ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 6, 1978 Механика

М. С. ГАБРИЕЛЯН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРАТЕГИИ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АЛЬТЕРНАТИВЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ ПРИ МЕНЯЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ

Рассматривается дифференциальная игра с несколькими целевыми множествами, когда порядок встреч строго зафиксирован, но после каждой встречи меняется система дифференциальных уравнений. Определяются кусочно-позиционные стратегии, доказывается альтернатива о существовании ε-равновесия в этих стратегиях, когда плата имеет довольно общий вид.

§ 1. *Постановка задачи.* Пусть движение конфликтно управляемой системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_k = f_k(t, x_k, u_k, v_k) \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

Здесь $f_k: [t_0, \infty) \times R^n \times P_k \times Q_k \to R^n$ — непрерывная функция; $P_k \subset R^{p_k}$, $Q_k \subset R^{q_k}$ — компакты, характеризующие возможности игроков $(k = 1, \ldots, m)$. Предполагается, что функции f_k удовлетворяют условиям

$$|x_k' f_k(t, x_k, u_k, v_k)| \leqslant \varkappa_k (1 + \|x_k\|^2)$$

при

$$(t, x_k, u_k, v_k) \in [t_0, \infty) \times R^n \times P_k \times Q_k$$

где $x_k' f_k$ — скалярное произведение векторов x_k и f_k; $\|x_k\|$ — евклидова норма вектора x_k; $\varkappa_k$ — постоянные числа. Для любой ограниченной области $G \subset R^{n+1}$ выполняются следующие условия Липшица:

$$\|f_k(t, x_k^{(1)}, u_k, v_k) - f_k(t, x_k^{(2)}, u_k, v_k)\| \leqslant \lambda_G^{(k)} \|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}\|$$

при

$$(t, x_k^{(i)}, u_k, v_k) \in G \times P_k \times Q_k \quad (i = 1, 2;\ k = 1, \ldots, m).$$

Предполагается также, что выполняются условия седловой точки маленькой игры [1] (стр. 55) для каждого f_k $(k = 1, \ldots, m)$, то есть

$$\min_{u_k \in P_k} \max_{v_k \in Q_k} s' f_k(t, x_k, u_k, v_k) = \max_{v_k \in Q_k} \min_{u_k \in P_k} s' f_k(t, x_k, u_k, v_k) \tag{1.2}$$

при $s \in R^n$; $(t, x_k) \in [t_0, \infty) \times R^n$, $k = 1, \ldots, m$.

Рассматривается дифференциальная игра, в которой плата определена равенством

$$\gamma(y[\cdot]) = \varphi(\tau_1(y[\cdot]), \ldots, \tau_m(y[\cdot])) \tag{1.3}$$

Здесь через $y[\cdot]$ обозначается следующая непрерывная n-мерная вектор-функция:

$$y[\cdot] = \{x_k[t] : t \in [\tau_{k-1}(x_k[t]), \tau_k(x_k[t])], \tau_0 = t_0;$$

$$x_k[\tau_k] = x_{k+1}[\tau_k];\ k = 1, \ldots, m;\ x_{m+1}[t] = x_m[t],\ t > \tau_m\}$$

$x_k[t]$ — реализовавшиеся движения системы (1.1); $\varphi : [t_0, \infty]^m \to (-\infty, +\infty]$ — заданная функция;

$$\tau_k(x_k[\cdot]) = \min\{\tau : \tau \in T(x_k[\cdot], \widetilde{M}_k, \widetilde{N})\}$$

где $T(x_k[\cdot], \widetilde{M}_k, \widetilde{N}) = \{\tau : \tau \geqslant t \geqslant \tau_{k-1}(x_{k-1}[\cdot]); (t, x_k[t] \in \widetilde{N}$ при $(\tau, x_k[\tau]) \in \in \widetilde{M}_k\}$ $(\tau_0 = t_0)$; $\widetilde{M}_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ и $\widetilde{N}$ — заданные компакты; в случае $T(x_k[\cdot], \widetilde{M}_k \widetilde{N}) = \varnothing$ полагаем $\tau_k(x_k[\cdot]) = \infty$. Предполагается, что первый игрок, которому предоставлены управления $\{u_k\}$, стремится минимизировать значение платы γ, а второй игрок, выбирающий управления $\{v_k\}$, максимизирует значение γ. Функция φ удовлетворяет следующим условиям:

(1) на множестве $[t_0, \infty)^m$ она принимает конечные значения и непрерывна;

(2) $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_m) = \infty$, если хотя бы одно $\tau_k = \infty$;

(3) множество $\varphi^{-1}((-\infty, c])$ ограничено для любого конечного числа c;

(4) неравенство $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_i', \tau_{i+1}, \ldots, \tau_m) \leqslant \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_i'', \tau_{i+1}, \ldots, \tau_m)$ справедливо для любых наборов $(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_i', \tau_{i+1}, \ldots, \tau_m)$ и $(\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_i'', \tau_{i+1}, \ldots, \tau_m)$, где $\tau_i' \leqslant \tau_i''$. Покажем, что существует равновесная ситуация в классе кусочнопозиционных стратегий.

Пусть, как определено выше, переключение системы происходит в момент сближения траектории с соответствующим целевым множеством, и это право предоставлено первому игроку.

§ 2. *Формулировка альтернативы.* Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x} = f(t, x, u, v) \tag{2.1}$$

где

$$x = \begin{bmatrix} y \\ y_{n+1} \end{bmatrix};\quad f = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_i \delta_i(u_{m+1}) \\ u_{m+1} \end{bmatrix};\quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ u_{m+1} \end{bmatrix};\quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

Здесь x — $(n+1)$-мерный вектор-столбец; $f:[t_0, \infty)\times R^{n+1}\times P\times Q\to R^{n+2}$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая всем условиям, наложенным на каждую из функций f_k (1.1); множества $P=P_1\times P_2\times\cdots\times P_{m+1}$ $(P_{m+1}=\{1, 2,\dots, m\})$ и $Q=Q_1\times Q_2\times\cdots\times Q_m$ — компакты; функцию δ_k можно определить выражением $\delta_k(u_{m+1})=(1-u_{m+1})\cdots(k-1-u_{m+1})\cdots(-1)^{k-1}(k+1-u_{m+1})\cdots(m-u_{m+1})\times[(k-1)!(m-k)!]^{-1}$. Предполагается, что величина u_{m+1} принимает значения из множества P_{m+1} по строго фиксированному порядку $1, 2,\dots, m$.

