ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXII, №2, 1979 Механика

Г. Г. ОГАНЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ ВОЛН В РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Рассматривается задача о нестационарном распространении трехмерных волн в смеси химически активных жидкостей, содержащей пузырьки газа одинакового размера, которые могут появиться, например, при прохождении достаточно сильной звуковой волны через смесь жидкостей. Известно [1], что если частота волны меньше резонансной частоты пузырька, акустическая кавитация резко увеличивает сжимаемость смеси и уменьшает скорость звука. В работе методом коротких волн [2] выведены нелинейные уравнения, описывающие нестационарные течения в окрестностях фронтов слабых ударных волн в трехмерной постановке с учетом эффектов вязкости, дисперсии и релаксации (химической реакции), причем число последних равно единице. Имеют место квазизамороженный и квазиравновесный предельные процессы распространения возмущений. Исследуются специальные среды, в которых предельные скорости звука в смеси, соответствующие предельным процессам, близки по величине.

Для всех трех случаев в линейной двумерной постановке формулируются и решаются задачи о вхождении пучка монохроматических волн в рассматриваемые среды. В случае отсутствия эффектов диссипации и релаксации эволюция пучков исследовалась в [3—5].

1. *Исходные уравнения.* Предположим, что в потоке химически активной многокомпонентной смеси вязких жидкостей со стабильными газовыми пузырьками малых размеров происходит только одна химическая реакция, характеризуемая параметром q-полнотой (степенью развития) химической реакции. Допуская, что газ и жидкость движутся с одинаковой скоростью, статистическим распределением пузырьков можно пренебречь. Далее считая, что расстояние между пузырьками много больше радиуса R пузырька, можно пренебречь взаимодействием между ними, и пульсации одиночного пузырька описать уравнением Херринга-Флинна, учитывающим сжимаемость жидкой фазы [6]. Систему исходных уравнений, описывающую течение релаксирующей газожидкостной смеси в пространстве, возьмем в виде [7—9]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla P + \frac{1}{3} \lambda_1 \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \lambda_1 \Delta \vec{V} \tag{1.2}$$

$$\rho\left(T\frac{ds}{dt}+Q\frac{dq}{dt}\right)=\sigma\nabla\vec{V} \tag{1.3}$$

$$P_2-P=L=\rho_1 R\left(1-\frac{2}{a_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\rho_1\left(1-\frac{4}{3}\frac{1}{a_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+$$

$$+\frac{4\lambda_1}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{R}{a_{10}}\left(1-\frac{1}{a_{10}}\frac{dR}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(P_2-\frac{4\lambda_1}{R}\frac{dR}{dt}\right) \tag{1.4}$$

$$\frac{P_2\beta}{\rho_1(1-\beta)}=\text{const},\quad \rho=\rho_1(1-\beta),\quad P_2R^3=\text{const} \tag{1.5}$$

$$Q=\sum_{k=1}^{n}\mu_k\Delta\nu_k,\quad \Delta\nu_k=\nu_k^{'}-\nu_k$$

Здесь индексом «1» обозначены параметры течения жидкой фазы, индексом «2»—газовой фазы, без индекса—всей смеси, t—время, $V=\{u, v, w\}$—вектор скорости частиц смеси, P — давление, ρ — плотность, s — энтропия, T — температура, σ — тензор вязких напряжений, λ_1— динамический коэффициент вязкости, β — объем газа в единице объема смеси, a — скорость звука, Q — сродство химической реакции, μ — химический или термодинамический потенциал, ν_k, $\nu_k^{'}$— стехнометрические коэффициенты в уравнении реакции, ∇ и Δ — операторы Гамильтона и Лапласа.

В состоянии полного термодинамического равновесия (покоя) $Q\equiv 0$. Предположим [9], что вблизи этого состояния зависимость q от Q дается в виде

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{1}{\tau_*}HQ+\ldots,\quad H>0 \tag{1.6}$$

где τ_* — время протекания химической реакции.

Система уравнений (1.1)—(1.6) не замкнута. Для ее замыкания следует обратиться к соотношению Гиббса [8]

$$de=Tds-PdV+Qdq$$

где e — удельная внутренняя энергия, $V=1/\rho$ — удельный объем.

Первые частные производные от e по s, q и V, представляющие собой уравнения состояния среды, являются тремя недостающими искомыми соотношениями между термодинамическими величинами.

