

А. А. ЗЕВИН, И. Г. ПАДВА

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА
В ЗАДАЧАХ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Изображение по Лапласу решения квазистатической задачи наследственной теории упругости можно получить на основании принципа соответствия [1]. В простейших случаях оригинал может быть найден аналитически; в общем случае применяются численные методы обращения, использующие значения изображения при некоторых дискретных значениях параметра преобразования p_i .

Если свойства среды описываются экспоненциальными ядрами и изображение $\bar{\varphi}(p)$ известно в аналитической форме, то значения $\bar{\varphi}(p_i)$ могут быть вычислены с необходимой точностью и серьезных затруднений при переходе к оригиналам, вообще говоря, не возникает. Однако, во многих практически важных случаях зависимость решения задачи теории упругости от констант материала в явном виде не известна, но задача может быть решена численно. Тогда значения $\bar{\varphi}(p_i)$ могут быть получены с ограниченной точностью, так как определяются из численного решения задачи теории упругости с константами материала, зависящими от p_i .

Эффективность ряда методов численного обращения исследовал Кост [2]. Большинство методов оказались крайне чувствительными к точности, с которой известны значения $\bar{\varphi}(p_i)$. Наилучший результат получен при применении метода наименьших квадратов Шепери [1], который основан на приближении решения в оригиналах линейной комбинацией экспоненциальных функций.

Если свойства среды описываются слабо сингулярными ядрами, при численном обращении могут возникнуть существенные трудности. Метод Шепери становится очень чувствительным к точности, с которой задано изображение в узловых точках, что показано на примере в § 4. Более эффективен метод аппроксимаций А. А. Ильюшина [3, 4], однако он приспособлен к случаю, когда свойства среды описываются одним оператором.

В настоящей статье полученное ранее [5] интегральное представление функции дробно-экспоненциальных операторов распространяется на операторы более общего вида и на примерах иллюстрируется его эффективность. Развита два метода численного обращения преобразования Лапласа, основанные на разложении решения по интегралам от дробно-экспоненциальных функций. Методы применимы к решению задач для анизотропных или кусочно-неоднородных тел, свойства которых описываются несколькими независимыми операторами.

§ 1. Пусть свойства в общем случае анизотропного или кусочно неоднородного тела описываются операторами

$$\bar{G}_k = G_{k0} [1 - \Gamma_k^*] \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1.1)$$

где G_{k0} — константы, Γ_k^* — операторы типа свертки с ядрами вида

$$\Gamma_k(t) = \sum_{i=1}^m \gamma_{ki} \mathcal{E}_\alpha(-\vartheta_{ki}, t), \quad -1 < \alpha < 0, \quad \vartheta_{ki} > 0 \quad (1.2)$$

$\mathcal{E}_\alpha(-\vartheta, t)$ — дробно-экспоненциальная функция, введенная Ю. Н. Работновым [6].

Выбор ядер специального вида по существу не является ограничением. Дробно-экспоненциальные функции хорошо отвечают опытным данным, и для описания экспериментальных кривых $\Gamma_k(t)$ достаточно в представлении (1.2) удержать от 1 до 3 слагаемых.

Изображение по Лапласу функции $\mathcal{E}_\alpha(-\vartheta, t)$

$$L\{\mathcal{E}_\alpha(-\vartheta, t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} \mathcal{E}_\alpha(-\vartheta, t) dt = \omega(p) = \frac{1}{p^\nu + \vartheta}, \quad \nu = 1 + \alpha \quad (1.3)$$

Пусть $\varphi(t)$ — некоторая величина, характеризующая напряженно-деформированное состояние в фиксированной точке тела, причем решение квазистатической упругой задачи имеет вид

$$\varphi_0(t) = F_0[G_{10}, \dots, G_{n0}]y(t) \quad (1.4)$$

где $y(t)$ — известная функция, пропорционально которой изменяются внешние воздействия. Тогда на основании принципа соответствия [1] изображение $\bar{\varphi}(p)$

$$\bar{\varphi}(p) = F_0\left[G_{10}\left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_{1i}}{p^\nu + \vartheta_{1i}}\right), \dots, G_{n0}\left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_{ni}}{p^\nu + \vartheta_{ni}}\right)\right]\bar{y}(p) \quad (1.5)$$

