

З. А. МАРТИРОСЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ

Осесимметричные контактные задачи с определением площадки контакта для однородного цилиндра и жестких штампов исследовались в работах [5—7] и др. Контактные задачи с определением области контакта для случаев двух контактируемых тел, когда одно из них или оба имеют неограниченные размеры, рассмотрены в работах [8—22] и др. Определение области контакта между двумя упругими конечными телами из различных материалов исследовано в работах [23, 24] и др. Контактная задача для двух цилиндров при учете переменного коэффициента сцепления рассмотрена в работе [25], где изучен характер распределения контактных напряжений. Осесимметричные контактные задачи с определением площадки контакта двух цилиндров конечной длины рассмотрены в работе [26].

В настоящей работе рассматривается осесимметричная задача теории упругости для двух цилиндров с различными упругими свойствами, имеющих конечные длины и одинаковые диаметры, которые контактированы между собой торцами при сжимающей внешней торцевой нагрузке. На боковых поверхностях цилиндров нормальные и касательные напряжения равны нулю. Контакт между цилиндрами принимается гладким, то есть без сцепления, а зона контакта двух цилиндров считается неизвестной и определяется в процессе решения задачи. Осесимметричная сжимающая нагрузка берется таким образом, что образуется контактная область в виде круга. Решение рассматриваемой задачи представляется в виде рядов Фурье и Фурье-Дини, при этом для коэффициентов этих рядов получены две бесконечные системы линейных уравнений и парные ряды-уравнения, содержащие функции Бесселя, которые сводятся к квази-вполне регулярной бесконечной системе, свободные члены которой стремятся к нулю.

Окончательные выражения для контактных напряжений получены с выделенной особенностью. Для конкретных внешней нагрузки, упругих констант и размеров цилиндров вычислены размеры контакта и напряжения на контактных поверхностях.

1. Пусть два цилиндра конечной длины и одинакового диаметра, изготовленных из различных материалов, прижимаются по торцам друг к другу (фиг. 1). На других торцах цилиндров приложена осесимметричная сжимающая нагрузка таким образом, что образуется контактная область в виде круга. Сцепление на поверхности контакта отсутствует. На боковой поверхности цилиндров нормальные и касательные напряжения равны нулю.

В дальнейшем все величины, относящиеся к левому цилиндру, будем отмечать индексом 1, а к правому — индексом 2.

Граничные условия рассматриваемой осесимметричной задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} -P_i & (0 \leq r < a) \\ 0 & (a < r < R) \end{cases} = a_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} J_0(\beta_k r) \quad (1.1)$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(r, l_i) = 0 \quad (1.2)$$

$$\sigma_r^{(i)}(R, z) = \tau_{rz}^{(i)}(R, z) = 0 \quad (1.3)$$

Из условия гладкого контакта имеем

$$\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = 0, \quad \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) \quad (1.4)$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0) \quad (0 \leq r < c) \quad (1.5)$$

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0 \quad (c < r < R) \quad (1.6)$$

где l_i — длина, R — радиус цилиндров, $J_n(x)$ — функция Бесселя действительного аргумента первого рода, а β_k — положительные корни уравнения $J_i(\beta_k R) = 0$, расположенные в порядке возрастания, ($i = 1, 2$).

Решение задачи сводится к нахождению функций Лява $\Phi^{(i)}(r, z)$, которые удовлетворяют бигармоническому уравнению [2]

$$\Delta^2 \Phi^{(i)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \Phi^{(i)}(r, z) = 0 \quad (1.7)$$

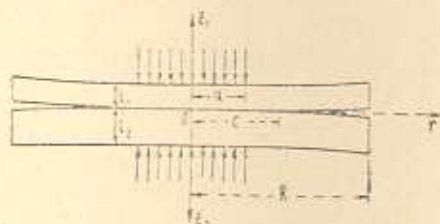
граничным условиям (1.1—1.3) и условиям контакта (1.4—1.6).

Напряжения и перемещения выражаются через функцию $\Phi^{(i)}(r, z)$ следующим образом [2]:

$$\sigma_r^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_i \Delta \Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial r^2} \right)$$

$$\sigma_\phi^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_i \Delta \Phi^{(i)} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} \right)$$

$$\sigma_z^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu_i) \Delta \Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial z^2} \right]$$



Фиг. 1.

$$\tau_{rz}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu_i) \Delta \Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial z^2} \right] \quad (1.8)$$

$$u_z^{(i)} = \frac{1}{2G_i} \left[2(1 - \nu_i) \Delta \Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial z^2} \right]$$

$$u_r^{(i)} = -\frac{1}{2G_i} \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial r \partial z}$$

где G_i — модуль сдвига, а ν_i — коэффициент Пуассона.