Пусть трехмерная ударная волна слабой, но конечной интенсивности распространяется вдоль оси x. При распространении ударной волны, рассматривая окрестность фронта, отметим,что нелинейность, совместно с эффектами диссипации и релаксации, приведет к медленным изменениям формы волны не только вдоль направления, но и поперек его. Поскольку продольные изменения волны происходят сравнительно быстро, естественно предположить, что изменения параметров течения вдоль волны происходят гораздо быстрее, чем поперек нее. В качестве основного течения принимается ориентированный вдоль x невозмущенный поток. Рассматриваемая область течения считается областью коротких волн и поэтому за независимые переменные принимаются [2]

$$t=t', \quad x=a_0t+\varepsilon r, \quad y=\varepsilon^{1/2}y_1, \quad z=\varepsilon^{1/2}z_1 \tag{1.7}$$

Здесь и далее ε — безразмерный малый параметр, a_0 — невозмущенная скорость звука в релаксирующей смеси, характеризуемая видом процесса распространения возмущений.

При неравноправной роли координат x, y, z составляющие возмущенного вектора скорости вдоль них также будут иметь различные порядки величин

$$u=\varepsilon u', \quad v=\varepsilon^{3/2}v', \quad w=\varepsilon^{3/2}w' \tag{1.8}$$

Предположим, что в любой момент времени и в каждой точке пространства параметры течения газожидкостной смеси мало отклоняются от соответствующих параметров в состоянии покоя

$$P_2=P_0+\varepsilon P', \quad \rho=\rho_0+\varepsilon\rho', \quad \rho_1=\rho_{10}+\varepsilon\rho_1', \quad \beta=\beta_0+\varepsilon\beta', \quad s=s_0+\varepsilon s' \tag{1.9}$$

$$T=T_0+\varepsilon T', \quad Q=\varepsilon Q', \quad q=q_0+\varepsilon q', \quad R=\varepsilon^{3/2}(R_0+\varepsilon R'), \quad a=a_0+\varepsilon a'$$

Здесь и далее нулевые индексы отнесены к невозмущенным характеристикам течения. При последующих упрощениях исходных уравнений в окрестности волн будут оставлены лишь главные члены до порядка ε включительно, и штрихи над возмущенными параметрами опускаются.

Упрощая посредством (1.9) уравнения (1.5) и комбинируя их друг с другом, в основном порядке получим

$$\beta=\frac{\beta_0}{\rho_0}\rho-\frac{\beta_0}{P_0}P, \quad \rho_1=\frac{1}{(1-\beta_0)^2}\left(\rho-\frac{\beta_0\rho_0}{P_0}P\right), \quad R=-\frac{R_0}{3P_0}P \tag{1.10}$$

Легко также получить из тех же уравнений связь между скоростями звука в смеси и жидкой фазе [9]

$$\frac{1}{a_0^2}=\frac{\beta_0\rho_0}{P_0}+\frac{(1-\beta_0)^2}{a_{10}^2} \tag{1.11}$$

Уравнение неразрывности (1.1) с помощью первых двух соотношений (1.5) можно преобразовать к виду

$$\frac{dP_2}{dt}+\frac{P_2}{\beta}\operatorname{div}\vec{V}+\frac{P_2(1-\beta)^2}{\rho\beta}\frac{d\rho_1}{dt}=0 \tag{1.12}$$

2. *Квазиравновесный процесс*. Примем за независимые термодинамические переменные давление P_1, плотность ρ_1, сродство Q. Относительная ко всей смеси масса газовой фазы мала, поэтому в принятом приближении можно отождествить давление и энтропию всей смеси с аналогичными параметрами жидкой фазы, то есть $P=P_1$, $s=s_1(P_1, \rho_1, Q)$. Тогда приращение удельной энтропии можно записать как

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_{\rho_1 Q}\left[dP - a_{1e}^2\,d\rho_1 - \left(\frac{dP}{\partial Q}\right)_{\rho_1 s} dQ\right], \quad a_{1e}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho_1}\right)_{Qs}$$

Здесь a_{1e} — равновесная скорость звука в жидкой фазе.

