ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 6, 1978 Механика

Л. А. ШЕКЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ШЕРОХОВАТЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ*

Работа посвящена решению осесимметричной контактной задачи теории ползучести с учетом старения материала и поверхностной структуры контактирующих тел.

Плоская контактная задача нелинейной теории ползучести впервые была рассмотрена Н. Х. Арутюняном [1]. Затем, на основе идей работы [1] при аналогичных предположениях о свойствах материала рассмотрена пространственная контактная задача о вдавливании эллиптического, в частности, круглого в плане штампа в полупространство [2]. В указанных работах, в частности, предполагается, что поверхности контактирующих тел абсолютно гладкие. При исследовании контакта реальных поверхностей, имеющих шероховатость, это условие, очевидно, не выполняется. Несмотря на исключительно малые размеры неровностей, составляющих шероховатость, они оказывают существенное влияние на самые разнообразные эксплуатационные свойства деталей. Поверхности контактирующих тел в результате технологической обработки имеют весьма разнообразные формы, зависящие как от способа обработки, так и от физико-механических свойств материала. Поэтому при исследовании контакта реальных поверхностей встречается ряд трудностей, не позволяющих получить точное решение соответствующей контактной задачи.

Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел впервые была рассмотрена в монографии И. Я. Штаермана [3], где шероховатость учтена согласно гипотезе о пропорциональности в каждой точке контактной зоны дополнительных локальных перемещений и нормальных контактных давлений. При этом предположении решение задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром. Решая это уравнение другим методом и проводя эксперименты на оптически активных материалах, автор работы [4] отмечает, что эксперименты подтверждают теоретические выводы. В этой постановке затем были рассмотрены пространственные контактные задачи [5].

С другой стороны, многие экспериментальные исследования [6—9] показывают, что для многих деталей дополнительные локальные перемещения, которые обусловлены шероховатостью поверхностей соприкасающихся тел, в каждой точке контактной зоны пропорциональны некоторой степени контактных давлений. Такая степенная зависимость между сближением

* Работа доложена на Всесоюзной конференции «Смешанные задачи механики деформируемого тела» в г. Ростове-на-Дону в сентябре 1977 г.

и давлением получается и в теоретических вычислениях [7—12], где шероховатости поверхностей моделируются набором конусов, пирамид, сфер и т. д., а деформации контакта принимаются упругими, пластическими или пластическими с упрочнением. Далее, рассматривая вероятность встречи выступов, в работе [12] изучено влияние обработки поверхностей на эту зависимость. Некоторые контактные задачи для шероховатых упругих тел при степенной зависимости между дополнительным перемещением и контактным давлением рассмотрены в работах [13—15]. При таком учете шероховатости поверхностей контактирующих тел в работе [16] решена плоская контактная задача для шероховатых твердых тел со степенным упрочнением материала.

В настоящей работе рассматривается осесимметричная контактная задача нелинейной теории неустановившейся ползучести с учетом шероховатости контактирующих тел. При этом шероховатость поверхностей контактирующих тел учитывается также по степенному закону. Задача математически формулируется в виде нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна. С помощью аппарата классических ортогональных многочленов Гегенбауэра решение этого уравнения сводится к решению бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений, исследование которой проводится на основе принципа сжимающих отображений. Получены численные результаты для контактных давлений и взаимного сближения тел.

§ 1. *Постановка задачи и вывод разрешающего интегрального уравнения.*

Предположим, что ползучесть материала описывается реологическим уравнением [1, 17]

$$AT^{\mu-1}(t)\,\varepsilon_{ij}(t) = (I-L)\,\sigma'_{ij}(t) \tag{1.1}$$

где A — физическая константа материала, μ — показатель ползучести, $T(t)$ — интенсивность деформации сдвига, $\varepsilon_{ij}(t)$ — компоненты деформации, $\sigma'_{ij}(t)$ — девиатор напряжений, L — интегральный оператор Вольтерра

$$Ly(t) = \int_{\tau_1}^{t} y(\tau)\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau, \qquad C(t,\tau) = \varphi(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right] \tag{1.2}$$

I — единичный оператор, а t — время.

