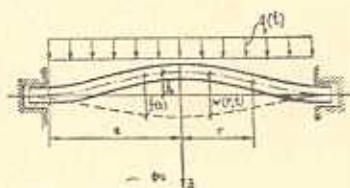


М. А. ЗАДОЯН, Г. Б. ШАХАЗИЗЯН

### О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается вопрос несущей способности круглой шарнирно-закрепленной гибкой плиты с двухсторонними симметричными тонкими усиливающими покрытиями и с начальной погибью, направленной против осесимметрично-распределенной нагрузки  $q(t)$  (фиг. 1). Материал покрытий считается упругим, а для среднего слоя имеют место соотношения наследственной теории ползучести Маслова—Арутюняна [1].



Фиг. 1.

Потеря устойчивости в виде «хлопка» с учетом явления ползучести для металлической арки (балки) рассмотрена в работе [2]. Вопросам устойчивости при ползучести посвящены работы [3—9] и др. Подробная библиография и анализ работ в этой области даны в монографиях Ю. Н. Работнова [3—4] и Н. Хоффа [5].

1. Соотношения между внутренними силами и деформациями срединной поверхности плиты. Если принять гипотезу прямых нормалей

$$\varepsilon_r = e_r + \chi_r z \quad (r, \theta) \quad (1.1)$$

где  $e_r, e_\theta$  — деформации, а  $\chi_r, \chi_\theta$  — кривизны срединной поверхности плиты, напряжения в крайних слоях плиты определяются формулой

$$\sigma_{r_i} = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} [e_r + \nu_1 e_\theta \pm (\chi_r + \nu_1 \chi_\theta) h] \quad (r, \theta) \quad (1.2)$$

В бетонном слое имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{E}{1-\nu^2} [e_r + \nu e_\theta + (\chi_r + \nu \chi_\theta) z] + \\ & + \int_{\tau_1}^t \frac{E}{1-\nu^2} [e_r + \nu e_\theta + (\chi_r + \nu \chi_\theta) z] R(t, \tau) d\tau \quad (r, \theta) \quad (1.3) \end{aligned}$$

где  $R(t, \tau)$  — резольвента ядра ползучести

$$K(t, \tau) = -E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + \varphi(\tau) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \right] \quad (1.4)$$

и имеет вид

$$R(t, \tau) = \frac{E'(\tau)}{E(\tau)} + \gamma \varphi(\tau) E(\tau) - \frac{D(\tau)}{E(\tau)} \int_{\tau}^t E(\xi) e^{-\int_{\tau}^{\xi} \gamma(\zeta) d\zeta} d\xi$$

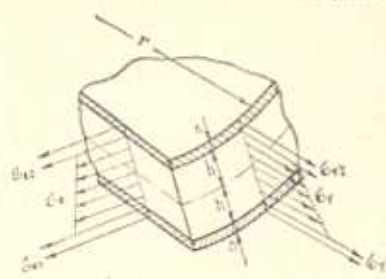
$$\gamma(\tau) = \gamma [1 + \varphi(\tau) E(\tau)], \quad D(\tau) = \gamma^2(\tau) + \gamma'(\tau) - \gamma \gamma(\tau) \quad (1.5)$$

Для старого бетона  $\varphi(\tau) = C$ ,  $E(\tau) = E$  и будем иметь

$$R(t, \tau) = \lambda e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad \lambda = \gamma EC \quad (1.6)$$

Для простоты толщину покрытия  $\Delta$  по отношению к толщине бетонного слоя считаем малой и напряжение в нем по высоте принимаем постоянным.

Из условий статики (фиг. 2) имеем



$$N_r = (z_{r_1} + z_{r_2}) \Delta + \int_{-h}^h \sigma_r dz$$

$$M_r = (z_{r_1} - z_{r_2}) \Delta h + \int_{-h}^h z_r z dz \quad (r, \theta) \quad (1.7)$$

Фиг. 2.

