

Э. Х. ГРИГОРЯН

О КОЛЕБАНИИ МАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЫ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ  
 СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛОЙ

В работе рассматриваются колебания изотропной безграничной среды под действием сосредоточенной гармонической силы и при наличии однородного магнитного поля, параллельного плоскости движения среды.

С помощью преобразования Фурье строится решение, характеризующее колебания магнитоупругой среды под действием сосредоточенной гармонической силы. Далее при помощи метода Лайтхилла [1] при больших расстояниях от точки приложения силы получены асимптотические формулы для перемещений в зависимости от интенсивности внешнего магнитного поля. Кроме того, из рассматриваемой стационарной задачи, отличным от традиционного образом, получено решение нестационарной задачи о сосредоточенном импульсе.

Задачи о движении безграничной магнитоупругой среды, когда в ней действуют объемные силы типа сосредоточенных импульсов, рассмотрены в работе [2].

Аналогичные нестационарные задачи для анизотропных тел при отсутствии магнитного поля исследованы в работах [3—5].

1. Отнесем прямоугольную систему координат к идеально проводящей упругой среде и рассмотрим движение данной среды при наличии однородного магнитного поля  $\vec{H}(H_0, 0, 0)$ .

Линеаризованные уравнения, описывающие движение указанной магнитоупругой среды, когда в ней действуют объемные силы, не зависящие от  $z$  и имеющие нулевую составляющую по оси  $z$ , в случае пренебрежения токами смещения имеют вид [6, 2]

$$\begin{aligned} c_1^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} + (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho} X(x, y, t) &= \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} \\ c_4^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + c_3^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} + (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho} Y(x, y, t) &= \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}, \quad c_3^2 = c_1^2 + a^2, \quad c_4^2 = c_2^2 + a^2, \quad a^2 = \frac{\mu H_0^2}{4\pi\rho}$$

$\lambda$  и  $G$  — постоянные Лямэ,  $\rho$  — плотность упругой среды,  $\mu$  — магнитная проницаемость среды,  $c_1$  и  $c_2$  — скорости распространения волн расширения и искажения в среде,  $a$  — скорость Альфвена.

Пусть  $X = 0$ ,  $Y(x, y, t) = \delta(x) \delta(y) e^{-i\omega t}$ . В таком случае  $u^{(n)}(x, y, t)$  ( $n = 1, 2$ ) можно искать в виде

$$u^{(n)}(x, y, t) = u_n(x, y) e^{-i\omega t}, \quad 0 < \omega$$

Подставляя выражения  $u^{(n)}(x, y, t)$  в (1.1), для определения  $u_n(x, y)$  получим

$$\begin{aligned} c_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \omega^2 u_1 &= 0 \\ c_4^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + c_3^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \omega^2 u_2 + \frac{1}{\rho} \delta(x) \delta(y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Построим то решение уравнения (1.1), которое при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  представляет уходящую волну. С этой целью применим к обеим частям дифференциальных уравнений (1.2) преобразование Фурье по переменной  $x$ . В результате придем к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение которой при  $y \neq 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= -\frac{i(c_1^2 - c_2^2)\sigma}{2\mu c_3^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \operatorname{sgn} y (Ae^{-\gamma_1|y|} + Be^{-\gamma_1|y|} + Ce^{\gamma_1|y|} + De^{\gamma_1|y|}) \\ \bar{u}_2 &= \frac{1}{2\mu c_3^2} \left[ \frac{c_1^2(\sigma^2 - k_1^2) - c_2^2\gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} (Ae^{-\gamma_1|y|} + Ce^{\gamma_1|y|}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_1^2(\sigma^2 - k_1^2) - c_2^2\gamma_1^2}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} (Be^{-\gamma_1|y|} + De^{\gamma_1|y|}) \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь

$$\bar{u}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad \bar{u}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u_2(x, y) e^{i\sigma x} dx, \quad -\infty < \sigma < \infty$$

$$\gamma_n(\sigma) = \sqrt{\frac{Z(\sigma) + (-1)^{n+1} \sqrt{U(\sigma)}}{2c_3^2 c_2^2}}, \quad (n = 1, 2)$$

