

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ, В. М. СМОЛЬСКИЙ

К РЕШЕНИЮ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ
 ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ
 МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

Основными прочностными и пространственными характеристиками многослойной панели являются:

1. Изгибная жесткость панели, пропорциональная величине [1]

$$c_1(h) = c_1(h_1, h_2, \dots, h_n) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n E_i (a_i^3 - a_{i-1}^3)$$

$$a_i = \sum_{j=0}^i h_j, \quad h_0 = 0$$

2. Предел пропорциональности, характеризующий условие работы панели в упругой области

$$c_2(h) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n E_i h_i \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = \min_{1 < i < n} \left\{ \frac{\sigma_{Pi}}{E_i} \right\}$$

3. Вязкость разрушения панели [2]

$$c_3(h) = K_C = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n K_C^{(i)} h_i$$

4. Вес панели, пропорциональный величине

$$c_4(h) = P = \sum_{i=1}^n h_i \rho_i$$

5. Толщина панели (объем панели пропорционален толщине)

$$c_5(h) = h = \sum_{i=1}^n h_i$$

Здесь введены следующие обозначения: h_i — толщина i -ого слоя панели; E_i , ε_{Pi} , $K_C^{(i)}$, ρ_i — соответственно, модуль упругости, предел пропорциональности, вязкость разрушения и плотность материала i -ого слоя. Для многослойной панели через n , K_C , P , h обозначены число слоев, вязкость разрушения, приведенный вес и толщина соответственно.

При выборе n и h_i ($i = 1, 2, \dots, n$) стараются добиться возможно больших значений характеристик $c_1(h)$, $c_2(h)$ и $c_3(h)$ и возможно

меньших значений $c_4(h)$ и $c_3(h)$. Поэтому общую многокритериальную задачу оптимального проектирования многослойной панели можно сформулировать следующим образом (критерий Парето (3)):

$$\begin{aligned} \max \sum_{j=1}^5 \lambda_j c_j(h), \quad \lambda_j \begin{cases} > 0, & j = 1, 2, 3 \\ < 0, & j = 4, 5 \end{cases} \\ \sum_{j=1}^5 |\lambda_j| = 1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Величины $|\lambda_j|$ характеризуют важность отдельного критерия в многокритериальной задаче и выбираются при постановке задачи, либо по уже известным решениям однокритериальных задач [3, 4], либо «волевым» решением группой экспертов.

Другим подходом сведения многокритериальной задачи к задаче с одним критерием является выбор одного критерия в качестве главного, причем на остальные характеристики панели накладываются ограничения в форме неравенств. Если при этом в задаче есть один параметр, по которому критерии меняются монотонно, удается дать наглядную интерпретацию множителям λ_j . В нашей задаче в качестве характерного параметра можно взять параметр t пропорционального изменения толщины панели $h_i = h_i^* t$. По этому параметру критерии можно разбить на две группы: одни улучшаются с увеличением t (увеличение изгибной жесткости панели), другие ухудшаются (увеличение вязкости разрушения, минимум веса и толщины панели); предел пропорциональности не меняется с изменением t .

Многокритериальные задачи возникают тогда, когда есть критерии из различных групп (противоречивые критерии), иначе решение оптимальной задачи тривиально. Например, решение задачи

$$\max_{n, h_i} [\lambda_3 K_C - \lambda_4 P], \quad \lambda_j > 0, \quad j = 3, 4$$

сводится к определению такого t , при котором достигается

$$\max_{1 < t < n} [\lambda_3 K_C^{(t)}(h_{i0}) - \lambda_4 h_{i0} p_i]$$

После разбиения критериев на группы по характерному параметру удобно сначала оценить критерии по их сложности и наиболее сложный взять в качестве основного (в наших условиях это, по-видимому, первый критерий).