В работе [5] получено интегральное представление оригинала выражения (1.5), которое при $y(t) = 1$ (нагрузка постоянна) приводится к виду

$$\begin{aligned} \varphi(t) = F_0[G_{1*}, \dots, G_{n*}] & - \frac{1}{\nu\pi} \left[\int_0^1 \exp(-u^{-\frac{1}{\nu}}t) \frac{R(u) du}{u} + \right. \\ & \left. + \int_0^1 \exp(-u^{-\frac{1}{\nu}}t) \frac{W(u) du}{u} \right] \quad (1.6) \end{aligned}$$

Здесь $G_{k*} = G_{k0} \left[1 - \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_{ki}}{\vartheta_{ki}}\right]$; $R(u)$ и $W(u)$ — мнимые части функций, получаемые из решения задачи теории упругости с комплексными константами материала, зависящими от действительного параметра u :

$$R(u) = \operatorname{Im} F_0[B_1(u), \dots, B_n(u)]; \quad W(u) = \operatorname{Im} F_0[D_1(u), \dots, D_c(u)] \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} B_k(u) &= G_{k0} \left[1 - \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{ki}}{u \exp(-i\nu\pi) + \vartheta_{ki}} \right] \\ D_k(u) &= G_{k0} \left[1 - \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{ki}u}{\exp(-i\nu\pi) + u\vartheta_{ki}} \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

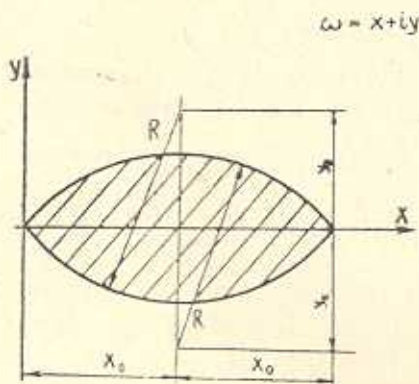
Условия, при которых справедлива формула (1.6), удобно определить следующим образом. Введем переменную $\omega(p) = 1/(p^2 + \vartheta)$ ($\vartheta > 0$ произвольно). Тогда функция F_0 из (1.5) может быть представлена в виде

$$F_0 \left[G_{10} \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{1i}\omega}{1 - (\vartheta - \vartheta_{1i})\omega} \right), \dots, G_{n0} \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{ni}\omega}{1 - (\vartheta - \vartheta_{ni})\omega} \right) \right] = F(\omega) \quad (1.9)$$

Можно показать, что представление (1.6) справедливо, если функция $F(\omega)$ аналитична в заштрихованной области, показанной на фиг. 1.

В [5] интегральное представление (1.6) получено при несколько более жестких ограничениях.

Выражение (1.6) позволяет эффективно вычислять $\varphi(t)$, используя формулы численного интегрирования. Пусть u_j ($j = 1, \dots, r$) — узлы вы-



Фиг. 1.

бранной квадратурной формулы, приведенные к интервалу $[0, 1]$. Значения функций $R(u)$ и $W(u)$ в узловых точках можно найти, заменяя в решении задачи теории упругости константы G_{k0} величинами $B_k(u_j)$ и $D_k(u_j)$ и выделяя мнимую часть полученных выражений.

Можно показать, что подынтегральные функции в (1.6) непрерывны, поэтому вычисление квадратур не представляет затруднений. Сходимость численной квадратуры при увеличении числа узлов иллюстрируется на примерах в § 4.

$$R_k(t) = e^{-\rho t} \sum_{i=1}^m \lambda_{ki} \mathcal{D}_\alpha(-\vartheta_{ki}, t), \quad -1 < \alpha < 0, \quad \vartheta_{ki} > 0 \quad (1.10)$$

Каждое слагаемое в (1.10) представляет собой резольвенту ядра $\exp(-\rho t) t^\alpha / \Gamma(\alpha + 1)$, предложенного А. Р. Ржаницыным [7]. Ядра вида (1.10) и интегралы от них протабулированы [4].