Пусть заданы моменты времени $t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_m<\infty$. Определим следующие множества:

$$M_k=\{(t, x):(t, y)\in\widetilde{M}_k\}\quad k=1,\dots, m$$

$$N_1=\{(t, x):(t, y)\in\widetilde{N};\quad y_{n+1}=t\}$$

$$N_k(t_1,\dots, t_{k-1})=\left\{(t, x):(t, y)\in\widetilde{N};\ y_{n+1}=kt-\sum_{i=1}^{k-1}t_i\right\}\quad k=2,\dots, m.$$

Предполагается также, что $y^{(0)}_{n+1}=t_0$. Тогда сформулированная игровая задача станет эквивалентной задаче сближения со всеми целевыми множествами M_k и уклонения хотя бы от одного из них внутри соответствующих множеств N_k при фиксированном порядке встреч системы (2.1) с показателем $\gamma(x[\cdot])$.

Кусочно-позиционной стратегией первого игрока КПС U назовем набор $m+1$ отображений

$$\begin{aligned}&\varphi_i:x[\cdot;t_0, t]\to\varphi_i(x[\cdot;t_0, t])\in[t_0, \infty]\quad(i=1,\dots, m)\\ &u:(t, x, t_1,\dots, t_m)\to u(t, x, t_1,\dots, t_m)\in P\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь $t\in[t_0, \infty)$; $x[\cdot;t_0, t]\in C_{n+1}(t_0, t)$ ($C_{n+1}(t_0, t)$ — пространство непрерывных функций $x[\cdot;t_0, t]:[t_0, t]\to R^{n+1}$); функционалы φ_i определены на множестве $C^*=\bigcup_{t_0<t<\infty}C_{n+1}[t_0, t]$. Предполагается, что функционалы φ_i удовлетворяют следующему условию. Пусть $t^*\in[t_0, \infty)$, $x^*[\cdot;t_0, t^*]\in C_{n+1}[t_0, t^*]$, $t\in[t_0, t^*]$ и $x^*[t_0, t]$ — сужение функции $x^*[\cdot;t_0, t^*]$ на отрезок $[t_0, t]$, тогда либо $\varphi_i(x^*[\cdot;t_0, t^*])=\infty$ и $\varphi_i(x^*[\cdot;t_0, t])=\infty$ при $t\in[t_0, t^*]$, либо $\varphi_i(x^*[\cdot;t_0, t^*])=t_i^*<t^*$ и $\varphi_i(x^*[\cdot;t_0, t])=\{\infty$ при $t_0\leqslant t<t_i^*$, t_i^* при $t_i^*\leqslant t\leqslant t^*\}$.

Аналогичным образом определяются КПС V второго игрока

$$\begin{aligned}&\psi_i:x[\cdot;t_0, t]\to\psi_i(x[\cdot;t_0, t])\in[t_0, \infty]\quad(i=1,\dots, m)\\ &v:(t, x, t_1,\dots, t_m)\to v(t, x, t_1,\dots, t_m)\in Q\end{aligned}\tag{2.3}$$

Определение КПС V (2.3) удовлетворяет всем предположениям, которым удовлетворяет КПС U (2.2) первого игрока.

Движения, порожденные КПС U (2.2) вводятся следующим образом: пусть первым игроком выбрано разбиение $\Delta = \{[\tau_i, \tau_{i+1}): i = 0, 1, \ldots; \tau_0 = t_0, \tau_i \to \infty$ при $i \to \infty$, $t_k = \tau_{i_k}$, $k = 1, \ldots, m\}$. (Здесь не нарушая общности предполагается, что при любом разбиении Δ числа t_k являются точками деления). Предполагаем, что при этом разбиении КПС U (2.2) формируется управлением $u_\Delta[t]$ по закону

$$u_\Delta[t] = u(\tau_i, x_\Delta[\tau_i; t_0, \tau_i], \varphi_1(x_\Delta[\cdot; t_0, \tau_i]), \ldots, \varphi_m(x_\Delta[\cdot; t_0, \tau_i]))$$
$$(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}, \ \tau_0 = t_0, \ i = 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

Здесь $x_\Delta[\cdot; t_0, \tau_i]$ — ломаная Эйлера [1] (стр. 31), составленная из решений системы (2.1). Для рассматриваемой КПС U (2.2) символом $x[\cdot; t_0, x_0, U]$ обозначим движение, определенное предельным переходом от соответствующих ломаных Эйлера $x_{\Delta_j}[\cdot; t_0 x_0^{(j)}, U, v[\cdot]]$ ($j = 1, 2, \ldots; x_0^{(j)} \to x_0$; $\sup_i (\tau_{i+1}^{(j)} - \tau_i^{(j)}) \to 0$ при $j \to \infty$).

Аналогичным образом вводятся движения $x[\cdot; t_0, x_0, V]$, отвечающие КПС V (2.3). Из приведенных определений следует, что пара КПС U и КПС V всегда осуществима. Докажем следующую альтернативу.

Теорема 2.1. *Для любой начальной позиции (t_0, x_0) и для любого числа c всегда либо существует КПС U_c такая, что неравенство $\gamma(y[\cdot; t_0, y_0, U_c]) \leqslant c$ имеет место для всякого движения $y[\cdot; t_0, y_0, U_c]$, либо существует КПС V_c такая, что неравенство $\gamma(y[\cdot; t_0, y_0, V_c]) > c$ справедливо для всех движений $y[\cdot; t_0, y_0, V_c]$.*

§ 3. *Задача сближения.* Докажем первую часть альтернативы. Построим систему мостов (u-стабильных), по которой с помощью экстремальной КПС U_e можно провести движение и обеспечить выполнение неравенства $\gamma(x[\cdot]) \leqslant c$, если исходное положение (t_0, x_0) принадлежит начальному множеству этой системы.