Решения уравнений (1.7) ищем в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)}(r, z) = & z(A_i r^2 + B_i z^2 + C_i z) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(i)} I_0(\lambda_{ki} r) + \\ & + G_k^{(i)} \lambda_{ki} r I_1(\lambda_{ki} r)] \sin \lambda_{ki} z + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k z + B_k^{(i)} \operatorname{ch} \beta_k z + C_k^{(i)} \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + D_k^{(i)} \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z) J_0(\beta_k r) \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $I_n(x)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, а

$$\lambda_{ki} = \frac{k\pi}{l_i}$$

Удовлетворяя условиям (1.1—1.6) при помощи (1.8), получаем

$$A_i = \frac{\nu_i}{2(1 + \nu_i)} \alpha_0^{(i)} \quad B_i = \frac{1 - 2\nu_i}{6(1 + \nu_i)} \alpha_0^{(i)} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 [-A_k^{(i)} \operatorname{ch} \mu_{ki} - C_k^{(i)} (\mu_{ki} \operatorname{ch} \mu_{ki} - \operatorname{sh} \mu_{ki}) - \\ & - D_k^{(i)} [\mu_{ki} \operatorname{sh} \mu_{ki} - (1 - 2\nu_i) \operatorname{ch} \mu_{ki}]] J_0(\beta_k r) + \\ & + \frac{4}{R} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \lambda_{ki}^4 I_1(\lambda_{ki} R) G_k^{(i)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p r)}{(\lambda_{ki}^2 + \beta_p^2)^2 J_0(\beta_p R)} = \alpha_k^{(i)} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$A_k^{(i)} \operatorname{sh} \mu_{ki} + C_k^{(i)} \mu_{ki} \operatorname{sh} \mu_{ki} + D_k^{(i)} (2\nu_i \operatorname{sh} \mu_{ki} + \mu_{ki} \operatorname{ch} \mu_{ki}) = 0 \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{4}{l_i} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^4 J_0(\beta_k R) \left\{ C_k^{(i)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^p \operatorname{ch} \mu_{ki} - 1}{\lambda_{pi}^2 + \beta_k^2} - \frac{(-1)^p \operatorname{ch} \mu_{ki} - 1}{(\lambda_{pi}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \beta_k^2 \right\} + \\ & + D_k^{(i)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^p \operatorname{sh} \mu_{ki}}{\lambda_{pi}^2 + \beta_k^2} - \frac{\operatorname{sh} \mu_{ki}}{(\lambda_{pi}^2 + \beta_k^2)^2} \beta_k^2 \right] \cos \lambda_{pi} z - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ki}^3 I_1(\lambda_{ki} R) \varphi_k^{(i)} G_k^{(i)} \cos \lambda_{ki} z = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 [-A_k^{(1)} + (1 - 2\nu_1) D_k^{(1)}] J_0(\beta_k r) + \\ & + \frac{4}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k1}^4 I_1(\lambda_{k1} R) G_k^{(1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p r)}{(\lambda_{k1}^2 + \beta_p^2)^2 J_0(\beta_p R)} = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 [-A_k^{(2)} + (1 - 2\nu_2) D_k^{(2)}] J_0(\beta_k r) + \\ & + \frac{4}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k2}^4 I_1(\lambda_{k2} R) G_k^{(2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p r)}{(\lambda_{k2}^2 + \beta_p^2)^2 J_0(\beta_p R)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$(1 - 2\nu_1) C_1 + G(1 - 2\nu_2) C_2 + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 [(1 - \nu_1) C_k^{(1)} + G(1 - \nu_2) C_k^{(2)}] J_0(\beta_k r) = 0 \quad 0 \leq r < c \quad (1.15)$$