Повторяя выкладки работы [5] и используя теорему смещения изображения [8], получим

$$\varphi(t) = F_0[G_{1\infty}, \dots, G_{n\infty}] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^1 \exp[-(\rho + u^{\frac{1}{\nu}})] \frac{R(u)u^{\frac{1}{\nu}-1} du}{(u^{\frac{1}{\nu}} + \rho)} + \int_0^1 \exp[-(\rho + u^{-\frac{1}{\nu}})] \frac{W(u) du}{(1 + \rho u^{1/\nu}) u} \right] \quad (1.11)$$

Здесь $G_{k\infty} = G_{k0} \left[1 - \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_{ki}}{\rho^{\nu} + \theta_{ki}} \right]$, а функции $R(u)$ и $W(u)$ определяются выражениями (1.7).

§ 2. При численном решении задачи теории упругости для определения $R(u_j)$ и $W(u_j)$ необходимо решить $2r$ задач с комплексными константами материала, равными $B_k(u_j)$ и $D_k(u_j)$, $j=1, \dots, r$. Это может вызвать определенные трудности, так как в существующих программах для решения задач теории упругости обычно предусматривается, что константы материала — действительные числа.

Приведем два метода численного обращения преобразования Лапласа, использующие значения изображения в узлах на действительной положительной полуоси. Эти значения могут быть найдены из решения задачи теории упругости с действительными константами материала. Методы основаны на разложении оригинала по дробно-экспоненциальным функциям и оказываются эффективными, если свойства наследственно-упругого тела описываются слабо сингулярными ядрами.

Представим решение наследственной задачи в виде

$$\varphi(t) = y(t) + \int_0^t \Theta(\tau) y(t-\tau) d\tau \quad (2.1)$$

где $y(t)$ — известная функция, а изображение $\bar{\Theta}(p)$ функции $\Theta(t)$ может быть найдено в некоторых узлах p_i . Для вычисления выражения (2.1) достаточно найти $\Theta(t)$.

Если ядра операторов, фигурирующих в исходных уравнениях состояния, имеют особенности порядка α , то функция $\Theta(t)$ имеет особенность того же порядка.

Рассмотрим сначала случай, когда $-0.5 < \alpha < 0$.

Будем разыскивать приближение $\Theta(t)$ в виде

$$\Theta(t) \approx \Theta_N(t) = \sum_{k=1}^N \gamma_k \mathcal{E}_\alpha(-\theta_k, t) \quad (2.2)$$

где θ_k — заданные параметры, γ_k — неопределенные коэффициенты. Параметр α в выражении (2.2) положим равным порядку особенности функции $\Theta(t)$.

Коэффициенты γ_k определим из условия минимума квадратичной погрешности в пространстве оригиналов

$$\varepsilon^2 = \int_0^{\infty} \left[\Theta(t) - \sum_{k=1}^N \gamma_k \Theta_a(-\vartheta_k, t) \right]^2 dt \quad (2.3)$$

Приравнивая нулю производные по γ_k выражения (2.3), получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^N \delta_{ik} \gamma_k = b_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.4)$$

Здесь

$$\delta_{ik} = \int_0^{\infty} \Theta_a(-\vartheta_i, t) \Theta_a(-\vartheta_k, t) dt \quad (2.5)$$

$$b_i = \int_0^{\infty} \Theta(t) \Theta_a(-\vartheta_i, t) dt \quad (2.6)$$

Подынтегральные функции в (2.5) и (2.6) при $t = 0$ имеют особенность порядка $2\alpha > -1$, поэтому интегралы в нуле сходятся.

Так как решение упруго-наследственной задачи стремится к конечному пределу при действии постоянной нагрузки, интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \Theta(t) dt < \infty \quad (2.7)$$

Из последнего выражения и монотонного стремления функций $\Theta_a(-\vartheta, t)$ к нулю при $t \rightarrow \infty$ следует сходимость интегралов (2.5), (2.6) на бесконечности.