Комбинируя последнее соотношение с (1.12), (1.3) и (1.4), получим

$$\left[1 + \frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho a_{1e}^2}\right]\frac{dP_2}{dt} + \frac{P_2}{\beta}\operatorname{div}\vec{V} - \frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho a_{1e}^2}\frac{dL}{dt} =$$

$$= \frac{P_2(1-\beta)^2}{\beta\rho}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial s}\right)_{PQ}\left(Q\frac{dq}{dt} - \frac{1}{\rho}\sigma\nabla\vec{V}\right) - \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial Q}\right)_{Ps}\frac{dQ}{dt}\right] \quad (2.1)$$

Подставляя (1.4) в уравнение движения (1.2), приведем его к виду

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} + \nabla P_2 = \nabla L + \frac{1}{3}\lambda_1\nabla(\operatorname{div}\vec{V}) + \lambda_1\Delta\vec{V} \quad (2.2)$$

Итак, исходная система уравнений (1.1)—(1.6) привелась к системе (1.10) и (2.1)—(2.2).

Аналогично [2, 11] после упрощений уравнений (1.1), (1.3), (1.6) и (2.2) можно показать, что в принятом приближении сжатие газожидкостной смеси происходит обратимо и время протекания химической реакции τ_* намного меньше макроскопического времени, например, времени пробега частицей волновой зоны. При этом в принятом приближении имеют место следующие соотношения:

$$\rho = \rho_0 u/a_{e0}, \quad P = \rho_0 a_{e0} u, \quad Q' \sim \varepsilon, \quad s' \sim \varepsilon, \quad \tau_* \sim \varepsilon^2 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \varepsilon\frac{H_0}{\tau_* a_{e0}}Q, \qquad q = \left(\frac{\partial q}{\partial\rho_{10}}\right)_{Qs}\frac{\rho_0}{(1-\beta_0)^2 a_{e0}}\left(1 - \frac{\beta_0\rho_0 a_{e0}^2}{P_0}\right)u$$

Разлагая $a_{1e} = a_{1e}(P, Q, s)$ вблизи положения термодинамического равновесия в ряд Тейлора, с учетом (2.3) получим

$$a_{1e} = \frac{(1-\beta_0)\,a_{e0}}{a_{1e0}}(\alpha_{1e} - 1)\,u, \qquad \alpha_{1e} = \frac{1}{a_{1e0}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho_{10}}(\rho_1 a_{1e})\right] \quad (2.4)$$

Применяя преобразования (1.7)—(1.9) к y и z—составляющим уравнения (2.2) и удерживая главные члены, получим условие потенциальности течения в окрестности волны

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial z_1} \quad (2.5)$$

Аналогичным образом упрощая x-составляющую (2.2) и уравнение (2.1), удержим главные члены, причем полученные уравнения будут содержать в себе члены как порядка ε, так и $\varepsilon^0 = 1$. С целью исключения членов нулевого порядка ($\varepsilon^0 = 1$), скомбинируем их друг с другом и, учитывая (1.10), (1.11), (2.3) и (2.4), запишем искомое уравнение в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_e a_{e0}^2 u \frac{\partial u}{\partial r} - (\delta_{1e} + \varkappa_e + m_e) \frac{a_{e0}^3}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} +$$

$$+ \gamma_e \frac{a_{e0}^4}{\varepsilon^3} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} = -\frac{a_{e0}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial z_1}\right) \tag{2.6}$$

где

$$\alpha_{1e} = \frac{\beta_0}{a_{e0}^2}\left(\frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0}\right)^2 + \alpha_{1e}\frac{(1-\beta_0)^3 a_{e0}^2}{a_{1e0}^4}, \quad \gamma_e = \frac{\beta_0 R_0^2 \rho_0^2 a_{e0}}{6(1-\beta_0) P_0^2}$$

$$\varkappa_e = \frac{\beta_0 R_0 \rho_0 a_{e0}}{2P_0 a_{1e0}}, \quad \delta_{1e} = \frac{2}{3}\lambda_1 \frac{1}{\rho_0 a_{e0}^3}\left[1 + \beta_0 \frac{\rho_0^2 a_{e0}^4}{P_0^2}\right], \quad a_{1f0}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho_{10}}\right)_{qs} \tag{2.7}$$

$$m_e = \frac{\tau_{Vs}}{2a_{e0}^3}\frac{a_{1f0}^2 - a_{1e0}^2}{(1-\beta_0)^2}\left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_{e0}^2}{P_0}\right)^2, \quad \tau_{Vs} = \frac{\tau_*}{H_0}\left(\frac{\partial q}{\partial Q_0}\right)_{\rho_{1s}}$$

В последнем соотношении (2.7) индексы показывают какие параметры течения фиксированы, a_f — замороженная скорость звука.