$$a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 [-A_k^{(1)} + (1 - 2\nu_1) D_k^{(1)}] J_0(\beta_k r) + \\ + \frac{4}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k1}^4 I_1(\lambda_{k1} R) G_k^{(1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p r)}{(\lambda_{k1}^2 + \beta_p^2)^2 J_0(\beta_p R)} = 0 \quad c < r < R \\ E_k^{(i)} I_1(\lambda_{ki} R) + G_k^{(i)} [2(1 - \nu_i) I_1(\lambda_{ki} R) + \lambda_{ki} R I_0(\lambda_{ki} R)] = 0 \quad (1.16)$$

$$B_k^{(i)} + 2\nu_i C_k^{(i)} = 0 \quad (1.17)$$

где введены обозначения

$$\mu_{ki} = \beta_{ki} l_i, \quad G = \frac{G_1}{G_2}, \quad \tau_k^{(i)} = \lambda_{ki} R - \lambda_{ki} R \frac{I_0'(\lambda_{ki} R)}{I_1'(\lambda_{ki} R)} + \frac{2(1 - \nu_i)}{\lambda_{2i} R} \quad (1.18)$$

При получении (1.10—1.15) использованы разложения функций $\text{sh } \beta_k z$, $\text{ch } \beta_k z$, $\beta_k z \text{ sh } \beta_k z$, $\beta_k z \text{ ch } \beta_k z$ по $\cos \lambda_{pi} z$, функций $I_0(\lambda_{ki} r)$ и $\lambda_{ki} r I_1(\lambda_{ki} r)$ по $J_0(\beta_k r)$ и соотношения (1.16—1.17).

Введем обозначения

$$-A_k^{(1)} + (1 - 2\nu_1) D_k^{(1)} = \frac{X_k}{\beta_k^3}, \quad \lambda_{ki}^3 I_1(\lambda_{ki} R) G_k^{(i)} = Y_k^{(i)} \quad (1.19)$$

Из соотношений (1.11), (1.12), (1.14) и (1.19) получим

$$C_k^{(i)} = -H_k^{(i)} \frac{X_k}{\beta_k^3} - \frac{4F_k^{(i)}}{\beta_k R J_0(\beta_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_{pi} Y_p^{(i)}}{(\lambda_{pi}^2 + \beta_k^2)^2} - \\ - \delta_{i,2} \frac{4H_k^{(i)}}{\beta_k R J_0(\beta_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_{p1} Y_p^{(1)}}{(\lambda_{p1}^2 + \beta_k^2)^2} - \frac{\lambda_{p2} Y_p^{(2)}}{(\lambda_{p2}^2 + \beta_k^2)^2} \right] + F_k^{(i)} \frac{a_k^{(i)}}{\beta_k^3} \quad (1.20) \\ D_k^{(i)} = \frac{1}{\sin^2 \mu_{ki} - \mu_{ki}^2} \left\{ \frac{\text{sh }^2 \mu_{ki}}{\beta_k^2} X_k + \frac{4\mu_{ki} \text{sh } \mu_{ki}}{\beta_k R J_0(\beta_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_{pi} Y_p^{(i)}}{(\lambda_{pi}^2 + \beta_k^2)^2} - \right. \\ \left. - \delta_{i,2} \frac{4 \text{sh }^2 \mu_{ki}}{\beta_k R J_0(\beta_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_{p1} Y_p^{(1)}}{(\lambda_{p1}^2 + \beta_k^2)^2} - \frac{\lambda_{p2} Y_p^{(2)}}{(\lambda_{p2}^2 + \beta_k^2)^2} \right] - \frac{\mu_{ki} \text{sh } \mu_{ki}}{\beta_k^3} a_k^{(i)} \right\} \quad (1.21)$$

где

$$\delta_{m,n} - \text{символ Кронекера: } \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases}$$

$$\frac{\text{sh } \mu_{ki} + \mu_{ki} \text{ch } \mu_{ki}}{\text{sh }^2 \mu_{ki} - \mu_{ki}^2} = F_k^{(i)}(\beta_k l_i), \quad \frac{\text{sh } \mu_{ki} \text{ch } \mu_{ki} + \mu_{ki}}{\text{sh }^2 \mu_{ki} - \mu_{ki}^2} = H_k^{(i)}(\beta_k l_i) \quad (1.22)$$