Для вычисления коэффициентов δ_{ik} воспользуемся интегральным представлением дробно-экспоненциальной функции, которое является частным случаем представления ядра аналитической функции дробно-экспоненциального оператора, полученного в [5]:

$$\Theta_a(-\vartheta, t) = \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^\nu \exp(-xt) dx}{x^{2\nu} + 2\vartheta x^\nu \cos \nu\pi + \vartheta^2} \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.5) и учитывая, что внутренний интеграл после изменения порядка интегрирования равен изображению по Лапласу функции $\Theta_a(-\vartheta_k, t)$, получим

$$\delta_{ik} = \int_0^{\infty} u^\lambda f(u) du; \quad f(u) = \frac{\lambda \sin \nu\pi}{\pi (u + \vartheta_k) (u^2 + 2\vartheta_l u \cos \nu\pi + \vartheta_l^2)}, \quad \lambda = \frac{1}{\nu} \quad (2.9)$$

причем при $0.5 < \nu < 1$ функция $z^{\lambda+1} f(z)$ стремится к нулю, когда z стремится к нулю и к бесконечности.

Интеграл (2.9) может быть взят с помощью вычетов. Следуя схеме интегрирования, приведенной в [9], найдем

$$\delta_{ik} = - \frac{\sin \nu\pi (\theta_i^2 + \theta_k^2)}{\nu \sin \lambda\pi (\theta_i^2 + \theta_k^2 - 2\theta_i \theta_k \cos \nu\pi)} \quad (2.10)$$

Аналогично, подставляя (2.8) в (2.6), изменяя порядок интегрирования и учитывая, что внутренний интеграл есть преобразование по Лапласу функции $\Theta(t)$ с действительным параметром преобразования, будем иметь

$$b_i = \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^\nu \bar{\Theta}(x) dx}{x^{2\nu} + 2\theta_i x^\nu \cos \nu\pi + \theta_i^2} \quad (2.11)$$

Таким образом, параметры b_i выражаются через интегралы по действительной положительной полуоси от известного изображения функции $\Theta(t)$. При численном интегрировании удобно выражение (2.11) преобразовать к следующему:

$$b_i = \int_0^1 y^{\lambda} f_1(y) dy + \int_0^1 y^{1-\lambda} f_2(y) dy \quad (2.12)$$

$$f_1(y) = \frac{\sin \nu\pi \bar{\Theta}_0(y)}{\nu\pi (y^2 + 2\theta_i y \cos \nu\pi + \theta_i^2)}$$

$$f_2(y) = \frac{\sin \nu\pi \left| \frac{1}{y} \bar{\Theta}_0\left(\frac{1}{y}\right) \right|}{\nu\pi (1 + 2\theta_i y \cos \nu\pi + \theta_i^2 y^2)}, \quad \bar{\Theta}_0(\xi) = \bar{\Theta}\left(\xi^{\frac{1}{\nu}}\right)$$

В случае, когда изображение $\bar{\Theta}(p)$ в явном виде не известно, для определения значений $\bar{\Theta}_0(y)$ и $\bar{\Theta}_0\left(\frac{1}{y}\right)$ в узлах необходимо решить $2r$ задач теории упругости с действительными константами материала (r — число узлов квадратурной формулы). Если, например, свойства тела описываются операторами вида (1.1), (1.2), то функция $\bar{\Theta}_0(y)$ в узлах $y_j^{(1)}$ определяется из решения r упругих задач для тела с константами материала, равными

$$G_{kj}^{(1)} = G_{k0} \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{ki}}{y_j^{(1)} + \theta_{ki}} \right) \quad (j = 1, \dots, r) \quad (2.13)$$

Аналогично, для определения $\bar{\Theta}_0\left(\frac{1}{y_j^{(2)}}\right)$ необходимо решить r упругих задач, в которых упругие константы принимают следующие значения:

$$G_{kj}^{(2)} = G_{k0} \left(1 - \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{ki} y_j^{(2)}}{1 + \theta_{ki} y_j^{(2)}} \right) \quad (j = 1, \dots, r) \quad (2.14)$$

В выражениях (2.13), (2.14) $y_j^{(1)}$ и $y_j^{(2)}$ — узлы (вообще, различные) квадратурных формул, которые используются для интегрирования выражений с весами y^2 и $y^{1-\alpha}$.

