

С. Н. КУКУДЖАНОВ

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ
 ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ
 НАГРУЗКИ НЕРАВНОМЕРНО НАГРУЖЕННОЙ ЦИЛИНДРИ-
 ЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Приводится путь решения задач устойчивости цилиндрических оболочек переменной толщины, находящихся под действием переменного внешнего давления на основании метода последовательных приближений, который дает возможность провести двусторонние оценки приближений наименьшего собственного числа. В отличие от известных работ [4] — [9] наряду с оболочками средней длины рассмотрены длинные оболочки, когда края оболочки закреплены в продольном направлении. Получены простые формулы и построены соответствующие кривые зависимости критической нагрузки от амплитуды толщины. Приведены двусторонние оценки полученных результатов. Показана различная степень влияния переменной толщины на критическую нагрузку для длинных оболочек и оболочек средней длины, а также существенное увеличение критической нагрузки при закреплении краев в осевом направлении.

1. Учитывая слабовыраженное волнообразование в продольном направлении в сравнении с окружным, для определения критического давления использовалась полубезмоментная теория [1, 2]. Уравнение устойчивости для оболочки переменной (вдоль образующей) толщины относительно радиального перемещения w имеет вид

$$\varepsilon(x) \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 w + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[h(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \frac{T^0(x)}{E} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) w = 0 \quad (1.1)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{h^3(x)}{12 R^2 (1 - \nu^2)}, \quad h(x) = h f_1(x), \quad T^0(x) = q f_2(x) R$$

$R\alpha, R\beta$ — координаты в осевом и окружном направлениях; R, l — радиус и длина оболочки; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; $f_1(\alpha)$ — функция изменения толщины; $f_2(\alpha)$ — функция изменения внешнего давления.

Для решения уравнения (1.1) в случае замкнутой оболочки необходимо удовлетворить четырем граничным условиям в продольном направлении (по два на каждом краю) и условию периодичности в окружном направлении. Поэтому решение уравнения ищем в следующем виде:

$$w = X(x) \cos n\varphi \quad (1.2)$$

Подставляя это выражение в (1.1), получаем

$$[f_1(x)X^{(2)}]^{(2)} + f_1^2(x)\gamma(n)X = \lambda f_2(x)X, \quad \varepsilon = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)} \quad (1.3)$$

$$\lambda = t\omega(n), \quad \omega(n) = n^4(n^2-1), \quad \gamma(n) = \varepsilon n^4(n^2-1)^2, \quad t = \frac{qR}{Eh} \quad (1.4)$$

Граничные условия при $\alpha = \text{const}$ на основании гипотез полубезмоментной теории и выражения (1.2) принимают вид

$$v = 0 (X = 0), \quad u = 0 (X' = 0), \quad T_1 = 0 (X'' = 0), \quad S = 0 (X''' = 0) \quad (1.5)$$

u, v — осевое и окружные смещения; T_1, S — нормальное и сдвигающее усилия. Таким образом, приходим к задаче на собственные значения для уравнения (1.3) с граничными условиями типа (1.5).

2. Поставленная задача решалась методом последовательных приближений с использованием постоянных Шварца [4]. Для краткости записи представим уравнение (1.3) и граничные условия типа (1.5) в операторном виде

$$M[X] = \lambda f_2(x)X, \quad U_L[X] = 0 \quad (2.1)$$

Как известно, в методе последовательных приближений исходят из выбранной функции X_0 и каждую последующую функцию X_1, X_2, \dots , получают, решая краевую задачу (при этом для задачи на собственные значения λX заменяют на X). Далее определяют, так называемые, постоянные Шварца:

$$\alpha_k = \int_0^L X_i X_{k-i} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq i \leq k \quad (2.2)$$