Уравнения (2.5)—(2.6) образуют замкнутую систему, описывающую течение релаксирующей газожидкостной смеси в окрестности волны, которая удобна при решении задач с начальными условиями. При формулировке граничной задачи перейдем от (r, t') к переменным (x, τ), где $\tau = t - x/a_{e0}$ — время пробега частицы смеси до фронта волны $(\tau=0)$. Согласно формулам перехода [10]

$$\left.\frac{\partial}{\partial t'}\right|_r = a_0 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_\tau, \quad \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{t'} = -\frac{\varepsilon}{a_0}\left.\frac{\partial}{\partial \tau}\right|_x$$

после возврата к истинной скорости u приведем систему к виду

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_e u \frac{\partial u}{\partial \tau} - \delta_e \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \gamma_e \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}\right) = \frac{a_{e0}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2.8}$$

где $\delta_e = \delta_{1e} + \varkappa_e + m_e$. Без учета диссипации и дисперсии, связанной с наличием пузырьков, (2.8) совпадает с уравнением, полученным в [4]. Релаксационное свойство и сжимаемость жидкой фазы, как видно из (2.7), приводят к увеличению коэффициента диссипации смеси.

Вводя безразмерные переменные

$$u = Uu_0, \quad \xi = \alpha_e \omega u_0 x, \quad y = l\eta, \quad z = l\zeta, \quad \theta = \omega\tau$$

где ω, l, u_0 — некоторые характерные размерные константы, уравнение (2.8) запишем как

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - U\frac{\partial U}{\partial \theta} - \delta_e^* \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \gamma_e^* \frac{\partial^3 U}{\partial \theta^3}\right) = \frac{N}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}\right) \tag{2.9}$$

где

$$\delta_e^* = \delta_e \omega/\alpha_e u_0, \quad \gamma_e^* = \gamma_e \omega^2/\alpha_e u_0, \quad N = 2a_{e0}/l^2\omega^2\alpha_e u_0$$

а) Плоская задача. Линейное приближение.

Пусть на границе смеси задается двумерный пучок в виде плоской неоднородной волны

$$U(0,\ \eta,\ \theta) = e^{-\eta^2}\sin\theta \quad \text{при}\ \xi = 0 \tag{2.10}$$

Характерные константы наделены уже конкретным смыслом: l — характерная ширина пучка, ω — частота, u_0 — начальное значение амплитуды волны, число

$$N = (2\pi^2 a_{e0}^2 \alpha_e M_0)^{-1} (\lambda/l)^2, \quad M_0 = u_0/a_0, \quad \lambda = 2\pi a_{e0}/\omega$$

характеризует относительный вклад нелинейных и дифракционных эффектов в искажении профиля волны, λ — длина волны. При больших значениях N преобладают дифракционные эффекты и нелинейностью можно пренебречь. Решение получаемого из (2.9) линейного уравнения плоской задачи ищем в форме

$$U(\xi,\ \eta,\ \theta) = \mathrm{Im}\, A(\xi,\ \eta) \exp[i(\theta - \gamma_e^*\xi + i\delta_e^*\xi)] \tag{2.11}$$

где $A(\xi,\ \eta)$ — комплексная амплитуда, для которой получаем параболическое уравнение

$$i\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{N}{4}\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2}$$

Решая полученное уравнение методом разделения переменных, находим

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} [B(n)\cos(n\eta) + C(n)\sin(n\eta)]\, e^{i\frac{N}{4}\xi n^2}\, dn \tag{2.12}$$

Граничное условие (2.10) трансформируется для A в начальное

$$\text{при}\ \xi = 0 \quad A(0,\ \eta) = e^{-\eta^2}$$

Согласно начальному условию, представляющему собой четную функцию, из (2.12) следует, что $C(n) \equiv 0$, и тогда $B(n)$ определится из обратного косинус-преобразования Фурье [11] от начального условия для

$$B(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{n^2}{4}}$$

Подставляя значение $B(n)$ в (2.12), определим комплексную амплитуду

$$A(\xi,\ \eta) = \frac{1}{\sqrt{1 - iN\xi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{1 - iN\xi}\right)$$