§ 3. Изложенный метод неприменим, если порядок особенности функции $\Theta(t)$ $\alpha < -0.5$, так как интегралы (2.5), (2.6) расходятся.

Приведем метод численного обращения, применимый при любых $\alpha \in (-1, 0]$.

Будем размыскивать приближение функции $\Theta(t)$ в виде (2.2). Коэффициенты γ_k определим из условия минимума квадратичной погрешности в пространстве изображений.

Представим функцию $\bar{\Theta}_0(\xi) = \bar{\Theta}(\xi^{-1})$ в виде

$$\bar{\Theta}_0(\xi) \approx \sum_{n=1}^N A_n \omega_n(\xi) \quad (3.1)$$

где

$$\omega_n(\xi) = \sum_{s=1}^n \frac{C_{ns}}{\xi + \vartheta_s}, \quad \vartheta_s = \exp(s-1) \quad (3.2)$$

— полная на интервале $[0, \infty]$ ортонормированная система функций. Значения параметров C_{ns} приведены в [11].

Коэффициенты A_n определяются из выражения

$$A_n = \int_0^1 \bar{\Theta}_0(\xi) \omega_n(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[\Theta_0(y) \sum_{s=1}^n \frac{C_{ns}}{y + \vartheta_s} + \right. \\ \left. + \frac{1}{y} \Theta_0\left(\frac{1}{y}\right) \sum_{s=1}^n \frac{C_{ns}}{1 + y\vartheta_s} \right] dy \quad (3.3)$$

Интеграл (3.3) можно взять численно. При этом для определения коэффициентов A_n используются значения изображения $\Theta_0(\xi)$ в точках $\xi_s = y_s$ и $\xi_s = 1/y_s$ (y_s — узлы выбранной квадратурной формулы).

Возвращаясь к переменной p , получим

$$\bar{\Theta}(p) \approx \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{p + \vartheta_k}, \quad \gamma_k = \sum_{n=k}^N A_n C_{nk} \quad (3.4)$$

Функции $(p + \vartheta_k)^{-1}$ представляют собой изображения дробно-экспоненциальных функций. Переходя к оригиналам, получим приближение (2.2).

§ 4. Для иллюстрации изложенных методов рассмотрим задачу об изгибе длинной равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, лежащей на упругом основании и шарнирно опертой по длинным краям [12].

Изгибающий момент в середине короткой стороны упругой пластинки

$$M = \frac{1}{8} q l^2 u_2(\xi), \quad u_2(\xi) = \frac{2 \operatorname{sh} \xi \sin \xi}{\xi^2 (\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\xi)}, \quad \xi = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3k_0(1-\nu_0^2)}{E_0 h_0^3}} \quad (4.1)$$

где l и h_0 — ширина и толщина пластинки, q — интенсивность нагрузки, k_0 — коэффициент постели.

Вычислялась функция $\varphi(t) = M(t)/M(0)$, представляющая собой отношение решения с учетом ползучести к решению упругой задачи. При расчетах приняты следующие числовые значения параметров, характеризующих размеры пластинки и упругие свойства материала: $l = 0.25$ м, $h_0 = 0.01$ м, $E_0 = 1910$ МПа, $\nu_0 = 0.25$, $k_0 = 29.4$ МПа/м. Реологические параметры пластинки и основания варьировались. Выполнено несколько вариантов расчета.

1°. При решении задачи методом, изложенным в § 1, операторы, описывающие упруго-наследственные свойства пластинки и основания приняты в виде

$$\bar{E} = E_0(1 - \Gamma_1), \quad \bar{k} = k_0(1 - \Gamma_2)$$

$$\Gamma_k(t - \tau) = \lambda_k \exp[-\rho(t - \tau)] \mathfrak{D}_\alpha(-\vartheta_k, t - \tau) \quad (4.2)$$

Числовые значения реологических параметров:

$\lambda_1 = 1.16$, $\vartheta_1 = 1.54$, $\lambda_2 = 0.3$, $\vartheta_2 = 1$, $\rho = -0.8$ (единица времени 10 сут).