$(0, L)$ — интервал определения дифференциального уравнения. Затем находят отношение Шварца $\mu_k = \alpha_k \alpha_{k+1}^{-1}$. Существует теорема [4], на основании которой следует, что если задача на собственные значения является самосопряженной, полностью определенной и собственные значения не входят в краевые условия, то отношения Шварца μ_k образуют монотонно убывающую сходящуюся последовательность, ограниченную снизу первым собственным значением λ_1 . При этом для первого собственного значения справедлива оценка

$$\mu_{k+1} - \delta \leq \lambda_1 \leq \mu_{k+1}, \quad \delta = \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\rho_2 \mu_{k+1}^{-1} - 1}, \quad \mu_{k+1} < \rho_2 < \lambda_2 \quad (2.3)$$

Таким образом, чтобы найти нижнюю границу для λ_1 , необходимо знать нижнюю границу ρ_2 для второго собственного числа λ_2 . Нижнюю границу ρ_2 нетрудно установить путем сравнения с задачей на собственные значения, коэффициенты которой постоянны.

Для сложных задач на собственные значения, к которым относится и вышесприведенная задача устойчивости, повторное решение часто наталкивается на определенные трудности. Поэтому важно выбрать достаточно хо-

рошо начальную функцию, чтобы уже в начальном приближении получить достаточно точные результаты. Для этого класса задач можно исходить из функции X_1 (которая удовлетворяет всем краевым условиям), а X_0 определять на основании равенства $M[X_1] = f_2(\alpha)X_0$. При этом, чтобы начальная функция была достаточно хорошей, к функции X_1 прибавим удовлетворяющие краевым условиям функции φ_i , умноженные на константы C_i , выбрав последние так, чтобы функция X_0 так же удовлетворяла краевым условиям, то есть возьмем

$$X_1^* = X_1 + \sum_i C_i \varphi_i \quad (2.4)$$

и определим X_0 из вышеотмеченного равенства

$$X_0 = M[X_1^*]f_2^{-1}(z) \quad (2.5)$$

где $f_2(\alpha) \neq 0$ в рассматриваемом интервале. Далее определяем постоянные Шварца и соответствующие отношения. Для уравнения (1.3) они являются функциями параметра n

$$a_0(n) = \int_0^L X_0^2 dz, \quad a_1(n) = \int_0^L X_0 X_1^* dz, \quad a_2(n) = \int_0^L (X_1^*)^2 dz$$

$$\mu_1(n) = a_0(n) a_1^{-1}(n), \quad \mu_2(n) = a_1(n) a_2^{-1}(n) \quad (2.6)$$

Если ограничиться вторым приближением, тогда получаем

$$\mu_2(n) \approx \lambda_1(n) = tn^4(n^2 - 1), \quad t \approx \mu_2(n)/n^4(n^2 - 1) \quad (2.7)$$

Соответствующая критическая нагрузка t_* будет при $n = n_*$, реализующем минимум выражения (2.7). При этом оценка (2.3) примет вид

$$\frac{\mu_2(n_*) - \delta(n_*)}{n_*^4(n_*^2 - 1)} \leq t_* \leq \frac{\mu_2(n_*)}{n_*^4(n_*^2 - 1)}, \quad \delta(n_*) = \frac{\mu_1(n_*) - \mu_2(n_*)}{\mu_2(n_*)\mu_1(n_*) - 1} \quad (2.8)$$

Далее были рассмотрены две задачи, представляющие определенный практический интерес. Во-первых, была рассмотрена задача устойчивости цилиндрической оболочки переменной толщины (синусоидального типа), находящейся под действием равномерного внешнего давления. При этом исследовалась степень влияния как утолщения, так и утоньшения центральной части оболочки (наиболее чувствительной) на величину критической нагрузки. Во-вторых, рассматривался случай действия переменного давления на оболочку переменной толщины, изменяющихся по степенному закону. При этом, как было отмечено, края оболочки считались закрепленными в тангенциальном направлении $v = u = 0$ и, следовательно,

$$X(0) = X(L) = X'(0) = X'(L) = 0, \quad L = l/R \quad (2.9)$$

3. Рассмотрим случай синусоидального изменения толщины

$$f_1(x) = 1 - a \sin \pi x L^{-1}, \quad 0 < a < 0, \quad |a| < 1, \quad f_2(x) = 1 \quad (3.1)$$