Обозначим через $M_{i, t}$ следующее сечение $M_{i, t} = M_i \cap \{(t, x): x \in R^{n+1}\}$. Символом ϑ обозначим такое число, что m-мерный куб $\{(\tau_1, \ldots, \tau_m): t_0 \leqslant \tau_i \leqslant \vartheta, \ i = 1, 2, \ldots, m\}$ содержит множество $\sum(c) = \{(\tau_1, \ldots, \tau_m): \sigma(\tau_1, \ldots, \tau_m) \leqslant c\}$. После этого предполагается, что все числа $t_i \in [t_0, \vartheta]$.

Перейдем к формальным построениям системы u-стабильных мостов. Пусть $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{m-1}$ — любой набор чисел, определим множество

$$L_{m-1}(t_1, \ldots, t_{m-1}) =$$
$$= \{(t, x): (t, x) \in M_m, \ t_{m-1} \leqslant t \leqslant \vartheta, \ \sigma(t_1, \ldots, t_{m-1}, t) \leqslant c\} \tag{3.1}$$

пусть $W_{m-1}(t_1, \ldots, t_{m-1})$ — множество позиционного поглощения цели $L_{m-1}(t_1, \ldots, t_{m-1})$ (3.1) при фазовом ограничении $(t, x) \in N_m$, то есть $W_{m-1}(t_1, \ldots, t_{m-1})$ — совокупность всех позиций (t_*, x_*), для которых как для начальных существует позиционная стратегия $U \div u(t, x)$, гарантирующая выполнение условий (9.1) из [1], где следует полагать $M_c = L_{m-1}(t_1,\ldots, t_{m-1})$, $N_c = N_m$. Предположим, что для целого числа k $(2 \leqslant k \leqslant m)$ определены множества $L_{m-k+1}(t_1,\ldots, t_{m-k+1})$ и $W_{m-k+1}(t_1,\ldots, t_{m-k+1})$ в пространстве $\{t, x\}$. Тогда полагаем

$$L_{m-k}(t_1,\ldots, t_{m-k}) = \{\bigcup_{t_*} [W_{m-k+1}(t_1,\ldots, t_{m-k}, t_*) \cap M_{m-k+1, t_*}] : \\ : t_{m-k} \leqslant t_* \leqslant \vartheta\} \qquad (3.2)$$

Множество $W_{m-k}(t_1,\ldots, t_{m-k})$ определим как множество позиционного поглощения цели $L_{m-k}(t_1,\ldots, t_{m-k})$ (3.2) при фазовом ограничении $(t, x) \in N_{m-k+1}$. Пусть указанным способом построены множества $L_1(t_1)$ и $W_1(t_1)$ для любого $t_1 \in [t_0, \vartheta]$. Полагаем

$$L_0 = \{\bigcup_{t_*} [W_1(t_*) \cap M_{1, t_*}] : t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta\} \qquad (3.3)$$

и пусть W_0 — множество позиционного поглощения цели L_0 внутри N_1. Из приведенных выше построений следует, что все множества $W_j(t_1,\ldots, t_j)$ $(j = 0, 1,\ldots, m-1)$ являются замкнутыми и u-стабильными относительно соответствующих целевых множеств $L_j(t_1,\ldots, t_j)$ по движениям системы (2.1). Причем мосты обрываются на соответствующих целевых множествах не позже, чем в момент времени ϑ.

Определим КПС $U^{(e)}$, экстремальную к системе мостов $W_j(t_1,\ldots, t_j)$. С этой целью определим сначала функционалы φ_i $(i = 1,\ldots, m)$. Пусть $x^*[\cdot] : [t_0, \infty) \to R^{n+1}$ — некоторая непрерывная функция. Полагаем

$$R_0(t, x) = \{(t, w_0) : (t, w_0) \in W_0, \|x - x_0\| = \min_w \|x - w\| \text{ при } \\ (t, w) \in W_0\}; \; \varkappa_1^* = \min\{t \geqslant t_0 : R_0(t, x[t]) \cap L_0 \neq \varnothing\} \qquad (3.4)$$

Предположим, что число $\varkappa_1^* < \infty$ существует, тогда из определения множества L_0 следует, что

$$R_0(\varkappa_1^*, x^*[\varkappa_1^*]) \cap W_1(\varkappa_1^*) \cap M_1 \neq \varnothing \qquad (3.5)$$

Полагаем

$$\varphi_1(x^*[\cdot; t_0, t]) = \begin{cases} \infty \text{ при } t_0 \leqslant t < t_1^* \\ t_1^* \text{ при } t_1^* \leqslant t < \infty \end{cases}$$

где $x^*[\cdot; t_0, t]$ — сужение функции $x^*[\cdot]$ на отрезок $[t_0, t]$; $t_1^* = \varkappa_1^*$. Если же число $\varkappa_1^*$ не существует (это может быть тогда и только тогда, когда $W_0 = \varnothing$), то $\varphi_1(x^*[\cdot; t_0, t]) = \infty$ для любого $t \in [t_0, \infty)$. После этого предположим, что $W_0 \neq \varnothing$. Продолжим по индукции дальнейшие построения.