С учетом всех основных предположений о свойствах материала [1] для вертикальных перемещений граничных точек абсолютно гладкого полупространства от нормального давления $p(x, y, t)$ имеем [2]

$$w_1(x, y, t) = \frac{c(\mu)}{A^m}\left\{(I-L)\iint\limits_{\Omega(t)}\frac{p(u, v, t)\,du\,dv}{\left[(x-u)^2+(y-v)^2\right]^{1-\mu/2}}\right\}^m \tag{1.3}$$

$$m = \frac{1}{\mu}$$

Здесь $\Omega(t)$ — область контакта, $c(\mu)$ — коэффициент, зависящий только от μ, причем из результатов работ [2, 18] имеем $c(1)=1/4\pi$, $c(2/3)=0$, $c(\mu)>0$ при $2/3<\mu\leqslant 1$, $c(\mu)<0$ при $0<\mu<2/3$. На основе этого примем, что для реальных тел $2/3<\mu\leqslant 1$.

Далее, вследствие шероховатости поверхностей контактирующих тел в зоне контакта возникают дополнительные перемещения, которые, исходя из ряда экспериментальных и теоретических исследований [6—12], в каждой точке контактной зоны и в каждый момент времени примем пропорциональными некоторой степени нормального давления

$$w_2(x, y, t) = K[p(x, y, t)]^{\alpha} \tag{1.4}$$

Здесь K и α определяются экспериментально, притом [9, 11, 12] число α обычно лежит в пределах $0.3<\alpha\leqslant 1$, а коэффициент K — в пределах от 4 до 129 *мк*, когда $p(x, y, t)$ измеряется в *кг/мм*^{2}. Формула (1.4) справедлива в диапазоне 0.01—1.0 *кг/мм*^{2} для $p(x, y, t)$. Отметим также, что с увеличением чистоты обработки поверхностей контактирующих тел числа α и K уменьшаются.

Условие контакта приводит к разрешающему уравнению

$$c(\mu)[A_1^{-m}+A_2^{-m}]\left\{(I-L)\iint\limits_{\Omega(t)}\frac{p(u, v, t)\,du\,dv}{[(x-u)^2+(y-v)^2]^{1-\mu/2}}\right\}^m+$$

$$+K[p(x, y, t)]^{\alpha}=\delta(t)-f_1(x, y)-f_2(x, y) \tag{1.5}$$

где A_1 и A_2 — физические константы, $\delta(t)$ — мера взаимного сближения тел, $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — функции, описывающие поверхности контактирующих тел.

Поскольку рассматривается осесимметричная задача, можно положить

$$f_1(x, y)+f_2(x, y)=f(r),\quad p(x, y, t)=p(r, t),\quad \left(r=\sqrt{x^2+y^2}\right) \tag{1.6}$$

Тогда уравнение (1.5) примет вид

$$[p_0(\xi, t)]^{\alpha}+\left\{(I-L)\,a_0^{\alpha}(t)\int\limits_0^1 K(\xi, \eta)\,p_0(\eta, t)\,\eta\,d\eta\right\}^m=\delta_0(t)-f_0(\xi, t) \tag{1.7}$$

Здесь

$$K(\xi, \eta)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\cos\varphi)^{\omega-1}\,d\varphi,\qquad \xi=\frac{r}{a(t)},\qquad \omega=\frac{\mu}{2} \tag{1.8}$$

$$p_0(\xi, t)=[A_1^{-m}+A_2^{-m}]^{\nu}p(r, t),\quad a_0(t)=\frac{c(\mu)\,a(t)}{K}[A_1^{-m}+A_2^{-m}]^{\nu_1} \tag{1.9}$$

$$\delta_0(t)=\delta(t)\,K^{-1}[A_1^{-m}+A_2^{-m}]^{\nu_2},\ f_0(\xi, t)=f(r)\,K^{-1}[A_1^{-m}+A_2^{-m}]^{\nu_2} \tag{1.10}$$

$a(t)$ — радиус круговой зоны контакта.

Далее, условие равновесия дает

$$2a_0^{\nu}(t)\int_0^1 p_0(\xi, t)\,\xi d\xi = P_0(t) \tag{1.11}$$

где

$$P_0(t) = \frac{c^2(\beta)}{\pi K^2}\left[A_1^{-m} + A_2^{-m}\right]^{\mu(1+2\alpha)} P(t) \tag{1.12}$$

$P(t)$ — равнодействующая внешних сил.