Нижнюю границу λ_2 найдем, решив вспомогательную задачу с постоянными коэффициентами. Для этого в исходном уравнении (1.3) заменим функцию $(1 - a \sin \pi L^{-1} \alpha)$ постоянной величиной и притом наименьшим ее значением в интервале $0 \leq \alpha \leq L$. При $a > 0$ наименьшее значение будет $(1 - a)$, а при $a < 0$ это 1. Обозначим собственное значение полученного таким образом уравнения с постоянными коэффициентами через ρ . При этом имеем $X^{(4)} = \Delta X$, где введено обозначение (при $a > 0$) $\Delta = \rho(1 - a)^{-1} - \gamma(n)(1 - a)^2$, (при $a < 0$) $\Delta = \rho - \gamma(n)$.

Второе собственное значение этого уравнения для краевых условий (2.9), как известно, будет $\Lambda_2 = (7.853 L^{-1})^4$, следовательно,

$$\rho_2 = (7.853 L^{-1})^4 (1 - a) + \gamma(n) (1 - a)^2, \quad (a > 0) \quad (3.2)$$

$$\rho_2 = (7.853 L^{-1})^4 + \gamma(n), \quad (a < 0) \quad (3.3)$$

На основании теоремы сравнения [4] для всех собственных значений ρ_k и λ_k имеем $\rho_k < \lambda_k$.

Далее нетрудно показать, что поставленная задача на собственные значения (1.3), (2.9), (3.1) является самосопряженной и полностью определенной при $|a| < 1$.

Перейдем к непосредственному решению задачи (1.3), (2.9), (3.1). На основании вышесказанного будем исходить из функции X_1 , которая удовлетворяет граничным условиям (2.9) и имеет вид (3.4). Константа C_2 определяется из условия, чтобы функция $X_0(\alpha)$ удовлетворяла одному из главных граничных условий. Итак, введя обозначение $\alpha_1 = aL^{-1}$, имеем

$$X_1 = C_1 \alpha_1^2 (\alpha_1^2 - 1)^2 + 2C_2 \sin^2 \pi \alpha_1 \quad (3.4)$$

$$X_0 = [(1 - a \sin \pi \alpha_1) X_1^{(2)}]^{(2)} + \gamma(n) (1 - a \sin \pi \alpha_1)^2 X_1 \quad (3.5)$$

Подставляя выражение $X_1(\alpha_1)$ в (3.5) и удовлетворяя условию $X_0(0) = 0$, либо $X_0(1) = 0$, получаем в силу симметрии одно и то же соотношение

$$C_2 = 4!(1 + a\pi) \left(\frac{L}{2\pi}\right)^4 C_1 \quad (3.6)$$

Следовательно, после подстановки выражений (3.4), (3.6) в (3.5) получаем функцию $X_0(\alpha_1)$, которая удовлетворяет условиям $X_0(0) = X_0(L) = 0$.

Далее на основании (2.6) нетрудно определить $a_0(n)$, $a_1(n)$, $a_2(n)$, вычислив соответствующие интегралы. В качестве примера приведем случай, когда $a = -0.5$. При этом получаем

$$\rho_1(n) = \gamma(n) \cdot 3.07665 + L^{-4} \cdot 544.1816 + \frac{107.1217 L^{-4}}{\gamma(n) L^{-4} \cdot 2.5604 \cdot 10^{-3} + 0.5271}$$

$$\rho_2(n) = \gamma(n) \cdot 3.0244 + L^{-4} \cdot 622.6567$$

тогда, согласно соотношению (2.7), имеем

$$t = 3.0244 \varepsilon (n^2 - 1) + 622.6567 L^{-4} n^{-4} (n^2 - 1)^{-1} \quad (3.7)$$

