3) функция

$$L(u) = Au + 0(u^2)\ (u \to 0), \quad \frac{L(u)}{u} = C^2u^{-2\gamma}[1 + O(u^{-\delta})] \quad (u \to \infty) \tag{1.4}$$

$$0 < \gamma < 1$$

$A$, $C$, $\gamma$, $\delta$ — постоянные, причем $\delta > \gamma$ при $\gamma \geqslant 0.5$, $\delta > 1 - \gamma$ при $\gamma < 0.5$.

Полагая, что в (1.1) $v(x) \equiv g(x)$ — известная функция (задача о штампе), с учетом обозначений $a\pi k\theta_1 = p$, $x = ax'$, $\xi = a\xi'$, $\lambda = \mu/a$, $q(x) \equiv \varphi(x')$, $f(x') \equiv a\theta_1 g(x)$ (штрихи в дальнейшем будем опускать), получим интегральное уравнение контактной задачи в безразмерных переменных

$$p\varphi(x) + \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) \qquad (|x| \leqslant 1)$$

$$K(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos ut\,du \qquad \left(t = \frac{\xi - x}{\lambda}\right) \tag{1.5}$$

Исследуем далее структуру решения интегрального уравнения (1.5).

2. Введем некоторые определения для необходимых в дальнейшем пространств.

1. Обозначим через $H_\gamma$ множество функций $h(x)$ таких

$$\|h\|^2_{H_\gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(u)}{u} |H(u)|^2 du < \infty, \qquad H(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{iux} dx \tag{2.1}$$

Очевидно [4], элементы из $H_\gamma$ принадлежат некоторой шкале гильбертовых пространств.

2. $L_r(a, b)$ — пространство абсолютно суммируемых на $[a, b]$ со степенью $r \geqslant 1$ функций с обычной нормой.

3. $C(a, b)$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций.

4. $l_r$ — пространство абсолютно суммируемых со степенью $r$ числовых последовательностей. В работе В. А. Бабешко [4] доказаны следующие:

*Лемма 2.1.* Любое пространство $L_r$, $(\gamma+0.5)^{-1} < r < \infty$, $\gamma \leqslant 0.5$ и $1 < r < \infty$, $0.5 < \gamma$ вложено в $H_\gamma$.

Для исследования структуры решения уравнения (1.5) изучим свойства функции $K(t)$.

*Лемма 2.2.* Справедливы при $t \to 0$ оценки

$$K(t) = O(t^{2\gamma-1}), \quad \gamma < 0.5; \quad K(t) = O(\ln|t|), \quad \gamma = 0.5$$

$$K(t) = O(1), \ \gamma > 0.5$$

При $|t| > \varepsilon > 0$ функция $K(t)$ непрерывна.
На основании леммы 2.2 доказывается теорема [4].

*Теорема 2.1.* Оператор

$$R\varphi = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \qquad (2.2)$$

действует из $L_r$ в $C(-T, T)$ вполне непрерывно. Здесь $(2\mu)^{-1} < r < \infty$, $\gamma \leqslant 0.5$; $1 < r < \infty$, $0.5 < \gamma$; $T < \infty$.

*Теорема 2.2.* В пространстве $L_2(-1, 1)$ $(0.25 < \gamma < 1)$ решение уравнения (1.5) существует и единственно при любом значении параметров $p$, $\lambda \in (0, \infty)$, если $f(x) \in L_2(-1, 1)$.

Для доказательства умножим (1.5) на $\varphi(x) \in L_2(-1, 1)$ и проинтегрируем по всей оси. Получим

$$p\|\varphi\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{H_\gamma} = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (2.3)$$

Здесь нужно учесть, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 1$.

В силу теоремы 2.1 и леммы 2.1 соотношение (2.3) корректно. Из теоремы 2.1 следует, что к уравнению (1.5) применима теория Фредгольма [5], а в силу (2.3) имеем: если $f(x) = 0$, $x \in [-1, 1]$, то $\varphi(x) = 0$, $|x| < \infty$. Теорема доказана. Далее ограничимся изучением лишь четного случая, то есть предположим, что функция $f(x)$, а следовательно, и $\varphi(\xi)$ в (1.5) — четные. Рассмотрение нечетного случая можно провести аналогичным образом.