Для вычисления $\varphi(t)$ на основе представления (1.11) находим

$$R(u) = \operatorname{Im} \frac{u_2[\xi(B_1(u), B_0(u))]}{u_2[\xi(E_0, k_0)]}, \quad W(u) = \operatorname{Im} \frac{u_2[\xi(D_1(u), D_0(u))]}{u_2[\xi(E_0, k_0)]} \quad (4.3)$$

где функции $B_n(u)$ и $D_n(u)$ определяются в соответствии с (1.8). При вычислении интегралов в выражении (1.11) использовалась квадратурная формула Гаусса. Число узлов r варьировалось от 4 до 14. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

$r \backslash t$	0.10	0.25	0.75	1.00	3.00	10.0	15.0
4	0.14383	0.07141	0.00574	-0.00817	-0.05672	-0.09137	-0.09759
8	0.13301	0.07049	0.00613	-0.00902	-0.05753	-0.09047	-0.09627
12	0.13200	0.07087	0.00608	-0.00899	-0.05753	-0.09048	-0.09627
14	0.13192	0.07089	0.00609	-0.00899	-0.05753	-0.09048	-0.09627

Как видно, расхождение при $r = 12$ и $r = 14$ не превосходит 0.00008, что дает основание считать верными 4 знака после запятой в последней и предпоследней строках таблицы. Максимальное расхождение при $r = 4$ и $r = 14$ составляет 0.019.

Отметим, что при численном интегрировании обычно используются квадратурные формулы с положительными коэффициентами, поэтому метод, основанный на представлениях (1.6), (1.11) мало чувствителен к точности, с которой заданы значения $R(u)$ и $W(u)$.

2°. Приведем результаты решения рассмотренной задачи методами численного обращения преобразования Лапласа, изложенными в § 2 и § 3.

При решении методом § 2 реологические операторы приняты в виде (4.2) при $\rho = 0$ и $\alpha = -0.375$, то есть свойства пластинки и основания описываются дробно-экспоненциальными функциями.

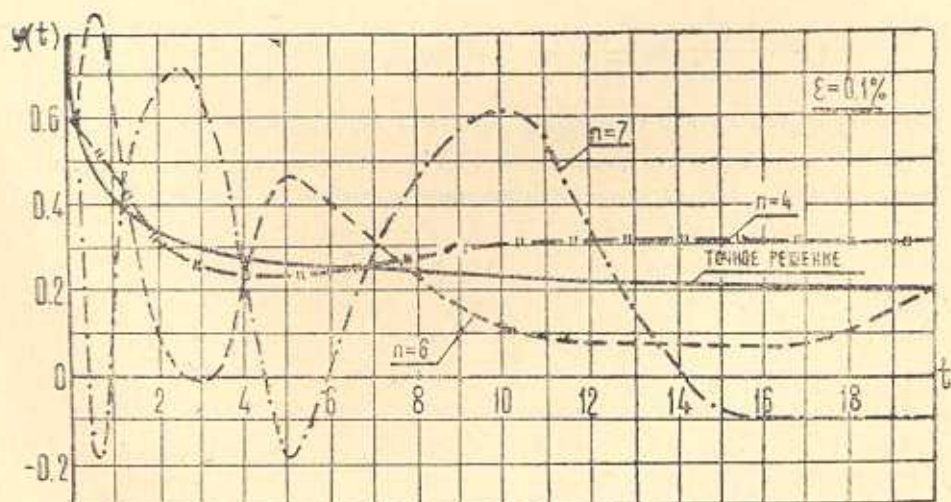
Изображение функции $\Theta(t)$

$$\bar{\Theta}(p) = \frac{u_2 [\bar{\xi}(\bar{E}(p), \bar{k}(p))] - 1}{u_2 [\bar{\xi}(E_0, k_0)]}$$

$$\bar{E}(p) = E_0 [1 - \gamma_1 / (p^2 + \vartheta_1)], \quad \bar{k}(p) = k_0 [1 - \gamma_2 / (p^2 + \vartheta_2)] \quad (4.4)$$