Первоначально рассмотрим оболочки средней длины, для которых $(\pi R l^{-1})^2 \varepsilon^{-1/2} \gg 1$. При этом будем считать, что $n^2 \gg 1$. Отметим, что это допущение не существенно для критической нагрузки оболочки средней длины. Тогда соотношение (3.7) примет вид

$$t = 3.0244 \varepsilon n^2 + 622.6567 L^{-4} n^{-6}$$

Отсюда получаем следующие критические значения для n_* и t_* :

$$n_*^2 = 1.05395 \varepsilon^{-1/4} \theta, \quad t_* = 4.25015 \varepsilon^{3/4} \theta, \quad \theta = 4.73 L^{-1} \quad (3.8)$$

Оценим точность полученного значения. Обратимся к оценке (2.8), где n_* определяется выражением (3.8), тогда получаем

$$4.24016 \varepsilon^{3/4} \theta \leq t_* \leq 4.25015 \varepsilon^{3/4} \theta, \quad t_* = \frac{q^* R}{Eh} \quad (3.9)$$

Отсюда нетрудно видеть, что расхождение между нижним и верхним пределами будет менее 0.24%. Следовательно, во втором приближении мы получаем значение критической нагрузки (3.8), которое отличается от точного значения менее, чем на 0.24%. Это расхождение можно уменьшить за счет оценки (3.9), если взять среднее значение между нижним и верхним пределами, при этом $t_* = 4.2452 \varepsilon^{3/4} \theta$.

Полученное выражение отличается от точного на величину менее 0.12%. Под точным значением здесь имеется в виду точное решение задачи (1.3), (2.9).

Исследуем теперь длинные оболочки ($a = -0.5$). Рассмотрим, например, оболочки, для которых выполняется условие $(\pi R l^{-1})^2 = 10 \varepsilon^{1/2}$. Тогда выражение (3.7) примет вид

$$t = [3.0244(n^2 - 1) + 639.2182 n^{-4} (n^2 - 1)^{-1}] \varepsilon$$

Наименьшее значение t реализуется при $n_* = 2$. Подставляя это значение n_* в (3.10), получаем $t_* = 22.3902 \varepsilon$. Оценим точность этого значения. Обращаясь к оценке (2.8), при $n_* = 2$ получаем

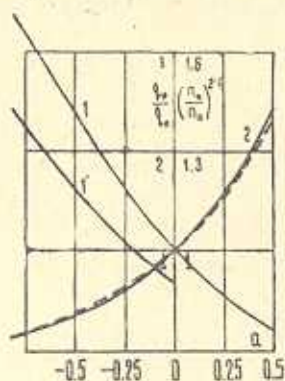
$$22.0058 \varepsilon \leq t_* \leq 22.3902 \varepsilon$$

Отсюда нетрудно видеть, что расхождение между верхним и нижним пределами будет менее 1.72%. Уточним полученный результат, беря среднее значение. При этом получаем

$$t_* = 22.198 \varepsilon \quad (3.10)$$

Это значение отличается от точного на величину менее 0.86%. Аналогичным путем нетрудно определить критические нагрузки и для иных значений a , однако надо заметить, что приведенное решение практически приемлемо только для интервала $-1 \leq a \leq 0.5$, если мы ограничимся точностью не более 2%. При меньшей точности этот интервал можно расширить.

На фиг. 1 для оболочек средней длины приведена кривая 1, зависимость q^*/q_0^* от параметра a и кривая 2 зависимости n_*^2/n_0^2 от a (характеризую-



Фиг. 1.

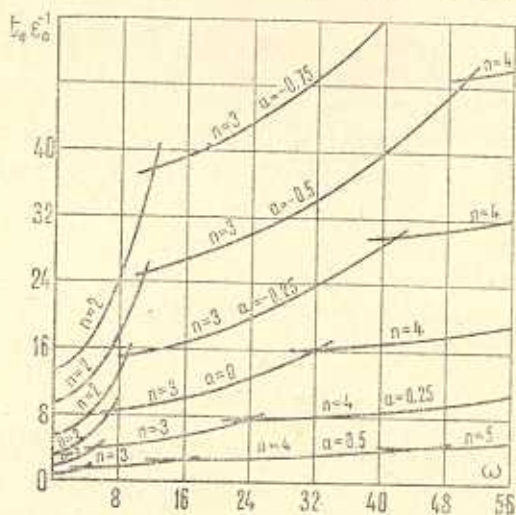
щего амплитуду изменения толщины); q^* , q_0^* — критическое давление для оболочек переменной и постоянной толщины; n_* , n_0 — соответственно критическое число волн; $n_0^2 = \sqrt[4]{3} \varepsilon^{-1/4} \theta$, $q_0^* R/Eh = 1.755 \varepsilon^{3/4} \theta$. Кривую 2 в интервале ($-1 \leq a \leq 0.5$) с достаточной для практики точностью можно аппроксимировать кривой (пунктирная кривая фиг. 1)