Тогда решение (2.11) после отделения мнимой части запишется в окончательном виде

$$U = \frac{1}{\sqrt[4]{1+N^2\xi^2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{1+N^2\xi^2} - \delta_e^*\xi\right) \sin\left(\theta - \gamma_e^*\xi - \right.$$

$$\left. - \eta^2 \frac{N\xi}{1+N^2\xi^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} N\xi\right)$$

При отсутствии диссипации и дисперсии $(\delta_e^* = \gamma_e^* = 0)$ полученное решение совпадает с [4] и описывает переход от плоской $(\xi = 0)$ к цилиндрической $(\xi \to \infty)$ волне. Видно, что дифракция приводит к увеличению ширины пучка, уменьшению амплитуды волны и искривлению поверхностей равных фаз. Наличие пузырьков, согласно (1.11) и определению числа N, приводит к уменьшению числа N и, соответственно, к менее яркому дифракционному эффекту. Учет пузырьков приводит также к увеличению толщины волны и к большему искривлению поверхностей равных фаз, а учет химической реакции — к затуханию волны.

3. *Квазизамороженный процесс.*

Вывод уравнения, описывающего течение газожидкостной смеси в окрестности волны при квазизамороженном процессе распространения возмущений, аналогичен выводу уравнения (2.9).

За независимые термодинамические переменные принимаются P_1, ρ_1 и полнота химической реакции q. Как и в [2, 12], нетрудно показать, что в принятом приближении сжатие газожидкостной смеси происходит обратимо, время протекания химической реакции τ_* намного больше времени пробега частицей волновой зоны и имеют место порядки величин: $q' \sim \varepsilon$, $s' \sim \varepsilon$, $\tau_* \sim 1$.

Не приводя здесь промежуточных выкладок, выпишем окончательное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_f u \frac{\partial u}{\partial\tau} - \delta_f \frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2} - \gamma_f \frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3} + gu\right) = \frac{a_{f0}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (3.1)$$

где $\delta_f = \delta_{1f} + \varkappa_f$, $g = m_f/\tau_{Vs}^2$, a_{f0} — невозмущенная замороженная скорость звука в смеси, остальные коэффициенты задаются соотношениями (2.7) с заменой a_{e0} на a_{f0}. Переходя в (3.1) к безразмерным переменным п. 2, рассмотрим линейное приближение плоской задачи, для которого сформулируем граничную задачу (2.10). Решение получаемого линейного уравнения будем искать в форме

$$U(\xi, \eta, \theta) = \operatorname{Im} A(\xi, \eta) \exp\left[i(\theta - \gamma_f^*\xi) - (\delta_f^* + g^*)\xi\right]$$

Не повторяя выкладок предыдущего параграфа, окончательное решение запишем в виде

$$U = \frac{1}{\sqrt[4]{1+N^2\xi^2}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{1+N^2\xi^2} - (\delta_f^* + g^*)\right] \sin\left(\theta - \gamma_f^*\xi - \right.$$

$$\left. - \eta^2 \frac{N\xi}{1+N^2\xi^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} N\xi\right)$$

где

$$\delta_f^* = \frac{(\delta_{1f} + \varkappa_f)\,\omega}{\alpha_f u_0}, \qquad g^* = \frac{m_f}{\tau_{Vs}^2 \omega \alpha_f u_0}, \qquad \gamma_f^* = \frac{\gamma_f \omega}{\alpha_f u_0}, \qquad N = \frac{2\alpha_{f0}}{l^2 \omega^2 \alpha_f u_0}$$

4. *Среды, в которых скорости звука близки.* Исходя из термодинамических соотношений [8], связь между замороженной и равновесной скоростями звука в жидкой фазе можно найти в виде

$$a_{1f0}^2 - a_{1e0}^2 = \frac{1}{\rho_1^2} \frac{e_{12}^2}{e_{11}} \geqslant 0, \qquad e_{12} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial V_1 \partial q}\right)_s, \qquad e_{11} = \left(\frac{\partial^2 e}{\partial q^2}\right)_{V_1 s} \tag{4.1}$$

где знак неравенства определяется требованием термодинамической устойчивости системы. Пусть величины скоростей a_{1e0} и a_{1f0} в состоянии покоя близки друг к другу, тогда из (1.11) следует, что разность скоростей звука a_{e0} и a_{f0} в покоящейся смеси также мала. Примем $e_{120} = \varepsilon^{1/2} e_{120}'$. В предельных процессах распространения возмущений соответственно сначала $Q' \sim \varepsilon$, а затем $q' \sim \varepsilon$. Если теперь предположить, что они одинакового порядка и не настолько малы, то в (1.9) необходимо сделать замену $Q' \to \varepsilon^{1/2} Q'$, $q' \to \varepsilon^{1/2} q'$ и тогда время протекания химической реакции τ_* окажется порядка ε.