Теперь, введя обозначение

$$q(\xi, t) = \{\delta_0(t) - f_0(\xi, t) - p_0^{\alpha}(\xi, t)\}^{\mu}, \quad \beta = \frac{1}{\alpha} \tag{1.13}$$

из (1.11) и (1.7) получим

$$2a_0^{\nu}(t)\int_0^1 [\delta_0(t) - f_0(\xi, t) - q^m(\xi, t)]^{\beta}\xi d\xi = P_0(t) \tag{1.14}$$

$$q(\xi, t) = (I - L)\,a_0^{\nu}(t)\int_0^1 K(\xi, \eta)\,[\delta_0(t) - f_0(\eta, t) - q^m(\eta, t)]^{\beta}\eta d\eta \tag{1.15}$$

Таким образом, решение задачи, когда $a(t)$ наперед задано, приводится к определению $q(\xi, t)$ и $\delta_0(t)$ из нелинейного интегрального уравнения (1.15) и из условия (1.14). А если $a(t)$ неизвестно, то, кроме (1.14) и (1.15), имеем еще условие непрерывности нормальных контактных давлений

$$p(a(t), t) = 0 \text{ или } \delta_0(t) = f_0(1, t) + q^m(1, t) \tag{1.16}$$

Отметим также, что когда $a(t)$ задана и не зависит от t, то вместо (1.15) будем иметь

$$q(\xi, t) = a_0^{\nu}(I - L)\int_0^1 K(\xi, \eta)\,[\delta_0(t) - f_0(\eta) - q^m(\eta, t)]^{\beta}\eta d\eta \tag{1.17}$$

На основе формул 6.561(14) и 6.684(1) из [19] ядро $K(\xi, \eta)$ представим в виде

$$K(\xi, \eta) = \frac{\pi\Gamma(\omega)}{2^{-\mu}\Gamma(1-\omega)}\int_0^{\infty} x^{1-\mu} J_0(\xi x)\, J_0(\eta x)\, dx \tag{1.18}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера и $J_0(z)$ — функция Бесселя.

С помощью формул 8.451(1) и 3.761(4, 9) из [19] получим

$$\eta K(\xi, \eta) = \frac{2^{\mu} \pi \Gamma(1-\mu)}{\Gamma^{2}(1-\omega)} \frac{1}{|\xi-\eta|^{1-\mu}} + R(\xi, \eta) \tag{1.19}$$

где $R(\xi, \eta)$ — функция, выражающаяся формулой

$$R(\xi, \eta) = \frac{\eta \pi \Gamma(\omega)}{2^{-\mu} \Gamma(1-\omega)} \int_{0}^{\infty} x^{1-\mu} J_{0}(\xi x) J_{0}(\eta x)\, dx - \frac{2^{\mu} \pi \Gamma(1-\omega)}{\Gamma^{2}(1-\omega) |\xi-\eta|^{1-\mu}} \tag{1.20}$$

и регулярная при $0 < \xi, \eta \leqslant 1$. При $\xi = \eta = 0$ эта функция имеет особенность вида

$$R(\xi, \eta) = 0\left[(\xi + \eta)^{\mu-1}\right] \quad \text{при} \quad \xi + \eta \to 0$$

Для решения интегрального уравнения (1.17) будем пользоваться спектральным соотношением* [20]

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{|\xi-\eta|^{1-\mu}} (\eta-\eta^{2})^{-\omega} \varphi_{n}(\eta)\, d\eta = \frac{1}{\lambda_{n}} \varphi_{n}(\xi), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.21}$$

где

$$\lambda_{n} = \frac{\Gamma(n) \Gamma(1-\mu) \sin \pi\omega}{\pi \Gamma(n-\mu)}$$

$$\varphi_{n}(\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right) \sqrt{(2n-1-\mu) \Gamma(n)}}{2^{\mu} \sqrt{\pi \Gamma(n-\mu)}} C_{n-1}^{\frac{1-\mu}{2}}(2\xi - 1)$$

$C_{n}^{\nu}(z)$ — многочлены Гегенбауэра.