Рассмотрим следующую задачу:

$$\max_{h_i} c_1(h) \quad (1.2)$$

при ограничениях

$$c_3(h) \geq K_0 \quad (1.3)$$

$$c_j(h) \leq c_{j0}, \quad j = 2, 4, 5 \quad (1.4)$$

Поскольку критерий (1.2) монотонно растет с увеличением толщины любого слоя, решение задачи (1.2)—(1.4) находится на границе ограничений (1.3)—(1.4). Поэтому решение этой задачи распадается на решение нескольких задач с ограничениями типа равенства и проверкой выполнения для этих решений оставшихся ограничений. Решение общей задачи получается выбором наилучшего решения из конечного числа решений этих задач. Полученные вспомогательные задачи методом множителей Лагранжа сводится к решению задачи с критерием (1.1); однако параметры λ_j определяются в ходе решения задачи; таким образом, устанавливается связь между множителями λ_j и константами K_0 , c_{j0} в ограничениях [5].

Следует заметить, что поставленная задача непрерывна по h_i и дискретна по n . Решение по дискретному параметру n производится полным перебором. В дальнейшем считаем n фиксированным и решаем задачу по непрерывным параметрам.

Из вспомогательных задач рассмотрим как наиболее сложную следующую задачу:

$$\max_{h_j} \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n E_i (a_i^3 - a_{i-1}^3), \quad a_i = \sum_{j=0}^i h_j, \quad h_0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [K_C^{(i)}(h_i) - K_0] h_i = 0 \quad (1.5)$$

Остальные ограничения не выписываем; их учет производится в конце решения задачи.

Составим функцию Лагранжа

$$F(h_i, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3} E_i (a_i^3 - a_{i-1}^3) + \lambda h_i (K_C^{(i)} - K_0) \right]$$

и необходимые условия для определения оптимальных значений h_i и λ

$$\frac{\partial F}{\partial h_i} = \sum_{k=i}^n E_k (a_k^2 - a_{k-1}^2) + \lambda f_i(h_i) = 0 \quad (1.6)$$

$$f_i(h_i) = K_C^{(i)}(h_i) - K_0 + h_i \frac{dK_C^{(i)}(h_i)}{dh_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Вместо системы уравнений (1.6) рассмотрим эквивалентную систему, полученную из последнего уравнения системы (1.6) и последовательных разностей i -ого и $(i+1)$ -ого уравнений системы (1.6)

$$E_n h_n \left(h_n + 2 \sum_{j=0}^{n-1} h_j \right) + \lambda f_n(h_n) = 0 \quad (1.7)$$

$$E_i h_i \left(h_i + 2 \sum_{j=0}^{i-1} h_j \right) + \lambda [f_i(h_i) - f_{i+1}(h_{i+1})] = 0 \quad (1.8)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1)$$

Соотношение (1.5) дополняет условия (1.7), (1.8) для определения λ , h_i .

Примечательно, что система уравнений (1.8) не содержит K_0 , поэтому можно, задавая λ , рекуррентно по i выразить все h_i через λ и h_1 . Подставив K_0 из (1.5) в (1.7), получаем еще одну связь h_n и h_1 . Затем решаем полученное уравнение численно и получаем для данного λ оптимальные толщины всех слоев и величины $K_0(\lambda)$, c_j , d_j ($j = 2, 4, 5$). По графикам этих монотонных функций от λ определяем то значение λ , при котором все ограничения выполнены (одно из них является равенством).

Таким образом, при решении задачи считается заданной не величина K_0 , а значение λ , по которому потом определяется $K_0(\lambda)$; поэтому важно указать границы изменения величин λ и h_i . Для этого нужно провести конкретное исследование функций $f_i(h_i)$.