По предположению, невозмущенная скорость звука a_0 не совпадает ни с одной из предельных скоростей a_{e0} и a_{f0}, поэтому положим

$$a_{f0} - a_0 = \varepsilon a_0 \sigma_{f1}, \qquad a_0 - a_{e0} = \varepsilon a_0 \sigma_{e1} \tag{4.2}$$

где постоянные σ_{e1} и σ_{f1} — величины порядка единицы.

Аналогично [12], легко показать, что в рассматриваемом приближении опять выполняются первых два соотношения из (2.3) с заменой a_{e1} на a_1, условие потенциальности течения (2.5) и

$$Q = e_{110} q - \frac{\rho_1}{\rho_{10}^2} e_{120}, \qquad \sigma_{e1} = \sigma_{f1} + \frac{e_{120}^2}{2\rho_0^2 a_0^2 e_{110}} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{P_0}\right)^2 = \sigma_{f1} + \tau_{Vs} \frac{g a_0}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{H_0}{\tau_* a_0} \left[e_{110} q - \frac{e_{120}}{\rho_0 a_0} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{P_0}\right) u \right] \tag{4.3}$$

Применяя преобразования (1.7)—(1.9) к x-составляющей уравнения (2.2) и к (3.1), оставляя главные члены, получим два уравнения, содержащие также слагаемые порядка $\varepsilon^0 = 1$. Учитывая соотношения (4.1), (1.10) и (2.3), а также $(\partial \rho_1 / \partial q_0)_{P_s} = e_{120} / a_{1f0}^2$, исключим друг из друга слагаемые нулевого порядка. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0^2 \left(\alpha_f u - \frac{\sigma_{f1}}{a_0}\right) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{a_0^3}{\varepsilon^2} (\delta_1 + \varkappa) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a_0^4}{\varepsilon^3} \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} +$$

$$+ \frac{a_0}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial z_1}\right) = \frac{e_{120}}{\rho_0} \left(1 - \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{P_0}\right) \frac{\partial q}{\partial r} \tag{4.4}$$

где выражения коэффициентов выписаны в (2.7) с заменой a_{e0} на a_0, a_{1e0} на a_{10} и учтены соотношения (1.10).

Исключая в (4.4) посредством (4.3) параметр q и константу σ_{f1}, получим уравнение, описывающее совместно с (2.5) течение в окрестности волны, распространяющейся в специальных средах. Записывая систему через одно уравнение и переходя к переменным (x, τ), получим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\alpha_f u-\varepsilon\frac{\sigma_{e1}}{a_0}\right)\frac{\partial u}{\partial\tau}-(\delta_1+\varkappa+m)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}-\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}\right]-$$

$$-\frac{a_0}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=-\tau_{Vs}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\alpha_f u-\varepsilon\frac{\sigma_{e1}}{a_0}\right)\frac{\partial u}{\partial\tau}-\right.$$

$$\left.-(\delta_1+\varkappa)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}-\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}\right]+\tau_{Vs}\frac{a_0}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (4.5)$$

где явные выражения τ_{Vs} и m даны в (2.7). Если скорости a_{f0} и a_{1e0} почти совпадают друг с другом, то есть $m \ll (\delta_1+\varkappa)$, то (4.5) один раз интегрируется и получаемое уравнение будет описывать течение в окрестности волны, распространяющейся в химически инертной газожидкостной смеси.

Нетрудно показать, что (4.5) в предельных случаях переходит в уравнения (2.8) и (3.1). Действительно, пусть $\tau_{Vs}\sim\varepsilon^2$ и $\sigma_{e1}\equiv 0$. Оставляя в (4.5) главные члены, то есть только левую часть, снова придем к (2.8). Если же $\tau_{Vs}\sim 1$ и $\sigma_{f1}\equiv 0$, то, заменяя с помощью (4.3) σ_{e1} на σ_{f1} и оставляя главные члены, приведем (4.5) к (3.1).

а) Плоская задача. Линейное приближение.