Пусть определены k чисел t_i^* и k функционалов φ_i $(i = 1,\ldots, k)$. Полагаем

$$R_k(t,\ x,\ t_1^*,\dots,\ t_k^*)=\{(t,\ w_0):(t,\ w_0)\in W_k(t_1^*,\dots,\ t_k^*),$$

$$\|x-w_0\|=\min_w\|x-w\| \text{ при } (t,\ w)\in W_k(t_1^*,\dots,\ t_k^*)\} \tag{3.6}$$

$$\varkappa_{k+1}^*=\min\{t\geqslant t_k^*: R_k(t,\ x^*[t],\ t_1^*,\dots,\ t_k^*)\cap L_k(t_1^*,\dots,\ t_k^*)\neq\varnothing\} \tag{3.7}$$

В рассматриваемом случае из построений на предыдущем шаге следует, что множество $W_k(t_1^*,\dots,\ t_k^*)\neq\varnothing$. Поскольку это множество к моменту ϑ обрывается на целевом множестве $L_k(t_1^*,\dots,\ t_k^*)$, то число $\varkappa_{k+1}\leqslant\vartheta$ существует. Из определения множества $L_k(t_1^*,\dots,\ t_k^*)$ вытекает, что

$$R_k(\varkappa_{k+1}^*,\ x^*[\varkappa_{k+1}^*],\ t_1^*,\dots,\ t_k^*)\cap W_{k+1}(t_1^*,\dots,\ t_k^*,\ \varkappa_{k+1}^*)\cap M_{k+1}\neq\varnothing \tag{3.8}$$

Полагаем

$$\varphi_{k+1}(x^*[\cdot;\ t_0,\ t])=\begin{cases}\infty & \text{при } t_0\leqslant t<t_{k+1}^*\\ t_{k+1}^* & \text{при } t_{k+1}^*\leqslant t<\infty\end{cases} \tag{3.9}$$

где $t_{k+1}^*=\varkappa_{k+1}^*$.

Наконец, для последнего функционала полагаем, что число $\varkappa_m^*=t_m^*$. Заметим, что в случае $W_0\neq\varnothing$ все числа $t_i^*\leqslant\vartheta$. С другой стороны, из определения множества $L_{m-1}(t_1,\dots,\ t_{m-1})$ (3.1) следует, что имеет место неравенство

$$\sigma(t_1^*,\dots,\ t_m^*)\leqslant c \tag{3.10}$$

Для того, чтобы завершить построение КПС $U^{(e)}$, остается определить функцию $u^{(e)}:(t,\ x,\ t_1,\dots,\ t_m)\to u_e(t,\ x,\ t_1,\dots,\ t_m)$.

Полагаем, что при $t_1=\infty$ стратегия $U^{(e)}$ определяется функцией $u^{(e)}(t,\ x)$ для всех позиций $(t,\ x)\in[t_0,\ \infty)\times R^{n+1}$ как позиционная стратегия, экстремальная к множеству W_0. Для любого k при $t_k<\infty$, а $t_{k+1}=\infty$ КПС $U^{(e)}$ определяется функцией $u^{(e)}(t,\ x)$ для всех позиций $(t,\ x)\in[t_k,\ \infty)\times R^{n+1}$ как позиционная стратегия, экстремальная к множеству $W_k(t_1,\dots,\ t_k)$. Таким образом, КПС $U^{(e)}$ построена.

Покажем, что в случае, когда $(t_0,\ x_0)\in W_0$, КПС $U^{(e)}$ доставляет решение задачи о сближении. Рассмотрим произвольную ломаную Эйлера $x_\Delta[\cdot]=x_\Delta[\cdot;\ t_0,\ x_\Delta^0,\ U^{(e)},\ v[\cdot]]$, где $v[\cdot]=\{v[t]\in Q\}$ — некоторая реализация второго игрока. Пусть $t_1^*,\dots,\ t_m^*$ — моменты времени, когда происходит переключение значений $\varphi_1(x[\cdot;\ t_0,\ t]),\dots,\ \varphi_m(x[\cdot;\ t_0,\ t])$ соответственно.

Рассмотрим первый промежуток $[t_0,\ t_1^*)$. На этом промежутке первый игрок, руководствуясь стратегией $u^{(e)}(t,\ x)$, чисто позиционной экстремальной относительно моста W_0, сблизится с целью L_0. Полагаем, что начальная позиция $(t_0,\ x_\Delta^0)$ лежит вблизи моста W_0. Тогда эта стратегия будет сохранять позицию $(t,\ x_\Delta[t])$ вблизи моста

W_0 вплоть до ее сближения с целью L_0, которое происходит в момент t_1^*. Поэтому имеют место оценки

$$\rho((t, x_\Delta[t]), W_0) \leqslant \alpha_1(\Delta) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant t_1^*$$

$$\rho((t_1^*, x_\Delta[t_1^*]), L_0) \leqslant \alpha_1(\Delta); \quad \alpha_1(\Delta) \to 0 \text{ при} \tag{3.11}$$

$$\operatorname{diam}(\Delta) = \sup_j (\tau_{j+1} - \tau_j) \to 0 \text{ и } \rho((t_0, x_\Delta^0), W_0) \to 0$$

Здесь $\rho((t, x), D)$ — расстояние от точки (t, x) до множества $D \subset R^{n+2}$. Из (3.9) и определения множества L_0 следует

$$\rho((t_1^*, x_\Delta[t_1^*]), W_1(t_1^*)) \leqslant \alpha_1(\Delta) \tag{3.12}$$

$$\rho((t_1^*, x_\Delta[t_1^*]), M_1) \leqslant \alpha_1(\Delta) \tag{3.13}$$

На следующем промежутке $[t_1^*, t_2^*)$ первый игрок в моменты времени $\tau_i \in (t_1^*, t_2^*)$ формирует постоянное управление $u_\Delta[t] = u_\Delta[\tau_i]$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$, $i \in \{i_1, \dots, i_2 - 1\})$ в соответствии с позиционной стратегией $U^{(e)}$, экстремальной к множеству $W_1(t_1^*)$ (см. определение $U^{(e)}$). Из (3.12) следует, что эта стратегия сохраняет позицию $(t, x_\Delta[t])$ вблизи моста $W_1(t_1^*)$ вплоть до ее сближения с целью $L_1(t_1^*)$, что произойдет в момент t_2^*. Следовательно, будут справедливы оценки

$$\rho((t, x_\Delta[t], W_1(t_1^*)) \leqslant \alpha_2(\Delta) \quad \text{при} \quad t_1^* \leqslant t \leqslant t_2^*$$

$$\rho((t_2^*, x_\Delta[t_2^*], L_1(t_1^*)) \leqslant \alpha_2(\Delta), \quad \text{где} \quad \alpha_2(\Delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{diam}(\Delta) \to 0$$