Введем обозначения

$$M_k = \alpha M_k^{(1)} + (1 - \alpha) M_k^{(2)}, \quad M_k^{(i)} = \frac{\operatorname{sh} \nu_{ki} (\operatorname{ch} \nu_{ki} - \operatorname{sh} \nu_{ki}) + \nu_{ki} (1 + \nu_{ki})}{\operatorname{sh}^2 \nu_{ki} - \nu_{ki}^2}$$

$$\frac{1 - \nu_1}{1 - \nu_1 + G(1 - \nu_2)} = \alpha$$

Подставляя значения $C_k^{(i)}$ в (1.15) и имея ввиду (1.19), получим следующие парные ряды-уравнения, содержащие функции Бесселя:

$$q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 + M_k) \frac{X_k}{\beta_k} J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k J_0(\beta_k r) \quad 0 < r < c$$

$$\alpha a_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k J_0(\beta_k r) \quad c < r < R \quad (1.23)$$

где введены обозначения:

$$q_0 = -\frac{(1 - 2\nu_1) C_1 + G(1 - 2\nu_2) C_2}{1 - \nu_1 + G(1 - \nu_2)}, \quad P_k = -\frac{4\beta_k^2}{R J_0(\beta_k R)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n1} Y_n^{(1)}}{(\lambda_{n1}^2 + \beta_k^2)^2}$$

$$N_k = -\frac{4\beta_k}{R J_0(\beta_k R)} \left\{ \alpha F_k^{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda_{n1} Y_n^{(1)}}{(\lambda_{n1}^2 + \beta_k^2)^2} + \right.$$

$$\left. + (1 - \alpha) F_k^{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda_{n2} Y_n^{(2)}}{(\lambda_{n2}^2 + \beta_k^2)^2} + \right.$$

$$\left. + (1 - \alpha) H_k^{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_{n1} Y_n^{(1)}}{(\lambda_{n1}^2 + \beta_k^2)^2} - \frac{\lambda_{n2} Y_n^{(2)}}{(\lambda_{n2}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{\alpha F_k^{(1)} a_k^{(1)} + (1 - \alpha) F_k^{(2)} a_k^{(2)}}{\beta_k} \quad (1.24)$$

Приведем парные ряды-уравнения к бесконечной системе [4, 5, 26].
Неизвестные X_k ищем в виде

$$X_k = \frac{1}{(\beta_k c)^{1/2} J_0^2(\beta_k R)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{2n+1/2}(\beta_k c) - \frac{4\beta_k^2}{R J_0(\beta_k R)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n1} Y_n^{(1)}}{(\lambda_{n1}^2 + \beta_k^2)^2} \quad (1.25)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

Подставляя (1.25) во второе уравнение (1.23) и пользуясь разложением функции

$$f(r) = \begin{cases} (c^2 - r^2)^{-1/2} F\left(-s, s + 1/2, 1, \frac{r^2}{c^2}\right) & (0 < r < c) \\ 0 & (c < r < R) \end{cases} =$$

$$= \frac{(2c)^{1/2} \Gamma(s + 1/2)}{R \Gamma^*(s + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{2s+1/2}(\beta_k c) J_0(\beta_k r)}{\beta_k^{1/2} J_0^2(\beta_k R)} \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (1.26)$$

получим

$$b_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0^{(1)} \quad (1.27)$$

Подставляя (1.25) в первое уравнение (1.23), затем умножая полученное соотношение на $r(c^2 - r^2)^{-1/2} F(-s, s + 1/2, 1, r^2/c^2)$, далее интегрируя по r в пределах от 0 до c и используя значение интеграла

$$\int_0^c r^{\nu+1} (c^2 - r^2)^{\mu/2} F\left(-s, 1 + \mu/2 + s + \nu, \nu + 1, \frac{r^2}{c^2}\right) J_s(\beta_k r) dr = \\ = \left(\frac{2}{\beta_k}\right)^{1+\mu/2} c^{1+\nu+\mu/2} \frac{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+\mu/2+s)}{2\Gamma(1+s+\nu)} J_{s+2s+\mu/2+1}(\beta_k c) \quad (1.28) \\ (s = 1, 2, \dots)$$

получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+M_k) J_{2n+1/2}(\beta_k c) J_{2s+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{\beta_k^{1/2}} J_{2s+1/2}(\beta_k c) - \\ - V \bar{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+M_k) P_k}{\beta_k^{3/2}} J_{2s+1/2}(\beta_k c) + \\ + V \bar{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2F_k^{(1)} a_k^{(1)} + (1-a) F_k^{(2)} a_k^{(2)}}{\beta_k^{3/2}} J_{2s+1/2}(\beta_k c) \quad (1.29)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — гипергеометрический ряд.