$$(n_*/n_0)^2 = (1-a)^{-1/2} \quad (3.11)$$

В работе [7] для оболочек средней длины исследована такая же задача в случае $a < 0$, когда края оболочки шарнирно оперты (фиг. 1, кривая 1'). При сравнении кривых 1 и 1', нетрудно видеть, что критическая нагрузка существенно увеличивается при закреплении краев в продольном направлении. При выводе формул критической нагрузки для оболочек средней длины было сделано допущение $n_*^2 \gg 1$. Предполагаем, как обычно, что это условие выполняется при $n_* \gg 4$ [3]. Тогда, подставляя в выражение (3.11) $n_* \gg 4$, получаем следующее неравенство:

$$\frac{l}{R} \leq 0.5k \left(\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{1-a} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{h} \right)^{1/2}, \quad k = 1.5 \quad (3.12)$$

ограничивающее l сверху для оболочек средней длины. Условие (3.12) эквивалентно условию $(\pi R l^{-1})^2 \varepsilon^{-1/2} > 60(1-a)$. На фиг. 2 для длинных



Фиг. 2.

оболочек приведены кривые изменения безразмерной критической нагрузки $t_* \varepsilon^{-1}$ в зависимости от безразмерного геометрического параметра

$\omega = (\pi R l^{-1})^2 \varepsilon^{1/2}$ для фиксированных значений a . При $\omega \geq 60(1-a)$ приведенные кривые дают значения $t_* \varepsilon^{-1}$, которые стремятся к значениям $t_* \varepsilon^{-1}$, полученным на основании формул для оболочек средней длины, тем самым соотношение (3.12) подтверждается также графически.

Условием применимости полубезмоментной теории для цилиндрических оболочек переменной в осевом направлении толщины являются соотношения [2]

$$\left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D(x) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \right| \ll \left| D(x) \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} \right|, \quad D(x) = \frac{h^3(x)}{12 R^3 (1-\nu^2)}$$

которые на основании выражения (1.3) сводятся к следующим:

$$X^{(2)} \ll n_*^2 X, \quad (DX)^{(2)} \ll n_*^2 (DX) \quad (3.13)$$

где n_* определяется равенством (3.11). Учитывая приближенное решение (3.4), а также выражение $D(x)$, для вышерассмотренного интервала $-1 < a \leq 0.5$ на основании расчетов получаем

$$X^{(2)}/X < 2\delta^2, \quad (DX)^{(2)}/(DX) \leq 2\delta^2 \quad (3.14)$$

за исключением малых зон, примыкающих к краям оболочки. Тогда соотношения (3.13) сводятся к условию $2\delta^2 \ll n_*^2$. Подставляя сюда выражения δ и n_* , на основании (3.8), (3.11) получаем

$$\frac{l}{R} \geq M_0 k \left(\frac{1-a}{\sqrt{1-\nu^2}} \right)^{1/2} \left(\frac{h}{R} \right)^{1/2}, \quad k = 1.5 \quad (3.15)$$

В работе [10] в случае шарнирного закрепления краев оболочки постоянной толщины ($k=1, a=0$) получена аналогичная оценка, при этом $M_0=15$. Используя это значение M_0 для неравенства (3.15), получаем условия применимости полубезмоментной теории оболочек переменной толщины, ограничивающее l снизу.