§ 2. *Сведение разрешающего интегрального уравнения к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений и ее исследование.*

Ограничимся рассмотрением частного случая, когда $a_{0}(t) = a_{0} = \text{const}$. Тогда, обозначая

$$x_{0} = z_{0} \delta_{0} - 1, \quad \text{где} \quad z_{0} = a_{0}^{2\varkappa} P_{0}^{-\varkappa}(t) \tag{2.1}$$

и представляя решение интегрального уравнения (1.17) в виде ряда

* Здесь фактически применен способ сведения осесимметричной задачи к плоской задаче. Конечно, можно было бы непосредственно исходить из осесимметричной задачи, соответствующей ядру (1.18), и для этого ядра использовать известное спектральное соотношение из работы [20], где фигурируют многочлены Якоби. Однако, при таком способе решения задачи, который и был использован нами сначала, исследование полученной нелинейной бесконечной системы связано с определенными своеобразными трудностями. Поэтому применение метода ортогональных многочленов Якоби в разбираемой задаче представляет самостоятельный интерес и будет дано в дальнейшем.

$$q(\xi, t) = h^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) \lambda_n^{-1} \varphi_n(\xi), \qquad h^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} \varphi_n^2(0) \tag{2.2}$$

из (1.14) и (1.17) известным способом получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно $\{x_n(t) = x_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$x_0 = \frac{1 + x_0}{z_0} \left[2 \int_0^1 F(\xi, X) \xi d\xi \right]^{-s} - 1, \quad X = (x_0, x_1, \dots)$$

$$x_n = (I - L) \int_0^1 F(\eta, X) \left\{ \theta \varphi_n(\eta) - \frac{\lambda_n}{h a_0^{-\rho}} \int_0^1 R(\xi, \eta) (\xi - \xi^2)^{-\mu} \varphi_n(\xi) d\xi \right\} d\eta \tag{2.3}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

где

$$F(\xi, X) = \left\{ \frac{1 + x_0}{z_0} - f_0(\xi) - \left[h^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\lambda_n} \varphi_n(\xi) \right]^m \right\}^s$$

$$\theta = \frac{2^\mu \pi \Gamma(1 - \mu)}{\Gamma^2(1 - \omega) h a_0^{-\rho}} \tag{2.4}$$

Теперь перейдем к исследованию бесконечной системы (2.3), которое проводится на основе принципа неподвижной точки Банаха. С этой целью, как в [16], введем в рассмотрение $(N + 1)$-мерное вещественное эвклидово пространство E_{N+1}, метрика в котором дается формулой

$$\rho(X_N, Y_N) = \max_{\tau_0 < \tau < t} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} [x_n(\tau) - y_n(\tau)]^2}$$

$$X_N = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_N(t)], \quad Y_N = [y_0(t), y_1(t), \dots, y_N(t)] \tag{2.5}$$

Пусть $S(O, R)$ — замкнутый шар в E_{N+1} с центром $O = (0, 0, \dots$ $\dots, 0)$ и радиусом R. Рассмотрим в $S(O, R)$ оператор $Y_N = A(X_N)$, определяемый формулами

$$y_0 = \frac{1 + |x_0|}{z_0} \left[2 \int_0^1 \Phi(\xi, X_N) \xi d\xi \right]^{-s} - 1 \tag{2.6}$$

$$y_n = (I - L) \int_0^1 \Phi(\eta, X_N) \left\{ \theta \varphi_n(\eta) - \frac{\lambda_n}{h a_0^{-\rho}} \int_0^1 R(\xi, \eta) (\xi - \xi^2)^{-\mu} \varphi_n(\xi) d\xi \right\} d\eta$$

$$n = 1, 2, \dots, N \tag{2.7}$$

где

$$\Phi(\xi, X_N) = \left| \frac{1 + |x_0|}{z_0} - f_0(\xi) - \left| h^{-1} \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{\lambda_n} \varphi_n(\xi) \right|^m \right|^\beta \tag{2.8}$$

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского для сумм и учитывая (2.2), получим

$$\left| h^{-1} \sum_{n=1}^{N} x_n(\tau) \lambda_n^{-1} \varphi_n(\xi) \right| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{N} x_n^2(\tau)} \sqrt{h^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} \varphi_n^2(0)} \leqslant R \tag{2.9}$$

$$(\tau_0 \leqslant \tau \leqslant t)$$

С помощью элементарного неравенства

$$\left| |A|^\alpha - |B|^\alpha \right| \leqslant |\alpha| \, |A - B| \max\left(|A|^{\alpha-1}, |B|^{\alpha-1}\right) \tag{2.10}$$

из (2.6), (2.8) и (2.9) получим, что если

$$P_0(t) > a_0^2 (f_* + R^m)^\beta, \text{ где } f_* = \max_{0 < \xi < 1} f(\xi) \geqslant 0 \tag{2.11}$$