По определению множества $L_1(t_1^*)$ из этой оценки следуют неравенства:

$$\rho((t_2^*, x_\Delta[t_2^*]), W_2(t_1^*, t_2^*)) \leqslant \alpha_2(\Delta); \quad \rho((t_2^*, x_\Delta[t_2^*]), M_2) \leqslant \alpha_2(\Delta)$$

Продолжая эти рассуждения, получим оценки

$$\rho((t, x_\Delta[t]), W_{k-1}(t_1^*, \dots, t_{k-1}^*)) \leqslant \alpha_k(\Delta)$$

$$\rho((t_k^*, x_\Delta[t_k^*]), M_k) \leqslant \alpha_k(\Delta) \leqslant \alpha(\Delta) \tag{3.14}$$

$$\alpha(\Delta) \to 0 \text{ при } \operatorname{diam}(\Delta) \to 0, \ \rho((t_0, x_\Delta^0), W_0) \to 0$$

Рассмотрим произвольное движение $x[\cdot; t_0, x_0, U^{(e)}]$, определенное предельным переходом от некоторой последовательности ломаных Эйлера $x_r[\cdot] = x_{\Delta_r}[\cdot; t_0, x_0, U^{(e)}, v^{(r)}[\cdot]]$ $(r = 1, 2, \dots)$, где $\operatorname{diam}(\Delta_r) \to 0$, $\|x_0 - x_0^{(r)}\| \to 0$ при $r \to \infty$. Пусть $\alpha_r = \alpha(\Delta_r)$, $\tau_i^{(r)} = \min\{\tau : \tau \in T(x_r[\cdot], M_i^{\alpha_r}, N_i^{\alpha_r})\}$, где G^α — замкнутая α-окрестность множества G. Поскольку множество $W_k(t_1, \dots, t_k)$ вложено в N_{k+1}, то из (3.14) получаем неравенства $(\tau_i^{(r)} \leqslant t_i^{*(r)}$ $(i = 1, \dots, m;\ r = 1, 2, \dots)$, где $t_i^{*(r)}$ — моменты времени

t_i^*, определенные для движения $x_r[\cdot]$. Можно полагать, что выбранная последовательность $x_r[\cdot]$ $(r=1, 2,\ldots)$ такова, что $\tau_i^{(r)}\to\tau_i^*$, $t_i^{*(r)}\to t_i^*$, $(i=1, 2,\ldots, m)$ при $r\to\infty$. Поскольку $\sigma(t_1^{*(r)},\ldots, t_m^{*(r)})\leqslant c$ и $\tau_i^*\leqslant t_i^{**}$, то в силу наложенных на функцию $\sigma(\cdot)$ ограничений получаем неравенство $\sigma(\tau_1^*,\ldots,\tau_m^*)\leqslant c$. Заметим, наконец, что по определению чисел $\tau_i(x[\cdot])$, τ_i^* $(i=1,\ldots, m)$ для движения $x[\cdot]=x[\cdot; t_0, x_0, U^{(e)}]$ — предела ломаных $x_r[\cdot]$ $(r=1, 2,\ldots)$ справедливы неравенства $\tau_i(x[\cdot])\leqslant\tau_i^*$. Поэтому из неравенства $\sigma(\tau_1^*,\ldots,\tau_m^*)\leqslant c$ следует оценка $\gamma(x[\cdot])=\sigma(\tau_1(x[\cdot]),\ldots,\tau_m(x[\cdot]))\leqslant c$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 3.1. Если $(t_0, x_0)\in W_0$, то КПС $U^{(e)}$, экстремальная к системе множеств $W_k(t_1^*,\ldots, t_k^*)$ $(k=0,\ldots, m-1)$, обеспечивает выполнение неравенства $\gamma(x[\cdot; t_0, x_0, U^{(e)}])\leqslant c$ для любого движения, порожденного этой стратегией.

§ 4. *Задача об уклонении.* Покажем, что когда $(t_0, x_0)\overline{\in} W_0$, существует КПС V_c, которая обеспечивает выполнение неравенства $\gamma(x[\cdot; t_0, x_0, V_c])>c$ для любого движения $x[\cdot; t_0, x_0, V_c]$. Здесь по-прежнему полагаем, что множество W_0 построено для выбранного значения c, и этот параметр во введенных ниже обозначениях опущен. Задачу построения КПС V_c будем называть задачей об уклонении. Пусть $\varepsilon>0$ — некоторое число. Для набора $t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{m-1}$ множество $L_{m-1,\varepsilon}(t_1,\ldots, t_{m-1})$ определим соотношением

$$L_{m-1,\varepsilon}(t_1,\ldots, t_{m-1})=\{(t, x):(t, x)\in M_m^\varepsilon,\ \vartheta\geqslant t\geqslant t_{m-1}$$
$$\sigma(t_1,\ldots, t_{m-1}, t)\leqslant c+\varepsilon\} \tag{4.1}$$

(Здесь и в дальнейшем символ G^ε обозначает замкнутую ε-окрестность множества G).

Полагаем далее, что $W_{m-1,\varepsilon}(t_1,\ldots, t_{m-1})$ есть множество позиционного поглощения цели $L_{m-1,\varepsilon}(t_1,\ldots, t_{m-1})$ внутри N_m^ε.