$$U(\sigma) = Z^2(\sigma) - 4c_1^2 c_2^2 c_3^2 c_4^2 (\sigma^2 - k_1^2) (\sigma^2 - k_2^2) \quad k_2 = \frac{\omega}{c_4}, \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}$$

$$Z(\sigma) = -(c_3^2 + c_2^2) \omega^2 + (c_1^2 c_4^2 + c_2^2 c_3^2) \sigma^2$$

Теперь для получения нужного решения однозначные ветви функций  $\gamma_1(\sigma)$ ,  $\gamma_2(\sigma)$  выберем таким образом, чтобы  $\gamma_n(\sigma) \rightarrow |\sigma|$  ( $n = 1, 2$ ) при  $\sigma \rightarrow \pm \infty$ . Отметим, что точки  $\pm k_1$ ,  $\pm k_2$ ,  $\pm k_3 = \pm \omega(c_3 - c_2)/a(c_1^2 - c_2^2)^{1/2}$ ,  $\pm k_4 = \pm \omega(c_3 + c_2)/a(c_1^2 - c_2^2)^{1/2}$  являются точками ветвления для функций  $\gamma_n(\sigma)$ , причем  $\pm k_3$ ,  $\pm k_4$  являются точками ветвления



второго порядка для внутреннего радикала в выражениях функций  $\gamma_n(\sigma)$ . На этом вопросе мы подробно остановимся в дальнейшем. Аналогично, как в [7], разрезы, выделяющие однозначные ветви этих функций, должны быть проведены так, чтобы вещественная ось обходила точки ветвления  $k_1, k_2, k_3, k_4$  снизу, а точки  $-k_1, -k_2, -k_3, -k_4$  — сверху.

На основании вышесказанного для определения нужного решения надо в формулах (1.3) подставить  $C=D=0$ . Остальные постоянные определяются при удовлетворении соответствующим уравнениям при  $y=0$ . Окончательно для  $u_n(x, y)$  получаем следующие выражения:

$$u_1(x, y) = \frac{i}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{(c_1^2 - c_2^2)\sigma}{2c_2^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \exp[-i(\sigma x - i\gamma_n(\sigma)|y|)] d\sigma \operatorname{sgn} y$$

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{c_1^2(\sigma^2 - k_1^2) - c_2^2\gamma_n^2}{2c_2^2\gamma_n(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \exp[-i(\sigma x - i\gamma_n(\sigma)|y|)] d\sigma$$

Теперь приступим к исследованию функций  $\gamma_n(\sigma)$  ( $n=1, 2$ ), обладающих вышеуказанными свойствами.

Очевидно, что точки  $\pm k_n$ ,  $\pm k_4$  являются точками ветвления внутреннего радикала в выражениях функций  $\gamma_n(\sigma)$  ( $n=1, 2$ ). При достаточно малых  $a$   $Z(\pm k_1) < 0$ ,  $Z(\pm k_2) > 0$ . Отсюда следует, что при достаточно малых  $a$  точки  $\pm k_1, \pm k_2$  будут соответственно точками ветвления второго порядка для внешнего радикала [8] функций  $\gamma_1(\sigma), \gamma_2(\sigma)$ . Следовательно, имеют место разложения

$$\gamma_n(\sigma) = a_n^{\pm} \sqrt{\sigma \pm k_n} + \dots, \quad \sqrt{\sigma - k_n} = -i\sqrt{k_n - \sigma}$$

$$\sqrt{-\sigma - k_n} = -i\sqrt{\sigma + k_n}$$

$$a_n^- = \sqrt{(-1)^n \frac{2\omega^2(c_1^2 - c_2^2)}{Z(k_n)}}, \quad a_n^+ = -ia_n^-, \quad (n=1, 2)$$

$$Z(k_2) = \omega^2 [c_2^2(c_1^2 - c_2^2) - a^2 c_2^2 - a^4]$$

$$Z(k_1) = \omega^2 [c_2^2 a^2 - c_1^2(c_1^2 - c_2^2)]$$

Очевидно, что эти разложения верны только при тех значениях  $a$ , которые находятся в интервале  $0 \leq a < a_1$ , где  $a_1 < a_2$  определяется из уравнения

$$Z(k_2) = 0, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{c_2(\sqrt{4c_1^2 - 3c_2^2} - c_1)}$$