Выражение (1.29) представляет собой бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно b_n и $Y_n^{(i)}$.

Пользуясь значением ряда

$$\frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{s-2s+1/2}(\beta_k c) J_{s+2s+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} = \frac{\delta_{n,s}}{2\nu + 4s + 1} + \\ + \frac{2}{\pi} (-1)^{\alpha+s} \int_0^{\pi} \frac{k_1(y) I_{s+2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) I_{s+2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)}{y I_1(y)} dy \quad (1.30)$$

бесконечную систему (1.29) приведем к виду

$$b_s = \sum_{n=0}^{\infty} a_{sn} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{sn}^{(1)} Y_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{sn}^{(2)} Y_n^{(2)} + d_s \quad (1.31)$$

где введены обозначения

$$\alpha_{sn} = -\frac{2(4s+1)(-1)^{n+s}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k_1(y) J_{2n+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) J_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)}{y I_1(y)} dy -$$

$$-\frac{2(4s+1)}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k J_{2n+1/2}(\beta_k c) J_{2s+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)}$$

$$\alpha_{sn}^{(i)} = -\frac{8(4s+1)\sqrt{c} \alpha^{(i)}}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^{1/2}}{J_0(\beta_k R)} \left[\frac{(-1)^n F_k^{(i)} - H_k^{(i)}}{(\lambda_{ni}^2 + \beta_k^2)^2} \lambda_{ni} \right] J_{2s+1/2}(\beta_k c)$$

$$d_s = \frac{2(4s+1)\sqrt{c}}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha F_k^{(1)} \alpha_k^{(1)} + (1-\alpha) F_k^{(2)} \alpha_k^{(2)}}{\beta_k^{3/2}} J_{2s+1/2}(\beta_k c) \quad (1.32)$$

$$\alpha^{(1)} = \alpha, \quad \alpha^{(2)} = 1 - \alpha, \quad (i=1, 2)$$

$I_n(x)$, $k_n(x)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента соответственно первого и второго рода.

Подставляя значения $C_k^{k_i} \equiv D_k^{(i)}$ в (1.13) и имея ввиду (1.19) и (1.25), получаем бесконечную систему линейных уравнений

$$Y_k^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(i)} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn}^{(i)} Y_n^{(i)} + A_k^{(i)} \quad (1.33)$$

где введены обозначения

$$a_{kn}^{(i)} = \frac{4\lambda_{ki}^2}{I_i \varphi_k^{(i)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p [H_p^{(i)} - (-1)^k F_p^{(i)}]}{(\beta_p c)^{1/2} J_0(\beta_p R) (\lambda_{ki}^2 + \beta_p^2)^2} J_{2n+1/2}(\beta_p c)$$

$$b_{kn}^{(i)} = \frac{16\lambda_{ki}^2}{I_i R \varphi_k^{(i)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^3 \{ [(-1)^k F_p^{(i)} - H_p^{(i)}] + (-1)^n [F_p^{(i)} - (-1)^k H_p^{(i)}] \}}{(\lambda_{ki}^2 + \beta_p^2)^2 (\lambda_{ni}^2 + \beta_p^2)^2} \lambda_{ni}$$

$$A_k^{(i)} = \frac{4\lambda_{ki}^2}{I_i \varphi_k^{(i)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p J_0(\beta_p R)}{(\lambda_{ki}^2 + \beta_p^2)^2} [H_p^{(i)} (-1)^k - F_p^{(i)}] \alpha_p^{(i)} \quad (1.34)$$

Докажем, что бесконечные системы (1.31) и (1.33) квази-вполне регулярны. Для этого оценим сумму модулей коэффициентов при неизвестных при $s \rightarrow \infty$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{sn}| = \lim_{s \rightarrow \infty} d_s = 0, \text{ как показано в работах [5, 26].}$$

Учитывая, что $F_k^{(i)}$ и $H_k^{(i)}$ — ограниченные величины и при возрастании индекса монотонно стремятся соответственно к нулю и единице, а также пользуясь оценкой [27]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + x^2)^2} < \frac{16}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4x^3} + \frac{x^2}{2(1+x^2)^2} \quad (1.35)$$