Предположим, что множества $L_{m-k+1,\varepsilon}(t_1,\ldots, t_{m-k+1})$ и $W_{m-k+1,\varepsilon}(t_1,\ldots, t_{m-k+1})$, где $2\leqslant k\leqslant m$ определены для всякого набора $t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{m-k+1}$. Тогда

$$L_{m-k,\varepsilon}(t_1,\ldots, t_{m-k})=\{\bigcup_{t_*}[W^\varepsilon_{m-k+1,\varepsilon}(t_1,\ldots, t_{m-k}, t_*)\cap M^\varepsilon_{m-k+1,t_*}]:$$
$$: t_{m-k}\leqslant t_*\leqslant\vartheta\} \tag{4.2}$$

Полагаем, что $W_{m-k,\varepsilon}(t_1,\ldots, t_{m-k})$ есть множество позиционного поглощения цели $L_{m-k,\varepsilon}(t_1,\ldots, t_{m-k})$ внутри N^ε_{m-k+1}. Пусть определены множества $L_{1,\varepsilon}(t_1)$ и $W_{1,\varepsilon}(t_1)$, тогда полагаем

$$L_{0,\varepsilon}=\{\bigcup_{t_*}[W^\varepsilon_{1,\varepsilon}(t_*)\cap M^\varepsilon_{1,t_*}]: t_0\leqslant t\leqslant\vartheta\} \tag{4.3}$$

а $W_{0,\varepsilon}$ определим как множество позиционного поглощения цели (4.3) внутри N_1^ε.

Введенные здесь множества $L_{j,\varepsilon}(t_1,\ldots,t_j)$ и $W_{j,\varepsilon}(t_1,\ldots,t_j)$ $(j=0,\ldots,m-1)$ при $\varepsilon=0$ совпадают с соответствующими множествами $L_{j,\varepsilon}(t_1,\ldots,t_j)$ и $W_j(t_1,\ldots,t_j)$. Можно проверить, что множества $L_{j,\varepsilon}(t_1,\ldots,t_j)$ и $W_{j,\varepsilon}(t_1,\ldots,t_j)$ зависят от параметра ε полунепрерывно сверху относительно включения. Поэтому справедливо следующее положение. Если $(t_0, x_0)\overline{\in} W_0$, то существует число ε такое, что

$$(t_0, x_0)\overline{\in} W_0^\varepsilon \tag{4.4}$$

Ниже будем исходить из соотношения (4.4).

Полагаем в дальнейшем $\alpha=\varepsilon/2$. Введем функционалы $\psi_i^{(\varepsilon)}$, входящие в определение КПС V_ε.

Пусть $x^*[\cdot]:[t_0,\infty)\to R^{n+1}$ — некоторая непрерывная функция и пусть

$$\xi_1^* = \min\{t: t\in T(x^*[\cdot], M_1^\varepsilon, N_1^\varepsilon)\} \tag{4.5}$$

(символ $T(\cdot)$ определен в § 1), если здесь $T(\cdot)=\varnothing$, то полагаем $\psi_i^{(\varepsilon)}(x^*[\cdot;t_0,t])=\infty$ для $i=1,\ldots,m$; $t>t_0$. Если же в (4.5) $T(\cdot)\neq\varnothing$, то полагаем

$$\psi_1^{(\varepsilon)}(x^*[\cdot;t_0,t])=\begin{cases}\infty & \text{при } t_0\leqslant t<t_1^*\\ t_1^* & \text{при } t\geqslant t_1^*\end{cases}$$

где $t_1^*=\xi_1^*$.

Предположим, что для k-множеств $M_1^\varepsilon,\ldots,M_k^\varepsilon$ определены числа $t_1^*\leqslant\cdots\leqslant t_k^*<\infty$. Определим число

$$\xi_{k+1}^* = \min\{t: t\in T(x^*[\cdot;t_0,t], M_{k+1}^\varepsilon, N_{k+1}^\varepsilon),\ \ t\geqslant t_k^*\} \tag{4.6}$$

Если здесь $T(\cdot)=\varnothing$, то полагаем $\psi_i^{(\varepsilon)}(x^*[\cdot;t_0,t])=\infty$ для всех $i=k+1,\ldots,m$; $t\geqslant t_k^*$. Если же в (4.6) $T(\cdot)\neq\varnothing$, то полагаем

$$\psi_{k+1}^{(\varepsilon)}(x^*[\cdot;t_0,t])=\begin{cases}\infty & \text{при } t_0\leqslant t<t_{k+1}^*\\ t_{k+1}^* & \text{при } t\geqslant t_{k+1}^*\end{cases}$$

где $t_{k+1}^*=\xi_{k+1}^*$.

Указанным способом определяются все функционалы $\psi_i^{(\varepsilon)}$ $(i=1,\ldots,m)$. Для определения функции $v^{(\varepsilon)}:(t,x,t_1,\ldots,t_m)\to v(t,x,t_1,\ldots,t_m)\in Q$ введем вспомогательные определения. Пусть X_τ — совокупность точек $x_\tau\in R^{n+1}$, для которых существует решение уравнения в контингенциях

$$\dot{x}[t]\in\operatorname{co}\{f(t,x[t],u,v): u\in P,\ v\in Q\}\quad (t_0\leqslant t\leqslant\tau)$$

удовлетворяющее условиям $\|x[t_0]-x_0\|\leqslant\beta$; $x[\tau]=x_\tau$. Здесь $\beta>0$ определим ниже. Полагаем $H=\{(t,x): t_0\leqslant t\leqslant\vartheta,\ x\in X_t\}$. При сделанных предположениях относительно функций f_k $(k=1,\ldots,m)$ множество H является компактом. Пусть G и D—некоторые компакты в R^{n+2}, $x[\cdot]:[t_0, \infty)\to R^{n+1}$ — непрерывная функция. Будем говорить, что для функции $x[\cdot]$ имеет место (G, D) уклонение, если из условия $(t, x[t])\in D$ при всех $t\in[t_*, \tau]$ следует, что $(\tau, x[\tau])\overline{\in} G$.