Удобна и реалистична следующая аппроксимация:

$$K_C^{(i)}(h_i) = \left[c_i + \frac{d_i}{1 + 2x_i^2} \right]^{1/2}$$

$$c_i = [K_{IC}^{(i)}]^2, \quad d_i = [K_C^{(i)}(h_0)]^2 - c_i, \quad x_i = \frac{h_i}{h_{i0}} - 1 \geq 0$$

В этом случае

$$f_i(h_i) = \frac{1}{K_C^{(i)}(h_i)} \left[c_i + d_i \frac{1 - 2x_i}{(1 + 2x_i^2)^2} \right] - K_0$$

Отсюда следует, что при $h_n > 1.5 h_{n0}$ функция $f_n(h_n)$ отрицательна и для выполнения соотношения (1.7) необходимо неравенство $\lambda > 0$. Тогда во всех соотношениях (1.8) будет

$$f_i(h_i) - f_{i-1}(h_{i+1}) < 0$$

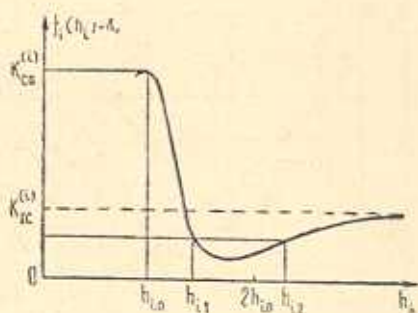
причем эта разность монотонно убывает с увеличением i (считается, что E_i растет с ростом i). Это соответствует постепенному приближению h_i к h_{i0} с уменьшением i .

Примерный график функции $f_i(h_i) + K_0$ показан на фиг. 1; при $K_0 > \max_i K_{IC}^{(i)}$ существует отрицательный относительный минимум $f_i(h_i)$ и поэтому, вообще говоря, две точки h_{i1} и h_{i2} (фиг. 1), которые удовлетворяют необходимым условиям. Ясно, что точки $h_{i2} > h_{i1}$ надо брать для слоев с большим номером, однако они могут не удовлетворять ограничениям (1.4). Кроме того, в решении надо учитывать и граничную точку $h_i = h_{i0}$. Таким образом, непрерывная задача (1.2)–(1.4) сводится к проверке 3^n точек вида

$$\{h_{1j_1}, h_{2j_2}, \dots, h_{nj_n}\}$$

$$(j_i = 0, 1, 2; i = 1, 2, \dots, n)$$

Из проведенного исследования вытекает, что для многослойных панелей из материалов, у которых существенно различны модули упругости, оптимальными будут следующие величины толщин слоев: для всех слоев, кроме последнего, надо брать $h_i = h_{i0}$, а для последнего слоя — $h_n = h_{n2}$. Для материалов с близкими характеристиками надо проводить расчет по формулам (1.5), (1.7), (1.8).



Фиг. 1. Примерный график функции $\bar{I}_i(h_i) + K_c$.

Построенный принцип выбора оптимальной многослойной панели по пяти основным ее характеристикам следует рекомендовать как наиболее реалистичский принцип оптимального проектирования авиационных слоистых конструкций. Заметим, что в настоящее время в инженерной практике обычно проектируют панели лишь по двум характеристикам (по жесткости и весу).

Примеры. В качестве первого примера проведем расчет шестислойной панели из следующих листовых материалов: алюминиевого сплава 7075-T6 ($h_0 = 0.26$ см, $K_{IC} = 4200$ кг/см^{3/2}, $K_C(h_0) = 9165$ кг/см^{3/2}, $E = 0.71 \times 10^6$ кг/см²), титанового сплава BT14 ($h_0 = 0.1$ см, $K_{IC} = 5500$ кг/см^{3/2}, $K_C(h_0) = 9420$ кг/см^{3/2}, $E = 1.15 \cdot 10^6$ кг/см²), стали ВКС-1 ($h_0 = 0.1$ см, $K_{IC} = 6300$ кг/см^{3/2}, $K_C(h_0) = 9030$ кг/см^{3/2}, $E = 2.05 \cdot 10^6$ кг/см²).

Графики зависимостей $c_{j0}(\lambda)$ приведены на фиг. 2. Расчетом подтверждается решение для материалов с различными модулями упругости, изложенное выше.