то

$$\begin{gathered} (z_0^{-1} - f_* - R^m)^\beta \leqslant \Phi(\xi, X_N) \leqslant (1 + R)^\beta z_0^{-\beta} \\ 0 \leqslant y_0 \leqslant \frac{z_1}{1 - z_1}, \text{ где } z_1 = z_0 [f_* + R^m]^\beta < 1 \end{gathered} \tag{2.12}$$

Далее, из (2.7), на основе неравенства Бесселя, найдем

$$\sum_{n=1}^{N} y_n^2 \leqslant 2\delta^2 \int_0^1 [(I - L)\Phi(\xi, X_N)]^2 (\xi - \xi^2)^\mu \, d\xi + \frac{2a_0^{2\mu}}{h^2} \sum_{n=1}^{N} A_n^2(t) \tag{2.13}$$

где

$$A_n(t) = \lambda_n (I - L) \int_0^1 \Phi(\eta, X_N) \, d\eta \int_0^1 R(\xi, \eta) (\xi - \xi^2)^{-\mu} \varphi_n(\xi) \, d\xi \tag{2.14}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Теперь, учитывая значение интеграла [19] (для $n = 2, 3, \ldots$)

$$2 \int_0^\xi (\eta - \eta^2)^{-\mu} \varphi_n(\eta) \, d\eta =$$

$$= \frac{(\xi - \xi^2)^{-\mu}}{n - 1} \left[\sqrt{\frac{n(2n - 1 - \mu)}{(n - \mu)(2n + 1 - \mu)}} \varphi_{n+1}(\xi) + (1 - 2\xi) \varphi_n(\xi) \right] \tag{2.15}$$

и беря внутренний интеграл в (2.14) по частям, получим

$$A_n(t)=\frac{\lambda_n}{n-1}(I-L)\int\limits_0^1\Phi(\eta,X_N)\,d\eta\times$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{\partial R(\xi,\eta)}{\partial\xi}(\xi-\xi^2)^{-m}\left[b_n\varphi_{n+1}(\xi)+(1-2\xi)\varphi_n(\xi)\right]d\xi \tag{2.16}$$

где $b_n=[n(2n-1-\mu)]^{1/2}[(n-\mu)(2n+1-\mu)]^{-1/2}$.

Далее, из (2.16) следует, что

$$A_n^2(t)\leqslant 2c_0^2\left\{\int\limits_0^1\left[(I-L)\Phi(\eta,X_N)\frac{\partial R(\xi,\eta)}{\partial\xi}d\eta\right](\xi-\xi^2)^{-m}\varphi_{n+1}(\xi)\,d\xi\right\}^2+$$

$$+2c_1^2\left\{\int\limits_0^1\left[(I-L)\Phi(\eta,X_N)\,\frac{\partial R(\xi,\eta)}{\partial\xi}d\eta\right](1-2\xi)(\xi-\xi^2)^{-m}\varphi_n(\xi)\,d\xi\right\}^2 \tag{2.17}$$

где

$$c_0=\sup_{n=2,3,\ldots}\frac{\lambda_n b_n}{n-1},\qquad c_1=\sup_{n=2,3,\ldots}\frac{\lambda_n}{n-1} \tag{2.18}$$

Наконец, опять при помощи неравенства Бесселя получим

$$\sum_{n=2}^N A_n^2(t)\leqslant 2(c_0^2+c_1^2)\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1(I-L)\Phi(\eta,X_N)\frac{\partial R(\xi,\eta)}{\partial\xi}\,d\eta\right]^2(\xi-\xi^2)^{-m}d\xi$$

или

$$\sum_{n=2}^N A_n^2(t)\leqslant 2(c_0^2+c_1^2)\max_{0<\xi<1}\left[(I-L)\Phi(\xi,X_N)\right]^2\times$$

$$\times\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1\left|\frac{\partial R(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right|d\eta\right]^2(\xi-\xi^2)^{-m}\,d\xi \tag{2.19}$$

Кроме того, из (2.14) имеем

$$A_1(t)\leqslant\lambda_1\max_{0<\xi<1}\left[(I-L)\Phi(\xi,X_N)\right]\int\limits_0^1\int\limits_0^1|R(\xi,\eta)|(\xi-\xi^2)^{-m}\varphi_1(\xi)\,d\xi d\eta \tag{2.20}$$