Используя выражения напряжений в слоях (1.2)–(1.3), из (1.7) получаем

$$N_r = A_0(e_r + \nu e_\theta) - \int_{\tau_1}^t B_0(e_r + \nu e_\theta) R(t, \tau) d\tau$$

$$M_r = A_1(x_r + \nu x_\theta) - \int_{\tau_1}^t B_1(x_r + \nu x_\theta) R(t, \tau) d\tau \quad (r, \theta) \quad (1.8)$$

где введены обозначения

$$A_0(t) = B_0(t) \nu_0(t), \quad B_0(t) = \frac{2E(t)h}{1-\nu^2}, \quad \nu_0 = 1 + \frac{1-\nu^2}{1-\nu_1^2} \frac{E_1 \Delta}{E(t)h}$$

$$A_1(t) = B_1(t) \nu_1(t), \quad B_1(t) = \frac{2E(t)h^2}{3(1-\nu^2)}, \quad \nu_1 = 1 + 3 \frac{1-\nu^2}{1-\nu_1^2} \frac{E_1 \Delta}{E(t)h} \quad (1.9)$$

Между компонентами перемещения и деформациями срединной поверхности плиты имеются зависимости

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w_\theta}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial \tau_1 \theta}{\partial r} \right)^2 \right], \quad e_\theta = \frac{u}{r}$$

$$x_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad x_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1.10)$$

Здесь  $w_0(r)$  — начальная заданная погибь,  $w(r, t)$  — прогиб от воздействия внешних сил, а  $w_* = w_0 + w$ .

Краевые условия плиты будут

$$\begin{aligned} N_r = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = a \\ \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

В дальнейшем для упрощения принимаем, что коэффициенты Пуассона для бетона и усиливающих слоев равны  $\nu_1 = \nu$ .

2. *Вариационное уравнение задачи.* Согласно принципу возможных перемещений имеем

$$\int_0^a (N_r \delta e_r + N_\theta \delta e_\theta + M_r \delta \chi_r + M_\theta \delta \chi_\theta) r dr - \int_0^a q_1 \delta w r dr = 0 \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) эквивалентно дифференциальному уравнению равновесия нормальных сил

$$\frac{\partial}{\partial r} (r N_r) - N_\theta = 0 \quad (2.2)$$

и вариационному уравнению

$$\int_0^a \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r M_r) - \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r N_r \frac{\partial w_*}{\partial r} \right) + q_1 r \right] \delta w dr = 0 \quad (2.3)$$

Вводя функцию напряжений  $\Phi(r, t)$ ,

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad N_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad (2.4)$$

из (1.8) и (1.10) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \Phi) = -\frac{1-\nu^2}{2r} \left\{ A_0 \left[ \left( \frac{\partial w_*}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \int_{z_1}^z B_0 \left[ \left( \frac{\partial w_*}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \right] R(t, z) dz \right\} \quad (2.5) \end{aligned}$$

Подставляя выражения  $M_r$  и  $M_\theta$  из (1.8) в (2.3) и преобразуя с учетом краевых условий (1.11), получим

$$\int_0^a \left\{ A_1 \nabla^2 \nabla^2 w - \int_{z_1}^z B_1 \nabla^2 \nabla^2 w R(t, z) dz - q_1 - \right.$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial w_{,r}}{\partial r} \right) \delta w r dr = 0 \quad (2.6)$$

Положим

$$w_0 = -f_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2, \quad w = f(t) \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 \quad (2.7)$$

где  $f_0$  — заданная начальная погибь в середине плиты, а  $f(t)$  — неизвестный, изменяющийся во времени прогиб в середине плиты.

Подставляя (2.7) в (2.5) и производя необходимые выкладки с учетом краевых условий, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1-\nu^2}{6r} \left[ A_0(f^2 - 2f_0 f) - \int_{z_1}^z B_0(f^2 - 2f_0 f) R(t, z) dz \right] F(r) \quad (2.8)$$

где

$$F(r) = 3 \frac{r^2}{a^2} - 6 \frac{r^4}{a^4} + 4 \frac{r^6}{a^6} - \frac{r^8}{a^8}$$