Приближение $\Theta_N(t)$ разыскивалось в виде разложения по четырем функциям $\Theta_n(-\vartheta_n, t)$ с параметрами ϑ_n , равными 0.5, 1, 1.5, 2. При вычислении каждого из интегралов (2.14) применялась квадратурная формула наивысшей алгебраической степени точности [10], использующая 6 узлов. Была исследована чувствительность метода к точности, с которой известно изображение. Для этого на значения функций $\Theta_0(y)$ и $\Theta_0\left(\frac{1}{y}\right)$, которые вычислялись на ЭВМ с точностью 6 значащих цифр, налагалась относительная погрешность $\pm \varepsilon$, различная по знаку для различных узлов. Величина ε варьировалась от 0 до 0.06.

Результаты расчетов приведены на фиг. 2.



Фиг. 2.

Сплошная линия соответствует решению, полученному с точностью 4–5 значащих цифр методом численного интегрирования, изложенным в § 1.

При $\varepsilon = 0$ максимальная погрешность метода численного обращения преобразования Лапласа составила 0.0075. Соответствующая кривая на графике сливается со сплошной линией.

Как видно из графика, даже при очень большой погрешности $\varepsilon = \pm 6\%$ приближение в оригиналах оказалось удовлетворительным, особенно при $t \leq 5$.

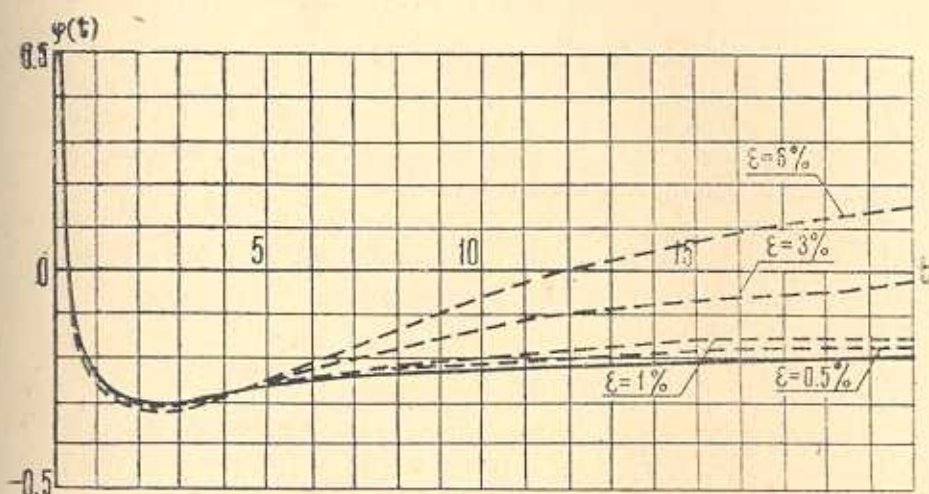
При решении задачи методом, изложенным в § 3, параметр α принят равным -0.7 и $\rho = 0$. Приближение функции $\Theta(t)$ также разыскивалось в виде разложения по четырем дробно-экспоненциальным функциям, но с параметрами $\vartheta_k = \exp(k-1)$. Интегралы (3.3) вычислялись по формуле Гаусса с девятью узлами. Погрешность ε , налагаемая на значения функций $\Theta_0(y)$ и $\Theta_0(1/y)$, варьировалась.

Метод оказался мало чувствительным к величине ε .

При $\varepsilon = 0$ максимальная и средняя абсолютные погрешности приближения функции $\varphi(t)$ равнялись соответственно 0.026 и 0.017. При $\varepsilon = \pm 6\%$ эти погрешности не увеличились.

Устойчивость метода объясняется тем, что процесс интегрирования при определении параметров A_k сглаживает случайные по знаку погрешности, с которыми было задано изображение.

3°. Задача об изгибе пластинки была решена также методом коллокации, предложенным Шепери. Метод Шепери основан на разложении оригинала $\varphi(t)$ по функциям $A_k \exp(-\vartheta_k t)$, причем параметры ϑ_k полагаются заданными, а коэффициенты A_k определяются из системы линейных уравнений, правые части которой представляют собой значения изображения $\bar{\varphi}(\rho)$ в узлах ϑ_k [1].