4. Поместив начало координат в середине образующей оболочки, рассмотрим следующий случай изменения толщины и давления (симметричные относительно середины оболочки)

$$h(x_1) = h [1 + a(1 - x_1^2)], \quad q(x_1) = q [1 - b(1 - x_1^2)]^{-1}, \quad x_1 = xL \quad (4.1)$$

L — половина длины оболочки. Поставленная задача на собственные значения является самосопряженной и полностью определенной при $a \geq 0, 0 \leq b < 1$.

Удовлетворяя граничным условиям (2.9), будем искать $X_1(x_1)$ в следующем виде:

$$X_1 = C_1 L^4 (x_1^2 - 1)^2 + C_2 L^6 (x_1^2 - 1)^3 \quad (4.2)$$

Тогда на основании равенства (2.5) получаем следующее выражение для X_0 , (где $\alpha_1 = 1 + a, b_1 = 1 - b$):

$$X_0 = \{[(\alpha_1 - \alpha_1^2) X_1^{(2)}] + \gamma(n) (\alpha_1 - \alpha_1^2)^3 X_1\} (b_1 + b_1^2) \quad (4.3)$$

Подставляя выражения (4.2) в (4.3) и удовлетворяя условиям $X_0(1)=0$, либо $X_0(-1)=0$, получаем

$$C_2 = gL^{-2}C_1, \quad g = -\frac{24-112a}{288-192a} \quad (4.4)$$

Следовательно, после подстановки выражений (4.2), (4.4) в соотношение (4.3) имеем функцию $X_0(\alpha_1)$, которая в силу симметрии удовлетворяет условиям $X_0(1) = X_0(-1) = 0$. Далее на основании (2.6) легко определить соответствующие отношения Шварца. Полученные таким образом выражения, в общем виде, приводить не будем, ввиду их громоздкости.

Рассмотрим первоначально оболочку постоянной толщины, находящуюся под действием переменного давления ($a = 0, b \neq 0$), например, случай $b = 0.5$ (при этом наибольшее значение давления в середине оболочки в два раза больше, чем у края)

$$\mu_1(n) = \gamma(n) \cdot 0.550121 + L_1^{-4} 18.36829 + \frac{9.8731 L^{-8}}{\gamma(n) \cdot 0.25606 + L^{-4} \cdot 8.17315}$$

$$\mu_2(n) = \gamma(n) \cdot 0.544477 + L^{-4} \cdot 17.37904$$

Тогда, на основании (2.7)

$$t(n) = 0.544477 \varepsilon (n^2 - 1) + 278.0646 n^{-4} (n^2 - 1)^{-1} L^{-4} \quad (4.5)$$

Отсюда, подобно предыдущему случаю, для оболочек средней длины имеем

$$n_*^2 = 1.32269 \varepsilon^{-1/4} \theta, \quad 0.94214 \varepsilon^{3/4} \theta \leq t_* \leq 0.96023 \varepsilon^{3/4} \theta$$

Если взять среднее значение между верхним и нижним пределами, то получим следующее выражение:

$$t_* = 0.95119 \varepsilon^{3/4} \theta, \quad t_* = \frac{q^* R}{Eh} \quad (4.6)$$

которое отличается от точного значения на величину менее 1%.

В рассматриваемом случае $b = 0.5$ наибольшее значение давления — $\max q(0) = 2q$, следовательно, безразмерная амплитуда $\max t_*$ будет $\max t_* = 2t_* = 1.90238 \varepsilon^{3/4} \theta$. Сравним это значение с критическим значением равномерно распределенного давления $(t_*)_0$ [3]

$$\max t_*/(t_*)_0 = 1.084, \quad (t_*)_0 = 1.755 \varepsilon^{3/4} \theta \quad (4.7)$$

В то же время практический интерес представляет сравнение полученного критического значения (4.6) с критическим значением осредненного давления $(t_*)_*$. На основании (4.1) получаем

$$(t_*)_*/(t_*)_0 = \sqrt{bb_1} (\text{arc tg } \sqrt{bb_1^{-1}})^{-1} \quad (4.8)$$

Для $b = 0.5$ отсюда имеем $(t_*)_s = 0.6366 (t_*)_0$, тогда как из выражения (4.6) получаем $t_* = 0.54199 (t_*)_0$. Следовательно, значение $(t_*)_s$ больше t_* на 17.5%, то есть осреднение давления приводит к сравнительно ощутимому завышению критического значения t .