а  $a_2$  — из уравнения

$$Z(k_1) = 0, \quad a_2 = \frac{c_1}{c_2} \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \quad (1.4)$$

Отсюда непосредственно следует, что при  $a = a_1$  точки  $\pm k_2 = \pm k_3$  являются точками ветвления четвертого порядка для  $\gamma_n(\sigma)$ , а точки  $\pm k_1$  остаются точками ветвления второго порядка для  $\gamma_1(\sigma)$ . Значит,

$$\gamma_n(\sigma) = b_n^{\pm} \sqrt[4]{\sigma \pm k_2} + \dots, \quad \sqrt[4]{\sigma - k_2} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt[4]{k_2 - \sigma}$$

$$\sqrt[4]{-\sigma - k_2} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt[4]{k_2 + \sigma}$$

$$b_2^- = e^{-i\frac{\pi}{4}} b_1^+, \quad b_2^+ = -i b_1^+, \quad b_1^- = e^{-i\frac{\pi}{4}} b_1^+$$

$$b_1^+ = \sqrt[4]{\frac{\omega^3 [a^4 + 2c_2(c_3 + c_2)a^2 + (c_3 + c_2)^2 c_2^2]}{2c_4^3}}$$

Так как при  $a = a_1$   $Z = 0$ , то отсюда следует, что при  $a_1 < a < a_2$  ( $a \neq \sqrt{c_1^2 - c_2^2}$ ),  $Z(k_2) < 0$  и  $Z(k_1) < 0$ , следовательно,  $\gamma_2(\sigma)$  точек ветвления не имеет, а для функции  $\gamma_1(\sigma)$  точки  $\pm k_1, \pm k_2$  будут точками ветвления второго порядка. Следовательно,

$$\gamma_1(\sigma) = d_n^{\pm} \sqrt{\sigma \pm k_n} + \dots$$

$$d_1^- = \sqrt{\frac{2\omega^3(c_1^2 - c_4^2)}{c_1 Z(k_1)}}, \quad d_2^- = \sqrt{\frac{2\omega^3(c_1^2 - c_4^2)}{c_4 Z(k_1)}}, \quad d_n^+ = -i d_n^- \quad (n=1, 2)$$

При  $a = \sqrt{c_1^2 - c_2^2}$  точки  $\pm k_1 = \pm k_2$  уже не будут точками ветвления для  $\gamma_1(\sigma)$ . В этом случае  $\gamma_1(\sigma)$  в окрестности точек  $\pm k_1$  имеет разложение следующего вида:

$$\gamma_{11}(\sigma) = e |\sigma \pm k_1| + \dots, \quad e = -i \frac{8\omega^2 a^2}{c_1^2 - c_2^2}$$

В случае  $a = a_2$  (из 1.4) следует, что точки  $\pm k_1 = \pm k_3$  будут точками ветвления четвертого порядка для функций  $\gamma_n(\sigma)$  ( $n = 1, 2$ ), кроме того, точки  $\pm k_2$  опять будут точками ветвления второго порядка для  $\gamma_1(\sigma)$ . Таким образом,

$$\gamma_n(\sigma) = e_n^{\pm} \sqrt[4]{\sigma \pm k_1} + \dots, \quad \sqrt[4]{\sigma - k_1} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt[4]{k_1 - \sigma}$$

$$\sqrt[4]{-\sigma - k_1} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt[4]{k_1 + \sigma}$$

$$e_2^+ = \sqrt[4]{2k_1^3 [a^4 + 2c_2(c_2 + c_3)a^2 + (c_2 + c_3)^2 c_2^2]}$$

$$e_2^- = e^{i\frac{\pi}{4}} e_2^+, \quad e_1^- = e^{-i\frac{\pi}{4}} e_2^+, \quad e_1^+ = -i e_2^+$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что при  $a_3 < a < \infty$  точки  $\pm k_1, \pm k_2$  являются соответственно точками ветвления второго порядка для функций  $\gamma_2(\sigma), \gamma_1(\sigma)$ .