Таким образом, учитывая (2.13), (2.19) и (2.20), получим

$$\sqrt{\sum_{n=1}^N y_n^2}\leqslant a_0^2 B(\mu)\max_{0<\xi<1}\left[(I-L)\Phi(\xi,X_k)\right] \tag{2.21}$$

где

$$B(\mu) = \left\{ \frac{4(c_0^2 + c_1^2)}{h^2} \int_0^1 \left[\int_0^1 \left| \frac{\partial R(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right| d\eta \right]^2 (\xi - \xi^2)^{-\omega} d\xi + \right.$$

$$+ \frac{2\lambda_1^2}{h^2} \left[\int_0^1 \int_0^1 | R(\xi, \eta) | (\xi - \xi^2)^{-\omega} \varphi_1(\xi) \, d\xi d\eta \right]^2 +$$

$$\left. + \frac{2^{1+2\mu} \pi^2 \Gamma^2 (1-\mu)}{\Gamma^4 (1-\omega) h^2} \int_0^1 (\xi - \xi^2)^{\omega} d\xi \right\}^{1/2} \tag{2.22}$$

Теперь с помощью (2.12), (2.21) и (2.5) получим

$$\rho(Y_N, 0) \leqslant r_0 = \max_{\tau_0 \leqslant \tau \leqslant t} \left\{ \left[\frac{z_1(\tau)}{1 - z_1(\tau)} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + a_0^{2\mu} B^2(\mu) (1 + R)^{2\beta} z_0^{-2\beta}(\tau) [1 + C(t, \tau_0)]^2 \right\}^{1/2} \tag{2.23}$$

Отсюда следует, что если $r_0 \leqslant R$, то оператор $Y_N = A(X_N)$ отображает замкнутый шар $S(O, R)$ в себя

Пусть теперь

$$X_N^{(i)} = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_N^{(i)}) \in S(O, R) \text{ и } Y_N^{(i)} = A(X_N^{(i)}), \; i = 1; 2 \tag{2.24}$$

Тогда, используя (2.6), (2.10) и (2.12), получим

$$| y_0^{(1)} - y_0^{(2)} | \leqslant \frac{z_1}{(1 - z_1)^{1+\beta}} | x_0^{(1)} - x_0^{(2)} | +$$

$$+ \frac{m z_0 R^{m-1}}{(1 - z_1)^{1+\beta}} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} (x_n^{(1)} - x_n^{(2)})^2} \tag{2.25}$$

и аналогично (2.21)

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} (y_n^{(1)} - y_n^{(2)})^2} \leqslant a_0^{\mu} B(\mu) \max_{0 \leqslant \xi \leqslant 1} | (I - L) [\Phi(\xi, X_N^{(1)}) - \Phi(\xi, X_N^{(2)})] | \tag{2.26}$$

Теперь, учтя (2.10), (2.12) и (2.26), находим

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} (y_n^{(1)} - y_n^{(2)})^2} \leqslant a_0^{\mu} B(\mu) \left[\frac{(1 + R)^{\beta - 1}}{\alpha z_0^{\beta}} | x_0^{(1)} - x_0^{(2)} | + \right.$$

$$\left. + \frac{R^{m-1}}{\mu} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} (x_n^{(1)} - x_n^{(2)})^2} \right] \tag{2.27}$$

Наконец, из (2.25), (2.27) и (2.5) получим

$$\rho(Y_N^{(1)}, Y_N^{(2)}) \leqslant \varepsilon\rho(X_N^{(1)}, X_N^{(2)}) \tag{2.28}$$

где

$$\varepsilon = \max[\max_{\tau_0 \leqslant \tau \leqslant t} D_1(\tau); \max_{\tau_0 \leqslant \tau \leqslant t} D_2(\tau)] \tag{2.29}$$

$$D_1(\tau) = \left\{ \frac{2z_1^2(\tau)}{[1 - z_1(\tau)]^{2+2\beta}} + \frac{2a_0^{2\mu} B^2(\mu)}{\alpha^2 z_0^{2\beta}(\tau)(1+R)^{2-2\beta}} [1 + C(\tau, \tau_0)]^2 \right\}^{1/2}$$

$$D_2(\tau) = \left\{ \frac{2m^2 z_1^2(\tau) R^{2m-2}}{[1 - z_1(\tau)]^{2+2\beta}} + \frac{2a_0^{2\mu} B^2(\mu)}{\mu^2 R^{2-2m}} [1 + C(\tau, \tau_0)]^2 \right\}^{1/2} \tag{2.30}$$