Рассмотрим теперь длинные оболочки ($a = 0, b = 0.5$) с вышеприведенными размерами $(\pi R l^{-1})^2 = 10 \varepsilon^{1/2}$. В данном случае на основании (4.5), (2.6) получаем $4.6383 \varepsilon \leq t_* (3) \leq 4.7963 \varepsilon$. Отсюда имеем $t_* = 4.7173 \varepsilon$, которое отличается от точного значения на величину менее 0.6%.

Сравним критическую амплитуду давления $\max t_*$ с критическим значением равномерно распределенного давления (для оболочки с вышеприведенными размерами) $(t_*)_{00}$

$$\max t_* = 2t_* = 9.4346 \varepsilon, \quad (t_*)_{00} = 8.793 \varepsilon, \quad \max t_*/(t_*)_{00} = 1.076$$

Далее, рассмотрим случай оболочки переменной толщины $a \neq 0$, находящейся под действием постоянного давления $b = 0$. Например, рассмотрим случай $a = 0.5$. При этом для оболочек средней длины имеем

$$n_*^2 = 1.05261 \varepsilon^{-1/4} \theta, \quad 4.2865 \varepsilon^{3/4} \theta \leq t_* \leq 4.3170 \varepsilon^{3/4} \theta$$

Взяв среднее значение между нижним и верхним пределами, получаем следующую формулу для критической нагрузки:

$$t_* = 4.3017 \varepsilon^{3/4} \theta \quad (4.9)$$

которая отличается от точной на величину менее 0.35%. Полученное значение (4.9) сравним с значением критической нагрузки оболочки осредненной толщины. Формула для критической нагрузки оболочки осредненной толщины на основании (4.1) будет

$$(t_*)_c = \left(1 + a \frac{2}{3}\right)^{5/2} (t_*)_0, \quad (t_*)_0 = 1.755 \varepsilon^{3/4} \theta \quad (4.10)$$

Для нашего случая $a = 0.5$, $(t_*)_c = 2.053 (t_*)_0$. Из формулы же (4.9) имеем $t_* = 2.4512 (t_*)_0$. Отсюда получаем, что $(t_*)_c$ меньше t_* на 19.4%. Следовательно, осреднение толщины приводит к ощутимому занижению критической нагрузки.

Рассмотрим теперь для этого случая ($a = 0.5, b = 0$) длинные оболочки с вышеприведенными размерами $(\pi R l^{-1})^2 = 10 \varepsilon^{1/2}$. При этом имеем $n_* = 2$, $t_* = 22.2925 \varepsilon$. Полученное значение отличается от точного на основании оценки (2.8) на величину менее 1.6%. Формула для критической нагрузки длинной оболочки осредненной толщины имеет вид $(t_*)_c = \left(1 + a \frac{2}{3}\right)^3 (t_*)_{00}$, $(t_*)_{00} = 8.793 \varepsilon$. Следовательно, при $a = 0.5$ $(t_*)_c = 20.8426 \varepsilon$. Если сравнить это значение с полученным значением $t_* = 22.2925 \varepsilon$, то нетрудно видеть, что оно меньше на 6.5%, тогда как для оболочек средней длины мы получили расхож-

дение более, чем на 19.4%. Следовательно, по мере увеличения длины оболочка переменной толщины становится менее жесткой в смысле устойчивости.