Зная особые точки функций  $\gamma_n(\sigma)$  при разных значениях  $a$ , методом Лайтхилла можно получить асимптотические выражения для  $u^{(2)}(x, 0, t)$ , поскольку  $u^{(1)}(x, 0, t) \approx 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$

$$1. 0 \leq a < a_1$$

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{c_2^2 a_2^-}{4\sqrt{\pi} G \omega c_4 |x|^{1/2}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_2 |x| - \frac{\pi}{4} \right) \right] +$$

$$+ \frac{A_2}{2\sqrt{\pi} |x|^{3/2}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_2 |x| - \frac{\pi}{4} \right) \right] +$$

$$+ B \frac{i}{2\sqrt{\pi} |x|^{3/2}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_1 |x| - \frac{\pi}{4} \right) \right] + O(|x|^{-5/2})$$

$$B = - \frac{c_1^2 c_2^2 (c_1^2 - c_2^2) a_1^-}{2G \omega^2 (c_1^2 - c_3^2) [(c_1^2 - c_3^2) c_1^2 - c_2^2 a_2^-]}$$

$$A_2 = \lim_{\sigma \rightarrow k_2} 2\sqrt{\sigma - k_2} \frac{d}{d\sigma} \left[ \sqrt{\sigma - k_2} \frac{d}{d\sigma} \sqrt{\sigma - k_2} u_2(\sigma) \right]$$

$$2. a = a_1$$

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{A_1 \Gamma(1/4)}{\sqrt{2} \pi |x|^{1/4}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_2 |x| - \frac{3\pi}{8} \right) \right] +$$

$$+ \frac{A_2 \sqrt{\pi}}{|x|^{1/2}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_2 |x| - \frac{\pi}{4} \right) \right] +$$

$$+ \frac{A_3 \Gamma(3/4)}{\sqrt{2} \pi |x|^{3/4}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_2 |x| - \frac{\pi}{8} \right) \right] -$$

$$- \frac{A_4 i \Gamma(1/4)}{4\sqrt{2} \pi |x|^{5/4}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_2 |x| - \frac{3\pi}{8} \right) \right] +$$

$$+ \frac{A_5 i}{2\sqrt{\pi} |x|^{3/2}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_2 |x| - \frac{\pi}{4} \right) \right] -$$

$$- \frac{3A_6 i \Gamma(3/4)}{4\sqrt{2} \pi |x|^{7/4}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_2 |x| - \frac{\pi}{8} \right) \right] +$$

$$+ B \frac{i}{2\sqrt{\pi} |x|^{3/2}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_1 |x| - \frac{\pi}{4} \right) \right] + O(|x|^{-9/4})$$

$$A_1 = \frac{\omega^2 \sqrt{2} (c_1^2 - c_4^2)}{2G c_4^2 c_3^2 (b_1^+)^3}, \quad \Gamma(z) - \text{гамма-функция}$$

Остальные коэффициенты не приводятся ввиду их громоздкости.



3.  $a_1 < a < a_3$ , но  $a \neq a_2$ .

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{A_1}{|x|^{1/2}} + \frac{A_2}{|x|^{3/2}} \right) \exp \left[ -i \left( \omega t - k_2 |x| - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \frac{Bi}{2\sqrt{\pi} |x|^{3/2}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_1 |x| - \frac{\pi}{4} \right) \right] + 0 (|x|^{-5/2})$$

$$A_1 = \frac{c_2^2 d_1^-}{4G\omega c_4}; \quad B = -\frac{c_1^2 c_2^2 (c_1^2 - c_2^2) d_2^-}{2GZ(k_1)(c_1^2 - c_4^2)}$$

$$A_2 = \lim_{\sigma \rightarrow k_2} 2\sqrt{\sigma - k_2} \frac{d}{d\sigma} \left[ \sqrt{\sigma - k_2} \frac{d}{d\sigma} \sqrt{\sigma - k_2} \bar{u}_2(\sigma) \right]$$