Фиг. 3.

При вычислениях основание пластинки было принято идеально упругим, параметры ρ и α первого из операторов (4.2) равными 0 и -0.5 .

Число узлов N варьировалось от 4 до 14. При каждом N узлы ϑ_k распределялись в интервале $[\vartheta_{min}, \vartheta_{max}]$ по закону арифметической прогрессии.

сии, геометрической прогрессии или в узлах полинома Чебышева, приведенных к рассматриваемому интервалу. Параметр θ_{min} был принят равным 0.01, а θ_{max} варьировался от 1 до 20.

На значения изображения в узлах налагалась относительная погрешность $\pm \epsilon$.

При $\epsilon = 0$ и $N = 14$ минимальная погрешность, с которой удалось получить приближение $\varphi(t)$, равнялась 3%. При $\epsilon \geq 0.001$ во всех рассмотренных случаях были получены неудовлетворительные результаты.

На фиг. 3 приведены графики $\varphi(t)$, полученные методом, изложенным в § 1, с точностью до четырех верных знаков (сплошная линия) и методом Шепери при различных N .

Как видно, наилучший результат получен при $N = 4$, однако точность его невелика. При увеличении N точность приближения ухудшается.

Таким образом, если для описания свойств материала используются ядра с особенностью, обращение методом Шепери не может быть рекомендовано.

Северо-Западное отделение ВГПИ
и НИИ «Энергосетьпроект»

Поступила 20 III 1978

Ա. Ա. ՉԵՎԻՆ, Ի. Գ. ՊԱԴՎԱ

ՃԱՌԱՆԳԱԿԱՆ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՄՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ
ԸՊՂԸՍԻ ԶԵՎԱՓՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾԱԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Կոտրակա-էքսպոնենցիալ օպերատորների ֆունկցիայի ինտեգրալ ներկայացումը տարածվել է ափսիսի ընդհանուր տեսքի օպերատորների վրա:

Զարգացվել են կապլասի ձևափոխության ինտեգրալ գործածման երկու եղանակներ, որոնք հիմնված են լուծման ըստ կոտրակա-էքսպոնենցիալ ֆունկցիաների ինտեգրալների վերլուծման վրա:

Այդ եղանակները կիրառելի են անիզոտրոպ, կամ կոտր առ կոտր անհամասեռ մարմնի համար ինդիքների լուծման համար, երբ մարմնի հատկությունները նկարագրվում են մի քանի անկախ օպերատորներով:

Բերվում են օրինակներ:

CONVERSION OF LAPLACE TRANSFORMATION IN THE PROBLEMS OF THE HEREDITARY ELASTICITY THEORY

A. A. ZEVIN, I. G. PADWA

S u m m a r y

Integral representation of a fraction-exponential operator function is applied to an operator of a more general type.

A method of numerical conversion of the Laplace transformation based on integral expansion of the solution from fraction — exponential functions is developed.

Both methods may be used to solve problems for an anisotropic or lump-heterogeneous body, whose properties are described by several independent operators. Examples are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М., «Мир», 1974.
2. Кост Т. Приближенное обращение преобразования Лапласа при анализе вязкоупругих напряжений. Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 12.
3. Ильюшин А. А. Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости. Механика полимеров, 1968, № 2.
4. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М., «Высшая школа», 1976.
5. Зевин А. А. О функциях дробно-экспоненциальных операторов в теории наследственной упругости. Прикл. механ., 1969, т. 5, в. 11.
6. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. 12, в. 1.
7. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.—Л., Гостеоретиздат, 1949.
8. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М., «Наука», 1971.
9. Анно А. Математика для электро- и радионженеров. М., «Наука», 1965.
10. Крылов В. И., Шульгина А. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., «Наука», 1966.
11. Яковлев Ю. С. Общий метод обращения интегральных преобразований Фурье, Лапласа, Ханкеля и Стильтеса функций класса L_2 . Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, 1977, № 5.
12. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., ГИФМЛ, 1963.