3. Будем искать функцию $\varphi(\xi)$ в (1.5) в виде следующего ряда по нормированным полиномам Лежандра [6]:

$$\varphi(\xi)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m P_{2m}^{*}(\xi), \qquad P_m^{*}(\xi)=\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\,P_m(\xi) \tag{3.1}$$

Известно [5], что они составляют базис в пространстве $L_2(-1, 1)$. В силу теоремы 2.2 ряд (3.1) сходится по норме пространства $L_2(-1, 1)$, а соответствующие последовательности $\{a_k\}\in l_2$ ввиду равенства Парсеваля [5]. Функции $K(t)$ и $f(x)$ разложим соответственно в двойной и одинарный ряды по указанной системе полиномов. Будем иметь

$$K(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(\lambda)\,P_{2i}^{*}(\xi)\,P_{2j}^{*}(x) \tag{3.2}$$

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m P_{2m}^{*}(x) \tag{3.3}$$

В силу леммы 2.2 и ограничений, наложенных на функцию $f(x)$ в теореме 2.2, ряды (3.2), (3.3) сходятся по норме пространства $L_2(-1, 1)$.

Воспользовавшись известным [6] свойством ортогональности полиномов Лежандра, получим

$$c_{ij}(\lambda)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)P_{2i}^{*}(\xi)\,P_{2j}^{*}(x)\,d\xi dx \tag{3.4}$$

$$b_m=\int_{-1}^{1} f(x)\,P_{2m}^{*}(x)\,dx \tag{3.5}$$

Подставив в (3.4) $K(t)$ в форме второго равенства (1.5) и используя интеграл [6]

$$\int_{0}^{1} P_{2n}(x)\cos\alpha x dx=\frac{(-1)^n\,\pi\Gamma(2n+1)}{(2n)!\,\Gamma(1/2)\sqrt{2\alpha}}\,J_{1/2+2n}(\alpha)$$

представим коэффициенты $c_{ij}(\lambda)$ в виде

$$c_{ij}(\lambda)=(-1)^{i+j}\sqrt{4i+1}\sqrt{4j+1}\,(\pi\lambda)\int_{0}^{\infty}\frac{L(u)}{u^2}\,J_{1/2+2i}\left(\frac{u}{\lambda}\right)J_{1/2+2j}\left(\frac{u}{\lambda}\right)du \tag{3.6}$$

*Лемма 3.1.* Если функция $f(x)\in L_2(-1, 1)$, то любому решению $\varphi(x)$ из класса $L_2(-1, 1)$ уравнения (1.5) соответствует последовательность чисел $\{a_i\}$ из класса $l_2$, удовлетворяющая бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$a_n = -\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{\infty} c_{mn}(\lambda)\, a_m + \frac{\pi}{p}\, b_n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{3.7}$$

Наоборот, если функция $f(x) \in L_2(-1, 1)$, то любому решению $\{a_n\}$ из класса $l_2$ системы (3.7) соответствует решение $\varphi(x) \in L_2(-1, 1)$ уравнения (1.5) вида (3.1).

Для доказательства, с учетом теоремы 2.2, подставим в интегральное уравнение (1.5) функции $\varphi(\xi)$, $f(x)$, $K(t)$ в виде (3.1)—(3.3) и вычислим интегралы, используя свойство ортогональности полиномов Лежандра [6]. Получим соотношение, в левой и правой частях которого стоят ряды по четным полиномам Лежандра. Приравнивая коэффициенты обеих частей при полиномах одинакового номера, получим бесконечную систему (3.7). Легко производятся и обратные преобразования с учетом соотношения $\|\varphi\|_{L_2(-1, 1)} = \|\varphi\|_{l_2}$.

*Теорема 3.1.* Если функция $f(x) \in L_2(-1, 1)$, то оператор, стоящий в правой части (3.7), действует в пространстве $l_2$ и является в нем вполне непрерывным [5] при всех $p, \lambda \in (0, \infty)$.

Учитывая поведение ядра интегрального уравнения (1.5) (лемма 2.2) и равенство Парсеваля [5] $\|\varphi\|_{L_2(-1, 1)} = \|\varphi\|_{l_2}$ нетрудно показать, что при

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^2(\lambda) < \infty, \quad \{f_k\} \in l_2 \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что оператор, стоящий в правой части (3.7), действует в пространстве последовательностей $l_2$ и является там вполне непрерывным при $p, \lambda \in (0, \infty)$. Поэтому к системе применима альтернатива Гильберта [7] о разрешимости бесконечных систем. Поскольку соответствующее системе (3.7) решение интегрального уравнения (1.5) существует и единственно в пространстве $L_2(-1, 1)$, то в силу леммы 3.1 существует единственное нетривиальное решение бесконечной алгебраической системы (3.7), принадлежащее пространству $l_2$, которое можно найти с любой степенью точности методом последовательных приближений или методом редукции.