Из (2.28) следует, что если $\varepsilon < 1$, то оператор $Y_N = A(X_N)$ в $S(O, R)$ — сжимающий. Следовательно, согласно принципу сжимающих отображений [21], существует единственное решение системы уравнений $X_N = A(X_N)$, которое можно найти методом последовательных приближений, исходя из любого начального значения из $S(O, R)$. При помощи теоремы А. Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [22] можно доказать, что решение урезанной системы $X_N = A(X_N)$ при $N \to \infty$ совпадает с решением бесконечной системы (2.3).

Обозначая через $X^* = (x_0^*, x_1^*, \ldots)$ решение системы (2.3), из формул (2.1), (2.2) и (1.13) находим

$$\delta_0(t) = z_0^{-1}(t)[1 + x_0^*(t)]$$

$$p_0(\xi, t) = \left\{ \delta_0(t) - f_0(\xi) - \left[h^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} x_k^*(t) \varphi_k(\xi) \right]^m \right\}^\beta \tag{2.31}$$

Принимая, что условие (2.11) выполняется, $r_0 \leqslant R$ и $\varepsilon < 1$, можно, исходя из $X^{(0)} = 0$, по рекуррентным формулам $X^{(i+1)} = A(X^{(i)})$, $i = 0, 1, \ldots$ найти X^*. В первом приближении будем иметь

$$\delta_0^{(1)}(t) = \left\{ 2 \int_0^1 [z_0(t) - z_0^2(t) f_0(\xi)]^\beta \xi d\xi \right\}^{-\alpha}$$

$$x_n^{(1)}(t) = \int_0^1 \left[\beta\varphi_n(\eta) + \frac{\lambda_n}{h a_0^{-\mu}} \int_0^1 R(\xi, \eta)(\xi - \xi^2)^{-\omega} \varphi_n(\xi) d\xi \right] (I -$$

$$- L)[z_0^{-1}(t) - f_0(\eta)]^\beta d\eta \tag{2.32}$$

С помощью (1.19) — (1.21) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} x_n^{(1)}(t) \varphi_n(\xi) = a_0^\mu (I - L) \int_0^1 [z_0^{-1}(t) - f_0(\eta)]^\beta \eta K(\xi, \eta) d\eta \tag{2.33}$$

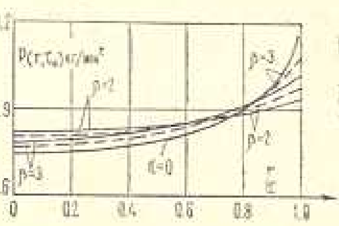
Для вычисления интеграла (2.33) можно пользоваться разложением [5, 20]

$$K(\xi, \eta) = \frac{2\pi\Gamma(\omega)}{\Gamma(1-\omega)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+1-\omega)}{(2n+1-\omega)^{-1}\Gamma^2(n+1)} P_n^{0,-\omega}(1 - 2\xi^2)\, P_n^{0,-\omega}(1-2\eta^2)$$

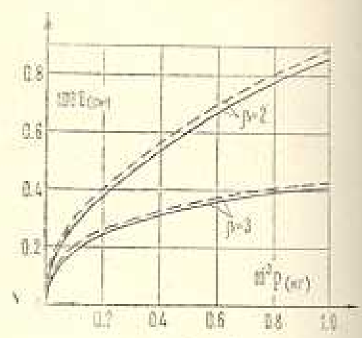
где $P_n^{\alpha,\beta}(z)$ — многочлены Якоби.