4.  $a = a_2$

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{c_1^2 c_2^2}{2G\omega (c_1^2 - c_2^2) \pi |x|} \exp \left[ -i (\omega t - k_1 |x|) \right] + 0 (|x|^{-2})$$

5.  $a = a_3$

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{A_1 \Gamma(3/4)}{\sqrt{2} \pi |x|^{3/4}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_1 |x| - \frac{\pi}{8} \right) \right] - \frac{A_2 i \Gamma(1/4)}{4\sqrt{2} \pi |x|^{5/4}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_1 |x| - \frac{3\pi}{8} \right) \right] + \frac{B}{\sqrt{\pi} |x|^{1/2}} \exp \left[ -i \left( \omega t - k_2 |x| - \frac{\pi}{4} \right) \right] + 0 (|x|^{-3/2})$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_2^2}{Gc_3^3 (e_2^+)^3}; \quad \Gamma(z) - \text{гамма-функция.}$$

Остальные коэффициенты не приводятся ввиду их громоздкости.

Случай  $a_3 < a < \infty$  аналогичен случаю  $0 \leq a < a_1$  и поэтому не обсуждается.

2. Представляет интерес также получение асимптотических формул для случая  $y \neq 0$ . Для этого случая, причем без ограничения общности, можно считать  $y > 0, x > 0$ . Приступим к исследованию функций

$$\lambda_n(x_n) = x_n \cos \theta - i \gamma_n(x_n) \sin \theta, \quad x_n = \sigma_n + i \tau_n, \quad (n = 1, 2) \quad (2.1)$$

$$(0 < \theta < \pi/2)$$

Функции  $\lambda_n(x_n)$  являются регулярными функциями комплексного переменного  $x_n$ , в соответствующим образом разрезанной комплексной плоскости  $x_n$ , отмеченной выше. Заметим также, что функции  $\lambda_n(x_n)$  — обратные к  $\lambda_n(x_n)$  алгебраические функции, поскольку они удовлетворяют алгебраическому уравнению четвертого порядка с полиномиальными коэффициентами, получающемуся из (2.1) простыми выкладами [8, 9].

Исследуем критические точки функций  $\lambda_n(x_n)$ , то есть нули функций  $\lambda'_n(x_n)$ . Легко видеть, что нули функций  $\lambda'_n(x_n)$  должны удовлетворять при каждом  $\theta$  уравнению

$$\operatorname{tg} \theta = \left( i \frac{d\gamma_n}{dx_n} \right)^{-1}, \quad (n=1, 2)$$

где

$$i \frac{d\gamma_n}{dx_n} = (-1)^n \frac{\alpha_n [(c_1^2 c_4^2 + c_2^2 c_3^2) \gamma_n^2 - c_1^2 c_4^2 (2\alpha_n^2 - k_1^2 - k_2^2)]}{i \gamma_n V U(\alpha_n)}, \quad (n=1, 2)$$

Отсюда следует, что рассматриваемые уравнения будут иметь решения только в том случае, если  $i \frac{d\gamma_n}{dx_n}$  будут вещественны. В зависимости от значения  $a$  рассмотрим следующие случаи.

1.  $0 \leq a \leq a_1$ . В этом случае числитель при  $-k_2 < \alpha_2 < 0$  в выражении  $i \frac{d\gamma_2}{dx_2}$  — положительный, а  $\gamma_2(\alpha_2)$  — отрицательно мнимый. Отсюда следует, что точки  $\alpha_2 = \alpha_{20}$  из интервала  $(-k_2, 0)$  являются нулями первого порядка функции  $\lambda'_2(\alpha_2)$ , поскольку, как легко видеть,  $\lambda''_2(\alpha_{20}) \neq 0$ , и им соответствуют значения  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Аналогично при  $0 < \theta < \pi/2$  точки  $-k_1 < \alpha_{10} < 0$  будут нулями первого порядка функции  $\lambda'_1(\alpha_1)$ . Тогда, в силу известной теоремы об обратной функции из теории аналитических функций [8], точки  $\lambda_{20} = \alpha_{20} \cos \theta - i \gamma_2(\alpha_{20}) \sin \theta$  будут точками ветвления второго порядка функции  $\alpha_2(\lambda_2)$ , где  $\alpha_2(\lambda_2)$  является решением уравнения (2.1), а точки  $\lambda_{10} = \alpha_{10} \cos \theta - i \gamma_1(\alpha_{10}) \sin \theta$  — точками ветвления второго порядка для  $\alpha_1(\lambda_1)$ .