Вводя безразмерные переменные п. 2, линейный двумерный вариант уравнения (4.5) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial U}{\partial\xi}+\sigma^*_{e1}\frac{\partial U}{\partial\theta}-(\delta^*_1+\varkappa^*+m^*)\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}-\gamma^*\frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3}\right]-\frac{N}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}=$$

$$=-N_1\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\frac{\partial U}{\partial\xi}+\sigma^*_{e1}\frac{\partial U}{\partial\theta}-(\delta^*_1+\varkappa^*)\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}-\gamma^*\frac{\partial^3 U}{\partial\theta^3}\right]+\frac{NN_1}{4}\frac{\partial^3 U}{\partial\theta\partial\eta^2} \qquad (4.6)$$

Здесь коэффициенты δ^*_1, $\varkappa^*$, m^*, γ^*, N те же, что и в (2.9) с заменой a_{e0} на a_0, α_e на α, $N_1=\tau_{Vs}\omega$, $\sigma^*_{e1}=\varepsilon\sigma_{e1}/\alpha u_0 a_0$, $\alpha=\alpha_f=\alpha_e$.

Решение задачи, сформулированной в п. 2, для уравнения (4.6) можно записать в виде

$$U=\frac{1}{\sqrt[4]{1+N^2\xi^2}}\exp\left[-\frac{\eta^2}{1+N^2\xi^2}-(\delta^*_1+\varkappa^*)\xi-\frac{m^*}{1+N_1^{(2)}}\xi\right]\sin\left(\theta-\right.$$

$$\left.-\eta^2\frac{N\xi}{1+N^2\xi^2}-\gamma^*\xi-\sigma^*_{e1}\xi+\frac{N_1 m^*}{1+N_1^2}\xi+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}N\xi\right)$$

который в предельных случаях переходит в решения п. 2 и 3. По сравнению с предыдущими решениями видно, что имеют место лишь количественные изменения в структуре (толщине) волны и поверхностях равных фаз. Качественная картина не меняется: происходит эволюция плоской волны в цилиндрическую.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 12 VII 1978

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ՌԵԼԱՔՍԱՑՎՈՂ ԳԱԶԱՀԵՂՈՒԿԱՅԻՆ ԽԱՌՆՈՒՐԴՈՒՄ ԹՈՒՅԼ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է եռաչափ ալիքների տարածման խնդիրը գազի պղպջակներ պարունակող քիմիապես ակտիվ հեղուկների խառնուրդում։ Մածուցիկության, ռելաքսացիայի և պղպջակների առկայության դեպքում դուրս են բերված թույլ հարվածային ալիքների ճակատների շրջակայքերում ոչ ստացիոնար շարժումը նկարագրող ոչ գծային հավասարումները։

Ոչ ստացիոնար հարթ ալիքների համար, գրգռումների տարածման տարբեր պրոցեսներում, գծային դրվածքով լուծվում են մոնոխրոմատիկ ալիքների էվոլյուցիայի խնդիրները։ Վերոհիշյալ էֆեկտների հաշվառումը ալիքների ճակատների և հավասար ֆազաների մակերևույթներում առաջ է բերում կազմության մեջ միայն քանակական փոփոխություններ։

PROPAGATION OF WEAK WAVES IN A RELAXATING GAS-FLUID MIXTURE

G. G. OHANIAN

Summary

The three-dimensional problem on propagation of waves in a mixture of chemically active fluids containing gas bubbles is considered. The non-linear equations, describing unsteady flows in the vicinity of weak shock waves fronts in the presence of the effects of viscosity, relaxation and bubbles, are derived.

For unsteady plane waves in linear statement the problems on evolution of monochromatic waves in various processes of disturbances propagation are solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бэтчелор Г. К.* Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1968, № 3.
2. *Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С.* Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях. Ж. выч. матем. и математич. физики, 1971, т. 11, № 5.
3. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. Успехи физ. наук, 1967, т. 93, № 1.
4. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.
5. *Соболев В. В.* Распространение и самофокусировка звука в неоднородной газожидкостной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
6. *Акуличев В. А.* Пульсация кавитационных полостей. Сб. «Мощные ультразвуковые поля». М., «Наука», 1968.
7. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
8. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
9. *Ван-Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. Сб. «Реология суспензий». М., «Мир», 1975.
10. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1967.
11. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
12. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых волн в химически активной среде в нелинейной постановке. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1973, т. 26, № 6.