для второго и третьего членов (1.31) получим оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{in}^{(i)}| < \frac{8(4s+1)z^{(i)}\sqrt{c}}{R^3} (F_1^{(i)} + H_1^{(i)}) \frac{l^3}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{1/2} \left[\frac{16}{\left(1 + \frac{l^2}{\pi^2} \beta_k^2\right)^2} + \frac{1}{4 \frac{l^3}{\pi^3} \beta_k^3} + \frac{\frac{l^2}{\pi^2}}{2 \left(1 + \frac{l^2}{\pi^2} \beta_k^2\right)^2} \beta_k^2 \right] \left| \frac{J_{2s+1/2}(\beta_k c)}{J_0(\beta_k R)} \right| \quad (1.36)$$

где

$$k\pi < \beta_k < (k+1)\pi \quad (1.37)$$

Ряд по « k » в выражении (1.36) сходится, и выражение (1.36) является аналитической функцией s . При возрастании s $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{in}^{(i)}|$ стремится к нулю, следовательно, бесконечная система (1.31) квази-вполне регулярна.

Имея ввиду, что ряд по n $\sum_{n=1}^{\infty} |J_{2n+1/2}(\beta_k c)|$ сходится и его сумма имеет порядок $\beta_p^{-1/2}$, аналогичным образом можно доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{kn}| \rightarrow 0 (k^{-1/2})$$

Для сумм модулей коэффициентов при неизвестных $Y_n^{(i)}$ системы (1.34) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_{kn}^{(i)}| \leq \frac{16\lambda_{ki}^2}{l_i R |\varphi_k^{(i)}|} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\beta_p^3 F_p^{(i)}}{(\lambda_{ki}^2 + \beta_p^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2 + \beta_p^2)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\beta_p^3 H_p^{(i)}}{(\lambda_{ki}^2 + \beta_p^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2 + \beta_p^2)^2} \right\} \quad (1.38)$$

Первая двукратная сумма в (1.38) при « k », стремящемся к бесконечности, стремится к нулю, так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2 + \beta_p^2)^2}$ имеет порядок (β_p^{-2}) , $\beta_p F_p^{(i)} = 0 (pe^{-p})$, а $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_k^{(i)}| = 1$.

При больших значениях « k » вторая сумма имеет оценку*

$$\frac{32\lambda_{ki}^2}{l_i R |\varphi_k^{(i)}|} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^3 H_p^{(i)}}{(\lambda_{ki}^2 + \beta_p^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{ni}}{(\lambda_{ni}^2 + \beta_p^2)^2} < \frac{8}{\pi^2} \quad (1.39)$$

Таким образом, сумма модулей коэффициентов бесконечных систем (1.33) при $k \rightarrow \infty$ стремится к нулю или остается меньше единицы. Следовательно, эти системы, свободные члены которых имеют порядок (k^{-1}) , квази-вполне регулярны.

* Такая оценка получена и в работе [24].

После решения бесконечных систем (1.31) и (1.33), из первого уравнения (1.23) при фиксированном r определяется q_n .

Решая бесконечные системы (1.31) и (1.33), получим значения неизвестных b_n и $Y_n^{(i)}$, выраженные через неизвестную величину c . Далее по формулам (1.12), (1.16), (1.17), (1.19—1.21) последовательно можно определить все искомые коэффициенты, а, следовательно, напряжения и перемещения в любой точке составного цилиндра, выраженные через постоянную c .

Нормальное напряжение на поверхности контакта двух материалов, выраженное через b_n , имеет вид

$$\sigma_z(r, 0) = \begin{cases} 0 & c < r < R \\ \frac{R^2(c^2 - r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2}c} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n! F\left(-n, n+1/2, 1, \frac{r^2}{c^2}\right)}{\Gamma(n+1/2)} & 0 \leq r < c \end{cases} \quad (1.40)$$

Неизвестную величину c можно определить из условия равенства нулю контактного напряжения на границе области контакта, что равносильно условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = 0 \quad (1.41)$$

2. Численные примеры. Рассмотрим два цилиндра одинаковой длины и одинакового диаметра, изготовленных из различных материалов, которые прижимаются по торцам друг к другу без сцепления. На других торцах цилиндров приложены равномерно распределенные нормальные нагрузки (фиг. 1)

$$z^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} -p & \text{при } 0 < r < a \\ 0 & \text{при } a < r < R \end{cases} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r) \quad (2.1)$$

где

$$a_0 = -\frac{a^2}{R^2} p; \quad a_k = -\frac{2a J_1(\beta_k a)}{R^2 \beta_k J_0(\beta_k R)} p \quad (2.2)$$

Целью вычислений является определение размеров области контакта и величин контактных напряжений.