Далее, внося (2.7) и (2.8) в (2.6), интегрируя и вводя обозначения

$$\omega(t) = f(t)/f_0, \quad q(t) = q_1(t)/E, \quad \xi = f_0/2h \quad (2.9)$$

получим нелинейное интегральное соотношение для определения  $\omega$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \omega + \alpha_2 (\omega^2 - 3\omega + 2) &= q + \beta_1 \int_{z_1}^z \omega R(t, z) dz + \\ &+ \beta_2 (\omega - 1) \int_{z_1}^z (\omega^2 - 2\omega) R(t, z) dz \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \beta_1 \nu_1(t), \quad \alpha_2(t) = \beta_2 \nu_0(t) \\ \beta_1 &= \frac{16\xi}{3(1-\nu^2)} \left( \frac{2h}{a} \right)^4, \quad \beta_2 = \frac{6\pi}{7} \xi^3 \left( \frac{2h}{a} \right)^4 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Полученное уравнение (2.10) сводится к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\begin{aligned} \alpha_1 \omega + (\omega - 1) \psi &= q + \beta_1 \int_{z_1}^z \omega R(t, z) dz \\ \alpha_2 (\omega^2 - 2\omega) &= \psi + \beta_2 \int_{z_1}^z (\omega^2 - 2\omega) R(t, z) dz \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\psi(t)$  наряду с  $\omega(t)$  определяют характер движения плиты во времени вследствие ползучести бетона.

3. Критическое время плиты. За критерий потери несущей способности принимаем условие безграничного возрастания скорости прогиба ( $\dot{\omega} \rightarrow \infty$ ). Соответствующий момент времени  $t = T$  при данной нагрузке  $q$  называется критическим временем конструкций.

Принимая для простоты  $q(r, t) = q = \text{const}$  и рассматривая случай старого бетона (1.6), из (2.10) дифференцированием по  $t$  получим

$$\left[ \alpha_1 + \alpha_2(3\omega^2 - 6\omega + 2) + \lambda \frac{\xi^2}{\tau_1} \int_{\tau_1}^t (\omega^2 - 2\omega) e^{-\eta(t-\tau)} dt \right] \frac{v}{\eta} =$$

$$= q - A\omega - B(\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega) \quad (3.1)$$

где  $v = \dot{\omega}$ ,

$$A = \frac{16\xi}{3(1-\nu^2)} \left( \mu_1 - \frac{\lambda}{\eta} \right), \quad B = \frac{6}{7} \xi^2 \left( \mu_3 - \frac{\lambda}{\eta} \right) \quad (3.2)$$

Обозначая начальные значения  $\omega$  и  $v$  при  $t = \tau_1$  через  $\omega_0$  и  $v_0$ , из (2.10) и (3.1) находим

$$\alpha_1 \omega_0 + \alpha_2 (\omega_0^3 - 3\omega_0^2 + 2\omega_0) = q$$

$$v_0 = \eta \frac{q - A\omega_0 - B(\omega_0^3 - 3\omega_0^2 + 2\omega_0)}{\alpha_1 + \alpha_2(3\omega_0^2 - 6\omega_0 + 2)} \quad (3.3)$$

Определим значение  $q = q_0$ , при котором потеря несущей способности («хлопок») происходит в начальный момент  $T = \tau_1$ . Приравняв нулю знаменатель  $v_0$  из (3.3), получим соответствующее значение относительного прогиба

$$\omega_{00} = 1 \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\xi_0^2}{\xi^2}} \quad (3.4)$$

где

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{56}}{3} \sqrt{\frac{\mu_1}{(1-\nu^2)\rho_0}} \quad (3.5)$$

Из формул (3.4) следует, что для явления «хлопка» необходимо, чтобы параметр удовлетворял условию  $\xi > \xi_0$ . Подставляя значение  $\omega_{00}$  из (3.4) в первое уравнение (3.3), находим значение  $q_0$ , при котором в начальный момент  $t = \tau_1$  происходит хлопок

$$q_0 = \alpha_1 \omega_{00} + \alpha_2 (\omega_{00}^3 - 3\omega_{00}^2 + 2\omega_{00}) \quad (3.6)$$

Индексом (\*) обозначим величины, соответствующие значению  $t \rightarrow \infty$ . Применяя правило Лопиталья, из (2.10) и (3.1) находим

$$A\omega_* + B(\omega_*^3 - 3\omega_*^2 + 2\omega_*) = q$$

$$v_* = \frac{q - A\omega_* - B(\omega_*^3 - 3\omega_*^2 + 2\omega_*)}{\alpha_1 + \alpha_2(3\omega_*^2 - 6\omega_* + 2) - \beta \frac{\lambda}{\gamma} (\omega_* - 2\omega_*)} \quad (3.7)$$