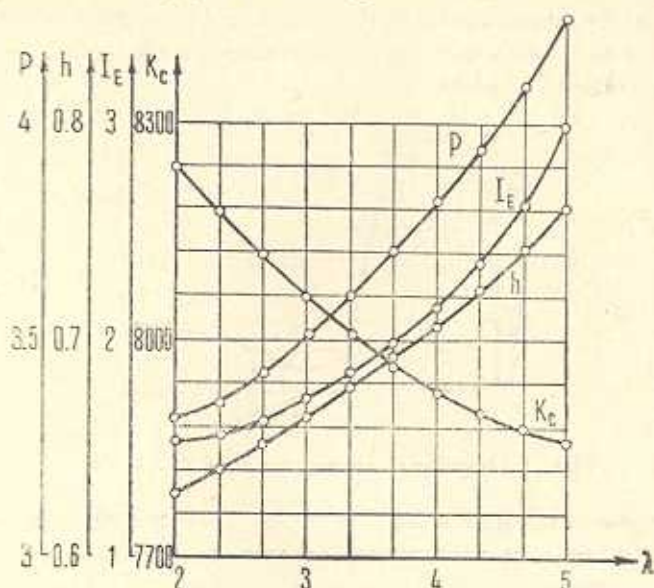
В качестве второго примера спроектируем шестислойную панель из следующих алюминиевых сплавов с близкими характеристиками: сплава 7075-T6 (его характеристики даны в первом примере); сплава Д16 ($h_0 = 0.2$ см, $K_{IC} = 4000$ кг/см^{3/2}, $K_C(h_0) = 9000$ кг/см^{3/2}, $E = 0.72 \times 10^6$ кг/см²) и сплава АК8 ($h_0 = 0.22$ см, $E = 0.73 \cdot 10^6$ кг/см², $K_{IC} = 4000$ кг/см^{3/2}, $K_C(h_0) = 8200$ кг/см^{3/2}).

Графики зависимостей представлены на фиг. 3, 4.

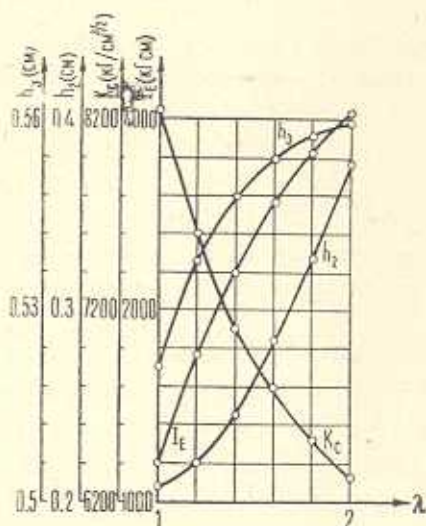
Толщины отдельных слоев отличаются от величин h_{i0} при больших значениях вязкости разрушения и монотонно изменяются с увеличением λ .

Замечание. Несмотря на то, что рассматриваемая задача решается методами оптимизации по параметрам, она является задачей оптимального проектирования в начальной постановке, поскольку, как показано в [2],

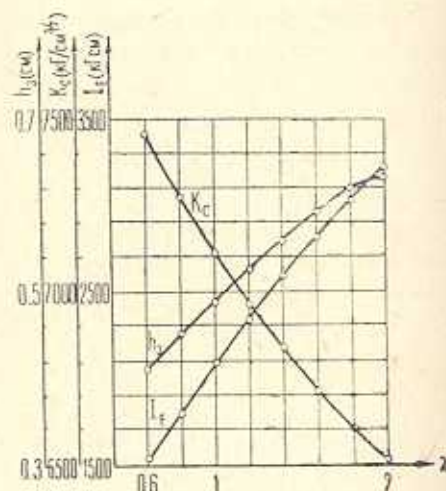
ограничения в виде плоского напряженного состояния панели приводят к критерию (1.3). Разумеется, параметрическая оптимизация многослойной панели, предложенная в [2] и в настоящей статье, является определенным



Фиг. 2. Зависимость приведенного веса ($\text{кг}/\text{см}^2 \cdot 10^3$), толщины (см), изгибной жесткости ($\text{кг} \cdot \text{см} \cdot 10^{-4}$) и вязкости разрушения ($\text{кг}/\text{см}^{3/2}$) от λ .