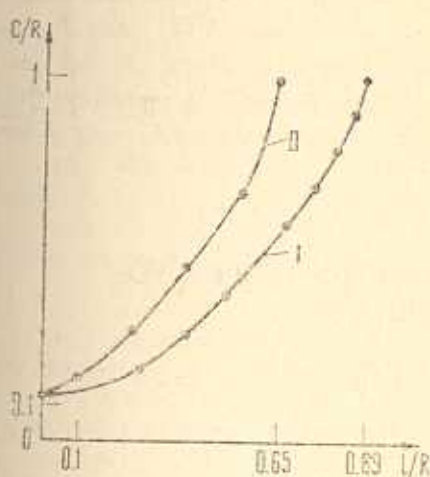
Для этого предварительно необходимо найти зависимость c от l . Это связано с большим объемом вычислений.

Во избежание отмеченных трудностей, будем задавать значения c и определять соответствующие длины цилиндров ($l_1 = l_2 = l$).

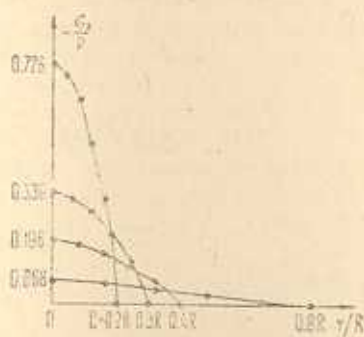
Вычисления проведены для значений $a = 0.125R$; $\nu_1 = 0.1$; 0.4 ; $\nu_2 = 0.4$; 0.1 ; $G = 0.05, 0.5, 1, 2, 20$; $c = 0.2, 0.3, \dots, 0.9, 1R$.

График зависимости размеров области контакта от длины цилиндров для значений $a = 0.125R$, $G = 0.5$, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.4$ показан на фиг. 2, кривая I. Кривая II на фиг. 2 выражает зависимость размеров области кон-

такта в случае, когда на боковых поверхностях цилиндров выполняются условия симметрии [26].



Фиг. 2



Фиг. 3

Распределение нормального контактного напряжения при различных значениях l показано на фиг. 3.

Таблица 1

G	ν_1	ν_2	c/R	l/R	$\varepsilon_z(0, 0)/p$
0.5	0.1	0.4	0.9	0.8625	-0.05968
20	0.1	0.4	0.9	0.8500	-0.06098

На основании проведенных вычислений заключаем (табл. 1), что изменение модулей сдвига и коэффициентов Пуассона материалов слоев мало влияет на размеры области контакта и на напряженное состояние цилиндров.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила 13 VI 1973

Չ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԳԱՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ
ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ա մ փ ո փ ո ռ մ

Գիտարկվում է ճակատների հպված, տարրեր առաձգական հասկոթյուններ, միևնույն արամագծեր և վերջավոր երկարությունների ունեցող երկու շրջանային զլանների առաձգականության տեսության առանցքախիմետրիկ խնդրի նորմալ և շոշափող լարումները զլանային մակերևույթների վրա բա-

ցակալում են: Գլանների կոնտակտի տիրույթը համարվում է անհայտ և այն որոշվում է խնդրի լուծման բնթացքում: Խնդրի լուծումը ներկայացվում է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Գինչի շարքերի միջոցով: Այդ շարքերի գործակիցների որոշման համար ստացվում են գծային հավասարումների անվերջ սիստեմներ և Բեսելի ֆունկցիաներ պարունակող գույզ շարք-հավասարումներ: Զույգ շարք-հավասարումների լուծումները հանգեցված են բվազիլիովին սեղուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծմանը: Բերված իվային օրինակներում որոշվում են կոնտակտի տիրույթի շափր և լարումները կոնտակտի մակերևույթի վրա:

THE AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM FOR TWO CYLINDERS

Z. A. MARTIROSIAN

S u m m a r y

Considered is the axisymmetric contact problem in the elasticity theory for two cylinders of finite lengths and equal diameters with different elastic properties contacted to each other by fronts under a pressing external frontal load.