Решив систему (3.7), найдем затем по формулам (3.1) решение интегрального уравнения (1.5). При этом обобщенная сила вычисляется по формуле

$$P = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{3.9}$$

4. В качестве примера рассмотрена плоская контактная задача о вдавливании штампа с плоским прямолинейным основанием ширины $2a$ в упругую полосу толщины $h$, покрытую «винклеровскими» пружинами [8, 9], с упругими характеристиками $\nu$ (коэффициент Пуассона) и $G$ (модуль сдвига), лежащую без трения на жестком основании. При этом

$$L_1(u) = L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}, \quad L_2(u) = 0$$

$\lambda = ha^{-1}$, $A = 0.5$, $\theta_1 = G(1-\nu)^{-1}$, $k$ — коэффициент постели основания Фусса-Винклера.

Решение задачи может быть получено методом, изложенным в п. 3. При этом значение коэффициента $p$ в (1.5) бралось равным единице. Коэффициенты разложения $c_{mn}(\lambda)$ подсчитывались с четырьмя точными знаками после запятой при различных значениях $\lambda$ и занесены в таблицу 1.

*Таблица 1*

| $mn$ | $\lambda=2$ | $\lambda=1$ | $\lambda=1/2$ | $mn$ | $\lambda=2$ | $\lambda=1$ | $\lambda=1/2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 2.4544 | 1.4159 | 0.7477 | 22 | 0.4497 | 0.4482 | 0.4177 |
| 01 | −0.3073 | −0.1960 | −0.0742 | 03 | | | −0.0100 |
| 02 | −0.0343 | −0.0390 | −0.0395 | 13 | | | −0.0330 |
| 11 | 0.8262 | 0.7714 | 0.5805 | 23 | | | −0.1122 |
| 12 | −0.1863 | −0.1799 | −0.1312 | 33 | | | 0.3049 |

В табл. 2 занесены значения $\varphi(0)$ при различных $\lambda$ и величины обобщенных $P$. Отметим, что погрешность приведенных в табл. 2 результатов не превосходит 1.5%.

*Таблица 2*

| $\varphi(0)$ | | | $P$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda=2$ | $\lambda=1$ | $\lambda=1/2$ | $\lambda=2$ | $\lambda=1$ | $\lambda=1/2$ |
| 0.860 | 1.258 | 1.774 | 2.253 | 3.037 | 3.949 |

При этом в урезанной системе (3.7) достаточно было взять не более четырех уравнений.

Автор благодарит В. М. Александрова за ценные советы и помощь.

НИИ механики и прикладной математики
Ростовского государственного
университета

Поступила 23 VI 1978

Ն. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ

## ԲԱՐԱԿ ՈՒԺԵՂԱՑՆՈՂ ԾԱԾԿՈՒՅԹՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՀԻՄՔԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԷՖԵԿՏԻՎ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

### Ամփոփում

*Դիտարկվում է վերջավոր ինտերվալի վրա փաթեթի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների հատուկ դաս, որոնց կորիզները պարունակում են*

երկրաչափական կամ ֆիզիկական $\lambda \in (0, \infty)$ պարամետր: Այդպիսի հավասարումների են բերվում բարակ առաձգական ծածկույթներով ուժեղացված մակերևույթներով գծային դեֆորմացվող հիմքերի համար, մի շարք հարթ կոնտակտային խնդիրներ:

Կիրառությունների համար կարևոր ֆունկցիաների տարածություններում ցույց է տրված ինտեգրալ հավասարումների լուծելիությունը և կառուցված է էֆեկտիվ լուծում $\lambda$ անչափ պարամետրի կամայական արժեքների համար:

# ON THE EFFECTIVE METHOD OF SOLVING CONTACT PROBLEMS FOR A LINEAR-STRAINED BASIS WITH A THIN REINFORCING COAT

E. V. KOVALENKO

## Summary

Investigated is the special class of integral equations of the second kind of a convolution type on the finite interval whose kernels involve some geometric or physical parameter $\lambda \in (0, \infty)$. To such equations is reduced a series of plane contact problems for linear-strained bases whose surface is reinforced with a thin elastic coat.

The solvability of the integral equations in spaces of functions, significant in supplements, is proved and the solution, effective for any value of the dimensionless parameter $\lambda$, is obtained.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости при наличии износа. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
2. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
3. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
4. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1963.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., ГИФМЛ, 1959.
8. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.
9. *Попов Г. Я.* Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммационными ядрами. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.