Далее, исследуем случай оболочки переменной толщины, находящейся под действием переменного давления $a \neq 0$, $b \neq 0$. Рассмотрим, например, случай $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, то есть, когда толщина и давление в середине оболочки увеличиваются в 1.5 раза в сравнении со значением у края. При этом для оболочки средней длины, подобно выше рассмотренным случаям, получаем

$$n_*^2 = 1.0625 \varepsilon^{-1/4} \theta, \quad t_* = 2.9923 \varepsilon^{-3/4} \theta \quad (4.11)$$

Полученное выражение критической нагрузки на основании оценки (2.8) отличается от точного на величину менее 1.1%. Сравним полученное значение (4.11) с критическим осредненным давлением оболочки осредненной толщины $(t_*)_{s, \varepsilon}$ для $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$. При этом получаем $t_*/(t_*)_{s, \varepsilon} = 1.08$.

Рассмотрим теперь длинные оболочки с вышеприведенной зависимостью $(\pi R l^{-1})^2 = 10 \varepsilon^{1/2}$. При этом имеем $n_* = 2$, $t_* = 15.6754 \varepsilon$.

Приведенное выражение критической нагрузки на основании оценки (2.8) отличается от точного на величину менее 2.2%. При этом получаем $t_*/(t_*)_{s, \varepsilon} = 0.98$.

Аналогичным путем нетрудно определить критические нагрузки для иных a и b , однако надо заметить, что если мы ограничиваемся точностью не более 3%, то приведенное решение приемлемо только для интервала $0 \leq a, b \leq 0.5$.

Отметим, что, с другой стороны, сама полубезмоментная теория справедлива для сравнительно небольших показателей изменчивости толщины и внешней нагрузки. Поэтому для случаев, когда мы с успехом можем ограничиться начальными приближениями и привести оценку полученного результата, такой путь решения представляет определенный интерес.

Тбилисский математический институт им. А. М. Размадзе

АН Грузинской ССР

Поступила 1 IX 1977

У. Ы. ЧИРЧИДЗЕ

ԱՆՀԱՎԱՍՍԱՐԱԶՄՔ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱՅ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՄԲ
ԹԱՎԱՆԹԻ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ԲԵՌԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՀԱԶՈՐԿԱԿԱՆ
ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Ցույց է արվում փոփոխական հաստոթյամբ գլանային թաղանթների կառուցման խնդիրների լուծման ճանապարհը, երբ թաղանթները գտնվում են փոփոխական արտաքին ճնշման ազդեցության տակ:

Օգտագործվում է հաջորդական մոտավորությունների մեթոդը, որը հնարավորություն է տալիս կրիտիկական բեռի որոշման համար բերել երկկողմանի գնահատականներ:

Գիտարկվել են մասնակի խնդիրներ:

ON THE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS FOR DETERMINING CRITICAL VARIABLE LOADS, ACTING ON SHELLS OF VARIABLE THICKNESS

S. N. KUKUJANOV

S u m m a r y

The way for solving problems on stability of cylindrical shells of variable thickness, acted upon by a variable load (in the axial direction), is given on the basis of the method of successive approximations. The estimates of upper and lower bounds for the critical load are presented. Some particular examples are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. Э. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ, 1944, т. 8, № 2.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1967.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., Физматгиз, 1967.
4. Колатц А. Задачи на собственные значения. М., Изд. «Наука», 1968.
5. Андреев А. В., Оболян И. И. Устойчивость цилиндрических оболочек переменной толщины. Прикл. мех., 1968, т. 4, в. 5.
6. Андреев А. В., Оболян И. И. Применение метода теории возмущений для определения критических нагрузок неравномерно нагруженных цилиндрических оболочек переменной толщины. Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории об. и пл., 1971.
7. Ершов В. В., Рябцев В. А., Шалиткин В. А. Об устойчивости оболочек вращения переменной толщины. Тр. X Всесоюз. конф. по теории об. и пл., 1975.
8. Даревский В. М. Устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки переменной толщины при переменном внешнем давлении. Тр. X Всесоюз. конф. по теории об. и пл., 1975.
9. Мочалин А. А. Устойчивость полубезмоментной цилиндрической оболочки переменной толщины. Изв. высших учебн. завед., Машиностр., 1975, № 11.
10. Зюзин В. А. Влияние условий закрепления торцов оболочки на величину критического внешнего давления. Тр. VI Всесоюз. конф. по теории об. и пл., 1966.