Итак, обратимся к определению функции $v^{(\varepsilon)}$. Предположим, что для заданного набора $t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_m$ функция $v^{(\varepsilon)}$ для любой позиции $(t, x)\in[t_0, \infty)\times R^{n+1}$ определена как позиционная стратегия $V^{(\varepsilon)}\div v^{(\varepsilon)}(t, x)$, гарантирующая $(L_{0,\varepsilon}, N_1^\varepsilon)$ — уклонение для любого движения $x[\cdot; t_0, x_0^*, V^{(\varepsilon)}]$ при всяком выборе точки $x_0^*\in\{x:\|x_0-x\|\leqslant\leqslant\beta\}$. Существование числа $\beta>0$ и стратегии $V^{(\varepsilon)}$ следует из альтернативы для позиционной дифференциальной игры [1] (стр. 68), условия (4.4) и определения множества $W_{0,\varepsilon}$.

Пусть набор чисел t_i такой, что $t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_k$. Полагаем, что для этого набора функция $v^{(\varepsilon)}(\cdot; t_1,\dots, t_k)$ определена как позиционная стратегия $V^*\div v^*(t, x)$, которая гарантирует $(L_{k,\varepsilon}(t_1,\dots, t_k), N_{k+1}^\varepsilon)$ — уклонение для любого движения $x[\cdot; t_*, x_*, V^*]$ системы (2.1) при произвольном выборе точки (t_*, x_*) из множества $\{(t, x): :(t, x)\in H; (t, x)\overline{\in} W_{k,\varepsilon}^{\omega}(t_1,\dots, t_k)\}$, где $\omega=\varepsilon/4$. Существование такой стратегии V^* следует из альтернативы для позиционной дифференциальной игры и определения множества $W_{k,\varepsilon}(t_1,\dots, t_k)$. Для всякого набора $t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_m$, где $t_m<\infty$, $t>t_m$ функция $v^{(\varepsilon)}(\cdot; t_1,\dots, t_m)$ определяется произвольно.

Итак, КПС V_ε полностью определена.

Рассмотрим ломаную Эйлера $x_\Delta[\cdot]=x_\Delta[\cdot; t_0, x^*, u[\cdot], V_\varepsilon]$, где $\|x^*-x_0\|\leqslant\beta$. Пусть $t_0\leqslant t_1^*\leqslant\cdots\leqslant t_m^*$ — моменты времени, когда происходит переключение значений $\psi_1(x_\Delta[\cdot; t_0, t]),\dots, \psi_m(x_\Delta[\cdot; t_0, t])$ соответственно. Будем полагать сначала, что $t_m^*<\infty$. Тогда согласно (4.4) и (4.6) выполнится включение

$$(t, x_\Delta[t])\in N_{k+1}^\varepsilon \text{ при } t_k^*\leqslant t\leqslant t_{k+1}^* \quad (k=0, 1,\dots, m-1) \tag{4.7}$$

На первом промежутке $[t_0, \tau_{t_1}]$ управление $v_\Delta[\cdot]$ формирует позиционную стратегию $V_0\div v_0(t, x)$. При выборе достаточно мелкого разбиения Δ существует движение $x[\cdot]=x[\cdot; t^*, x^*, V_0]$ такое, что

$$\|x[t]-x_\Delta[t]\|\leqslant\tau\leqslant\varepsilon/2 \quad \text{при} \quad t\in[t_0, \tau_{t_1}] \tag{4.8}$$

Учитывая (4.7), замечаем, что $(t, x[t])\in N_1^\varepsilon$ при $t_0\leqslant t\leqslant\tau_{t_1}$. Поскольку для рассматриваемого движения $x[\cdot]$ стратегия V_0 гарантирует $(L_{0,\varepsilon}, N_1^\varepsilon)$-уклонение, то для момента $t_1^*<\tau_{t_1}$ должно выполняться соотношение

$$(t_1^*, x[t_1^*])\overline{\in} L_{0,\varepsilon}. \tag{4.9}$$

По определению момента t_1^* справедливо включение $(t_1^*, x[t_1^*])\in M_1^\varepsilon$, поэтому из (4.8) следует

$$(t_1^*, x[t_1^*]) \in M_1^{\varepsilon} \tag{4.10}$$

Из (4.3), (4.9), (4.10) заключаем, что $(t_1^*, x[t_1^*]) \overline{\in} W_{1,\varepsilon}^{\varepsilon}(t_1^*)$. Используя еще раз (4.8), получаем, что при достаточно малом значении разности $(t_1^* - \tau_{i_1})$ при мелком разбиении Δ будет справедливо следующее соотношение:

$$(\tau_{i_1}, x_\Delta[\tau_{i_1}]) \overline{\in} W_{1,\varepsilon}^{\omega}(t_1^*) \quad (\omega = \alpha/2 = \varepsilon/4) \tag{4.11}$$

Согласно определению функции $v^{(c)}$ на промежутке $[\tau_{i_1}, \tau_{i_2})$ управление $v_\Delta[\cdot]$ формирует позиционную стратегию, которая при выполнении условия (4.11) обеспечивает выполнение соотношения $(\tau_{i_2}, x_\Delta[\tau_{i_2}]) \overline{\in} W_{2,\varepsilon}^{\omega}(t_1^*, t_2^*)$. Это положение выводится такими же рассуждениями, как и соотношение (4.11).