Фиг. 3. Результаты расчета для материалов с близкими характеристиками (меняется толщина 2-х слоев).



Фиг. 4. Результаты расчета для материалов с близкими характеристиками (меняется толщина третьего слоя).

упрощением общей задачи оптимального проектирования панели. Это упрощение основано на схематизации физического процесса деформации и разрушения панели (что отражено характеристиками s_1 , s_2 , s_3), а также на схе-

матризации геометрической структуры панели (характеристики c_1, c_2). Оно не учитывает, например, динамических волновых эффектов, докритического роста трещин и многого другого, когда следует оптимизировать другие критерии. Общая задача оптимизации многослойной панели весьма неопределенна и ее решение невозможно без таких упрощений. Рассматриваемая постановка может считаться начальной при наличии аварийного и безаварийного режимов работы панели [2].

Заключение. Предложенный подход оптимального проектирования многослойных панелей с помощью множителя Лагранжа дает возможность установить связь между этим множителем в общем критерии многокритериальной задачи и правой частью ограничения типа равенства в однокритериальной задаче. Общая задача оптимального проектирования многослойной панели распадается на набор вспомогательных однокритериальных задач.

Московский авиационный
институт

Поступила 24.XI 1977

Գ. Պ. ՉԵՐԵՊԱՆՈՎ, Վ. Մ. ՍՄՈԼՍԿԻ

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ՊԱՆԵԼՆԵՐԻ ԹՊՏԻՄԱԼ ԿԱՆԱԳԾՄԱՆ
ԲԱԶՄԱԶԱՓԱՆԻՇԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ու ի մ

Բազմաշերտ պանելի օպտիմալ նախագծման բազմաշափանիշային խնդիրը բերվել է օժանդակ միաշափանիշային խնդիրների, որոնք առաջարկվում է լուծել կադրանտի բազմապատկիչների մեթոդով:

Կառուցվել է ըստ հինգ հիմնական բնորոշիչների օպտիմալ բազմաշերտ պանելների ընտրության սկզբունքը, որն առաջարկվում է որպես շերտավոր ավիացիոն պանելների օպտիմալ նախագծման ավելի գործնական սկզբունք:

Սեյդ սկզբունքի հիման վրա լուծվել է բայբայման ֆիբրոված մածուցիկությամբ և ծոման ամենամեծ կոշտությամբ բազմաշերտ պանելի օպտիմալ նախագծման խնդիրը:

ON THE SOLUTION OF A MULTICRITERIA PROBLEM OF
OPTIMAL DESIGN OF MULTILAYERED PANELS

G. P. CHEREPANOV, V. M. SMOLSKY

S u m m a r y

The multicriteria problem of optimal design of a multilayered panel is reduced to a set of auxiliary one-criterion problems. The auxiliary problem of design of the multilayered panel of maximum flexural rigidity and given fracture toughness is solved as an example.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. Черепанов Г. П., Смольский В. М., Тати-Заде А. Г. Об оптимальном проектировании некоторых инженерных материалов. «Изв. АН Арм. ССР, Механика», 1976, т. XXIX, № 3.
3. Trojanowski St. Wielokryteriowa optymalizacja w sensie Pareto niewspolimierych funkcji celu. Prz. statist., 1975, v. 22, No. 3, 427—433.
4. Бартель Д. А., Маркс Р. В. Оптимальное проектирование механических систем при противоречивых критериях, конструирование и технология машиностроения. Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков, сер. Б, 1974, № 1, 72—80.
5. Смольский В. М. Апостериорная оценка промежуточного параметра в комбинированном методе поиска экстремума. Автоматизация управления нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности, М., 1972, № 2, 77—81.