Приравнивая нулю знаменатель  $v_*$ , находим значение  $\omega_{*0}$ , при котором возможен хлопок ( $t \rightarrow \infty$ )

$$\omega_{*0} = 1 \mp \frac{\xi_0}{\xi} \sqrt{\frac{\xi^2 - \xi_0^2}{2\xi_0^2 + \xi_0^2}} \quad (3.8)$$

где

$$\xi_* = \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\gamma}}} \quad (3.9)$$

Очевидно, для возможности хлопка при  $t \rightarrow \infty$  необходимо условие  $\xi > \xi_*$ . Подставляя значение  $\omega_*$  из (3.8) в выражение  $q$  из (3.7), находим значение  $q_*$ , при котором хлопок «происходит» в бесконечности ( $t \rightarrow \infty$ ):

$$q_* = A\omega_{*0} + B(\omega_{*0}^3 - 3\omega_{*0}^2 + 2\omega_{*0}) \quad (3.10)$$

При  $q < q_*$ , как видно из формулы (3.7), скорость прогиба плиты в течение времени затухает ( $v \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ).

Значение  $q$ , определяемое по формуле (3.10), будет верхним значением «безопасной» нагрузки в смысле исчерпания несущей способности плиты. Для значения, находящегося между  $q_0$  и  $q_*$ , существует критическое время, когда происходит потеря несущей способности в виде «хлопка».

Исключая интеграл из (2.10) и (3.1), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= v \\ \dot{v} &= \gamma v + m(\omega) v^2 + n(\omega) v^3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

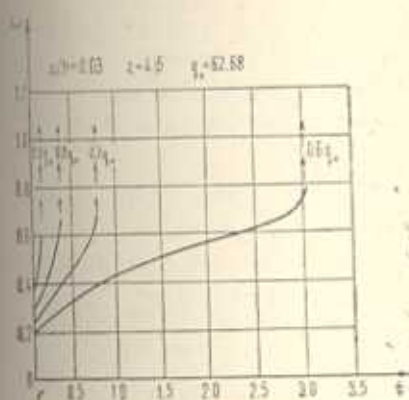
Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} m(\omega) &= [S_1\omega(2-\omega) - S_2][q - A\omega - B(\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega)]^{-1} \\ n(\omega) &= S_0(1-\omega)[q - A\omega - B(\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

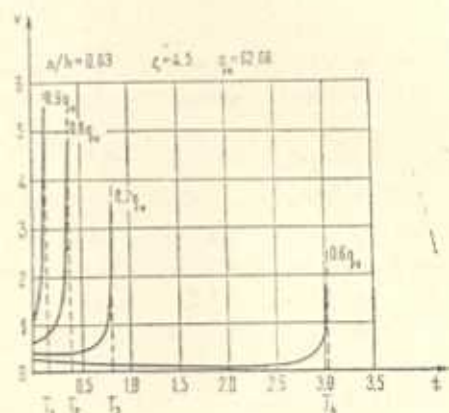
$$S_0 = \frac{36}{7} \frac{\mu}{\gamma} \xi^3, \quad S_1 = \frac{12}{7} \left( 3\mu_0 - 2 \frac{\lambda}{\gamma} \right) \xi^3$$

$$S_2 = \frac{16\xi}{3(1-\nu^2)} \left( 2\mu_1 - \frac{\lambda}{\gamma} \right) + \frac{12}{7} \left( 2\mu_0 - \frac{\lambda}{\gamma} \right) \xi^3 \quad (3.13)$$

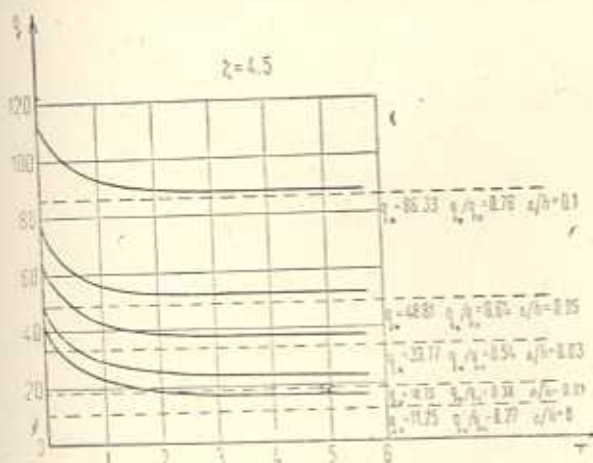
На основании численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (3.11) с начальными условиями (3.3) при значениях параметров  $E_1 = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $E = 2 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>,  $C = 0.9 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/кг,  $\nu = 0.3$ ,  $\tau = 0.026$  1/день,  $\Delta/h = 0.03$ ,  $\xi_0 = 4.5$ , произведенного на ЭВМ «Наири-2», построены графики  $w(t)$  и  $v(t)$  от момента  $\tau_1$  до  $T$  (фиг. 3, 4). На