Продолжая эти рассуждения для последующих этапов, приходим к последнему этапу. Получаем

$$(\tau_{i_{m-1}}, x_\Delta[\tau_{i_{m-1}}]) \overline{\in} W_{m-1,\varepsilon}^{\omega}(t_1^*, \ldots, t_{m-1}^*) \tag{4.12}$$

На промежутке $[\tau_{i_{m-1}}, \tau_{i_m})$ управление $v_\Delta[\cdot]$ — позиционная стратегия $V^* \div v^*(t, x)$. Определим движение $x[\cdot] = x[\cdot, \tau_{i_{m-1}}, x[\tau_{i_{m-1}}], V^*]$ так, чтобы выполнялась оценка

$$\|x[t] - x_\Delta[t]\| \leqslant \alpha \text{ при } \tau_{i_{m-1}} \leqslant t \leqslant t_m^* \tag{4.13}$$

(При достаточно мелком разбиении Δ такое движение $x_\Delta[\cdot]$ существует). По определению момента t_m^* имеем $(t_m^*, x_\Delta[t_m^*]) \in M_m^{\varepsilon}$, поэтому из (4.13) при $t = t_m^*$ следует

$$(t_m^*, x[t_m^*]) \in M_m^{\varepsilon} \tag{4.14}$$

Далее из (4.7) и (4.13) получаем

$$(t, x[t]) \in N_m^{\varepsilon} \text{ при } \tau_{i_{m-1}} \leqslant t \leqslant t_m^* \tag{4.15}$$

С другой стороны, по определению функции $v^{(c)}$ стратегия V^* такова, что при наличии (4.12) для движения $x[\cdot]$ имеет место $(L_{m-1,\varepsilon}(t_1^*, \ldots, t_{m-1}^*), N_m^{\varepsilon})$-уклонение. Поэтому из (4.15) следует, что $(t_m^*, x[t_m^*]) \overline{\in} L_{m-1,\varepsilon}(t_1^*, \ldots, t_{m-1}^*)$, а отсюда и из (4.14) получаем неравенство

$$\gamma(t_1^*, \ldots, t_m^*) > c + \varepsilon \tag{4.16}$$

Неравенство (4.16) доказано в предположении, что $t_i^* < \infty$ при $i = 1, \ldots, m$. Если это предположение не выполняется, то $\gamma(t_1^*, \ldots, t_m^*) = \infty$ и неравенство (4.16) выполняется очевидным образом.

Итак, при достаточно мелком разбиении Δ для любой ломаной Эйлера выполняется неравенство (4.16).

Пусть $x[\cdot;\ t_0,\ x_0,\ V_e]$ — произвольное движение, отвечающее КПС V_e, $x^*_{\Delta_j}[\cdot] = x_{\Delta_j}[\cdot;\ t_0,\ x^{(j)},\ u^{(j)}[\cdot],\ V_e]$ $(j=1,\ 2,\ldots)$ — последовательность ломаных Эйлера, сходящаяся к этому движению.

Пусть $t_i^{*(j)}$ $(i=1,\ldots,\ m;\ j=1,\ 2,\ldots)$ — числа, определенные указанным образом для ломаных $x_{\Delta_j}[\cdot]$. Можно полагать, что $t_i^{*(j)} \to t_i^{**}$ при $j \to \infty$, $i=1,\ldots,\ m$. (Здесь не исключен неособый случай, когда $t_i^{(j)} \to \infty$ $(j=1,\ 2,\ldots$ и $t_i^{**} \to \infty))$. Из (4.16) в силу непрерывности φ имеем неравенство

$$\varphi(t_1^{**},\ldots,\ t_m^{**}) > c+\varepsilon \tag{4.17}$$

Заметим теперь, что $\tau_i(x[\cdot]) > t_i^{**}$ (см. определение $\tau_i(x[\cdot])$ в § 1 и числа t_i^* в (4.5), (4.6)). Поэтому из (4.17) и свойства функции φ получаем неравенство

$$\varphi(\tau_1(x[\cdot]),\ldots,\ \tau_m(x[\cdot])) > c+\varepsilon$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Лемма 4.1. Если $(t_0,\ x_0) \overline{\in} W_0$, то построенная КПС V_e обеспечивает выполнение неравенства $\gamma(x[\cdot;\ t_0,\ x_0,\ V_e]) > c$ для любого порожденного ею движения $x[\cdot;\ t_0,\ x_0,\ V_e]$.

Из лемм 3.1 и 4.1 сразу следует справедливость теоремы 2.1.

Автор благодарит академика Н. Н. Красовского за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский государственный университет

Поступила 23 II 1978

Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԽԱՂԻ ՀԱՄԱՐ ՍՏՐԱՏԵԳԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ ԵՎ ԱԼՏԵՐՆԱՏԻՎԱՅԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑԸ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է մոտեցման-շեղման դիֆերենցիալ խաղը մի քանի նպատակային բազմություններով, երբ հավասարումների սիստեմը յուրաքանչյուր հանդիպումից հետո փոխվում է պահպանելով հետագծի անընդհատությունը։ Բազմությունների հետ հանդիպման կարգը խիստ ֆիքսված է, քանի որ հակառակ դեպքում ստացվում է հակասություն։ Սահմանվում են մաքսիմալ u-ստաբիլ կամուրջների սիստեմ և կտոր առ կտոր դիրքային ստրատեգիաներ վերջավոր հիշողությամբ, սահմանված են նաև այդ կամուրջների նկատմամբ էքստրեմալ կտոր առ կտոր դիրքային ստրատեգիաները։ Նման ձևով սահմանված են երկրորդ խաղացողի կտոր առ կտոր դիրքային ստրատեգիաները։ Այնուհետև այդ ստրատեգիաների դասում ապացուցված է ալտերնատիվան.

որով հիմնավորվում է ε-հավասարակշռությունը ներքևից կիսաանընդհատ արժեքով դիտարկվող խաղում։

DETERMINATION OF THE STRATEGIES AND THE PROOF OF ALTERNATIVE FOR A DIFFERENTIAL GAME WITH SEVERAL AIM SETS UNDER CHANGEABLE SYSTEMS

M. S. GABRIELIAN

S u m m a r y

A differential game of rapprochment-deviation with several aim sets is considered where the system of equations is changed after each encounter, provided the continuity of the trajectory is maintained. The order of encounters is strictly fixed, otherwise a contradiction occurs. The piecewise-position strategies with a finite memory are defined, a system of maximum u-stable bridges is constructed and the piecewise position strategies extreme to the bridges are determined as well. The piecewise-position strategies of the second player are similarly found. Then in the class of these strategies an alternative is proved whereby the ε-equilibrium situation in established in the game in question with a semi-continued plate on the underside.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.