The normal and shear stresses are equal to zero on the surfaces of the cylinders. The contact between the cylinders is assumed smooth. The contact zone is thought of as unknown and determined in solving the problem. The solution is presented as the Fourier and Fourier-Dini series. Two infinite systems of linear equations and dual series-equations, containing Bessel's functions reduced to a quasi-regular infinite system, are obtained to determine the coefficients of the series. The contact sizes and stresses on the contact surfaces are calculated for the actual external load, elastic constants and the sizes of the cylinders.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. А. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН Арм. ССР, 1954, т. XIX, № 1.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости. М., ОНТИ, 1937.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.
4. Cooke J. C., Tranter C. J. Dual Fourier-Bessels Series. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, August 1959, vol. XII, part. 2, Oxford.
5. Баблоян А. А., Мелконян А. П. О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, т. XXII, № 5.
6. Мелконян А. П. Об одной смешанной осесимметричной задаче теории упругости для цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 2.
7. Баблоян А. А., Мелконян А. П. Об одной осесимметричной контактной задаче для цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1973, т. XXVI, № 5.
8. Stippes M., Wilson H. B., Jr. Krull F. N. A contact Stress Problem for a Smooth Disk in an Infinite Plate. Proceedings of the 4-th U. S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, 1962.

9. Наумов Ю. А., Шевляков Ю. А. Изгиб балочных плит на упругом основании при неполном контакте. Сб. «Гидроаэромеханика и теория упругости», Изд. Харьковского университета, 1968, вып. 9.
10. Noble B., Hussain M. Exact Solution of Certain Dual Series for Indentation and Inclusion Problem. Intern. J. Eng. Sci., 1969, vol. 7, No. 11.
11. Вейдман. О контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1969, т. 36.
12. Pa S. L., Hussain M. A., Anderson G. Lifting of a Plate from the Foundation due to Axisymmetric Pressure. Developments in Mechanics Proceedings of the 11-th Midwestern Mechanics Conference, 1969, vol. 5.
13. Пу Хуссейн. К вопросу о контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1970, т. 37, № 3.
14. Наумов Ю. А., Нукифорова В. Д. Об отставании упругого слоя. Прикл. мех. Журнал АН Укр. ССР, 1971, т. 7, № 11.
15. Кур, Дандерс, Цзай. Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.
16. Кур, Сальва. Две смешанные задачи для полуполосы. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.
17. Weitsman Y. A tensionless Contact between a Beam and an Elastic Half-Space. Intern. J. Eng. Sci., 1972, vol. 10, No. 1.
18. Erdogan F., Ratwani M. The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), 1974, 41, No. 3.
19. Gladwell G. M. L., Iyer K. R. P. On the Unbounden Contact Between a Circular Plate and an Elastic Foundation. Journal Elasticity, 1974, vol. 4.
20. Tsai K. C., Dunders J., Keer L. M. Elastic Layer Pressed against a Half Space. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), 1974, 41, No. 3.
21. Dunders J. Properties of Elastic Bodies in Contact. The mechanics of the Contact between Deformable Bodies. Proceedings of IUTAM Symposium, Enschede, Netherlands, 20-23, August 1974, Ed-rs A. D. de Pater, J. J. Kalker. Delft University Press, 1975.
22. Абрамян Б. А., Макарян В. С. Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 5.
23. Бабоян А. А., Мелкоян М. Г. О контакте двух прямоугольников без сцепления с определенным областью контакта. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 5.
24. Мелкоян М. Г., Мкртчян А. М. Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. XXIII, № 3.
25. Pytko Stanislaw, Wierzcholski Kizysztof. Wytezenie materialu w obstarze styku dwoch walcow przy uwzlednieniu zmiennego wspolczynnika sczepienia. „Zag. eksploat. maszyn”, 1976, 11, No. 2.
26. Мартиросян Э. А. О двух контактных задачах для круглых упругих цилиндров конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. XXXI, № 5.
27. Абрамян Б. А. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.
28. Бенейшева Т. Г., Зипини К. К. Термоупругая осесимметричная задача для двухслойного цилиндра. ПМТФ, изд. «Наука», Сибирское отд., 1978, № 1.
29. Янке Э. и Эмле Ф. Таблицы функций. М., ИЛ, 1949.
30. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1 и 2. М., ИЛ, 1949.