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

фиг. 5 построен график зависимости  $q$  от  $T$  для различных значений  $\Delta/h$ . Из графиков заключаем, что с увеличением толщины усиливающего слоя  $\Delta$  увеличиваются  $q_0$ ,  $q_n$  и  $q_n/q_0$ .

## ԵՌԱՇԵՐՏ ԿՈՐ ՍԱԼԻ ԿՐՈՂՈՒՆԱԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՍՈՂՔԻ ԳԵՊԲՈՒՄ

## Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է լայնական բախշված բեռին հակառակ ուղղված սկզբնական ճկվածքով եռաշերտ կլոր սալի կայունության խնդիրը:

Արտաքին շերտերի նյութը ընդունվում է առաձգական, իսկ միջին շերտի համար հաշվի է առնվում սողքը ըստ Մասլով-Հարությունյանի ժառանգական տեսության:

Օգտվելով Լագրանժի վարիացիոն հավասարումից, ներմուծելով լարումների  $\Phi(r, t)$  ֆունկցիան, խնդրի լուծումը բերվում է վոլտերի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի, որից ստացվում է փոփոխական զործակիցներով դիֆֆերենցիալ հավասարումների սիստեմ:

Թվային ինտեգրման միջոցով կառուցված են  $\omega(t)$ ,  $\nu(t)$  և  $q(T)$  ֆունկցիաների գրաֆիկները տարբեր ղեպքերի համար:

Ակնթարթային ( $t = \tau_1$ ) և երկարատև ( $t \rightarrow \infty$ ) կայունության ղեպքերում, հավասարաշափ բախշված հաստատուն բեռի ( $q_*$ ) և կրիտիկական ինտենսիվության որոշման համար ստացված են անայլտիկ արտահայտություններ:

## ON SUPPORTING POWER OF A ROUND THREE-SHEET PLATE UNDER CREEP

M. A. ZADOYAN, H. B. SHAHAZIZIAN

## S u m m a r y

The problem on stability of a round three-sheet plate with initial deflection opposite to a transverse load is discussed.

The material of outer sheets is thought to be elastic and for the medium sheet the creep is considered in terms of the Maslov-Arutunian theory.

By using Lagrange's variational equation and introducing the tension function  $\Phi(r, t)$ , the problem is reduced to a system of nonlinear integral equations of the Volter type. From this a system of differential equations is obtained with variable ratios depending on a relative deflection.

By numerical integration the diagrams  $\omega(t)$ ,  $\nu(t)$  and  $q(T)$  are constructed for various cases.

On determining the critical intensity  $q_*$  and  $q_*$  of continuous load the analytic expressions are obtained with instant ( $t = \tau_1$ ) and continuous stability ( $t \rightarrow \infty$ ).



## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., ГИТТЛ, 1952.
2. Ryan T. H. H. Creep buckling of curved beam under lateral loading. Proc. 3-rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., N. Y., 1958.
3. Реботнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. М., «Наука», 1966.
4. Реботнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
5. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. М., ИЛ, 1955.
6. Бунятян А. А. Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, 1953, т. 6, № 2.
7. Реботнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
8. Ржанецкий А. Р. Устойчивость при ползучести. Пробл. устойч. в строит. мех. Тр. Всесоюз. конф. по пробл. устойч. М., изд. «Строительство», 1965.
9. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1963.
10. Зедоки М. А. Смешанное вариационное уравнение нелинейно-ползучего тела и задача выпучивания призматического стержня. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1968, т. 21, № 2.
11. Зедоки М. А. Применение вариационных методов теории ползучести при расчете железобетонных элементов. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, 1975, т. 28, № 3.