§ 3. *Численный пример.*

Рассмотрим задачу о давлении штампа с круглым в плане основанием на степенно упрочняющееся чугунное полупространство. Тогда $f_0(\xi) = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 10^5$ *кг/см²*. Считается, что поверхности тел определенным образом фрезерованные ($\beta = 2$, $K = 100$ *мк*) или полированные ($\beta = 3$, $K = 46.4$ *мк*). Вычисления, проведенные на ЭВМ «Наири-2», показывают, что в случае $\beta = 2$ и $\mu = 0.7$, если принять $R = 0.05$, $a = 2$ *см*, $t = \tau_0$, $P(t) = 10^3 H(t-\tau_0)$ *кг*, где $H(t)$ — функция Хевисайда, рассматриваемый оператор в замкнутом шаре $S(O, R)$—сжимающий. При таких значениях параметров с помощью формул (2.3) и (2.31), принимая нуль в качестве нулевого приближения, методом последовательных приближений вычислены вторые приближения для контактных давлений и меры взаимного сближения. На фиг. 1 по результатам этих вычислений построены графики $p(r, \tau_0)$. Отметим, что при увеличении чистоты обработки поверхностей контактирующих тел, что соответствует возрастанию параметра β, давление в концах контактной области возрастает и в предельном случае абсолютно гладких тел приобретает традиционную особенность. Последнее обстоятельство имеет место также при возрастании μ, когда β фиксировано.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

На фиг. 2 построены графики $\delta(\tau_0)$ в зависимости от $P(\tau_0)$. На этих фигурах сплошные линии соответствуют случаю $\mu = 0.7$, а пунктирные — случаю $\mu = 0.9$.

Автор благодарит С. М. Мхитаряна за внимание к работе.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 III 1978

Լ. Ա. ՇԵԿՅԱՆ

ՉԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ԱՆՀԱՐԹ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Դիտարկվող խնդիրը բերվում է Համմերշտեյնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման լուծման։ Գեգենբաուէրի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի օգնությամբ այդ հավասարման լուծումը բերվում է ոչ գծային հանրահաշվական անվերջ համակարգի։ Վերջինիս ուսումնասիրությունը կատարվում է սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա։ Նշված է բնութագրիչ պարամետրերի փոփոխման միջակայքը, որի դեպքում խնդրի լուծումը կարելի է ստանալ հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով։

Բերված է թվային օրինակ։

THE AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM IN THE NONLINEAR THEORY OF NONSTABILIZED CREEP FOR ROUGH SOLIDS

L. A. SHEKIAN

Summary

The problem is reduced to the solution of Hammerstein's nonlinear integral equation. By the set of Gegenbauer's orthogonal polynoms the solution of this equation is reduced to that of the infinite system of nonlinear algebraic equations. This system is examined in terms of the principle of compressible transformations. The interval of variation in characteristic parameters, wherein the problem's solution may be found by the method of successive approximations, is defined. Numerical results are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. *Кузнецов А. И.* Вдавливание жестких штампов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
3. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
4. *Митрофанов Б. П.* Влияние шероховатости на распределение напряжений по контурной площадке. Тбилиси, сб. «Жесткость стыков», 1966.
5. *Попов Г. Я., Савчук В. В.* Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта с учетом поверхностной структуры контактирующих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 3.
6. *Соколовский А. П.* Жесткость в технологии машиностроения. М., Машгиз, 1946.

7. Расчет контактных деформаций и отгибов направляющих. Установление форм направляющих из условий жесткости. (Руководящие материалы). Под ред. Д. Н. Решетова. ОНТИ, 1963.
8. *Решетов Д. Н., Левина З. М.* Расчет станков на контактную жесткость. Станки и инструменты, 1951, № 1.
9. *Демкин Н. Б.* Контактирование шероховатых поверхностей. М., «Наука», 1970.
10. *Бобрик П. И.* Связь микро- и макрогеометрии поверхностей, полученных механической обработкой. Труды МАТИ, вып. 15. Оборонгиз, 1952.
11. *Рыжов Э. В.* Основы расчета стыковых поверхностей деталей машин на контактную жесткость. М., Машгиз, 1962.
12. *Ling F. F.* On Asperity Distributions of Metallic Surfaces. J. Appl. Physics, vol. 29, No. 8, 1958, pp. 1168—1174.
13. *Рабинович А. С.* Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 3.
14. *Рабинович А. С.* Контактные задачи теории упругости для шероховатых тел. Автореф. канд. диссертации, МГУ, 1975.
15. *Мартыненко М. Д., Романчик В. С.* О решении интегрального уравнения контактной задачи теории упругости для шероховатых тел. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
16. *Мхитарян С. М., Шекян Л. А.* Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно-упрочняющихся материалов. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, т. 30, № 3.
17. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1952.
18. *Hurban K.* The basic problem of a non-linear and non-homogeneous half-space. Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, 1959.
19. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
20. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
21. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
22. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., изд. «Наука», 1974.