2.  $a_1 < a < a_2$ . Так как числитель в выражении  $i \frac{d\gamma_2}{dx_2}$  при  $-k_2 < \alpha_{20} < 0$  положителен, то отсюда следует, что  $i \frac{d\gamma_2}{dx_2} > 0$  и, следовательно, в силу вышесказанного точки  $\lambda_{20} = \alpha_{20} \cos \theta - i \gamma_2(\alpha_{20}) \sin \theta$  будут точками ветвления второго порядка для функции  $\alpha_2(\lambda_2)$ . Поступая аналогичным образом, можно показать, что точки  $\lambda_{10} = \alpha_{10} \cos \theta - i \gamma_1(\alpha_{10}) \sin \theta$  при  $-k_1 < \alpha_{10} < 0$  будут точками ветвления второго порядка для  $\alpha_1(\lambda_1)$ . Помимо этого, точками ветвления для  $\alpha_1(\lambda_1)$  будут и точки  $\lambda_{10} = \alpha_{10} \cos \theta - i \gamma_1(\alpha_{10}) \sin \theta$ , где  $-k_3 < \alpha_{10} < -k_2$ , причем в этом интервале значений  $\gamma_1(\alpha_1)$  положительно мнима. Отметим, что в этом случае точкам  $-k_3$  и  $-k_2$  соответствует одно и то же значение  $\theta = 0$ . Отсюда следует, что при некотором значении  $\alpha_{10}$  из интервала  $(-k_3, -k_2)$  функция  $i \frac{d\gamma_1}{dx_1}$  достигает своего минимума и, следовательно,  $\operatorname{tg} \theta$  — своего максимума. Значит, при изменении  $\alpha_{10}$  от  $-k_2$  до значения  $\alpha_{10}^*$   $\theta$  изменяется от нуля до  $\theta^* = \operatorname{arctg} (i d\gamma_1/d\alpha_1)^{-1} \alpha_1 = \alpha_{10}^*$ , а при изменении  $\alpha_{10}$  от  $\alpha_{10}^*$  до  $-k_2$ ,  $\theta$  изменяется от  $\theta^*$  до нуля. Кроме



того, отсюда следует, что  $d^2\gamma_1(x_1)/dx_1^2 = 0$  при  $x_1 = x_{10}^*$ , указывающее на то, что точка  $\lambda_{10}^* = x_{10}^* \cos \theta^* - i\gamma_1(x_{10}^*) \sin \theta^*$  будет точкой ветвления третьего порядка для  $x_1(\lambda_1)$ . Единственность нуля  $d^2\gamma_1(x_1)/dx_1^2$  следует из того, что  $d^2\gamma_1(x_1)/dx_1^2 \neq 0$  при  $-k_3 < x_1 < -k_2$ , в чем нетрудно убедиться. Значит, каждому значению  $\theta$  из интервала  $(0, \theta^*)$  соответствуют три точки ветвления второго порядка функции  $x_1(\lambda_1)$ .

Аналогичными рассуждениями можно показать, что для остальных значений  $a$   $x_n(\lambda_n)$  ( $n = 1, 2$ ) имеют следующие точки ветвления:

$$\lambda_{10} = x_{10} \cos \theta - i\gamma_1(x_{10}) \sin \theta, \quad x_{10} \in (-k_2, 0), \quad x_{10} \in (-k_1, -k_3)$$

$$\text{для } x_1(\lambda_1), \quad a_2 < a < a_3$$

$$\lambda_{10} = x_{10} \cos \theta - i\gamma_1(x_{10}) \sin \theta, \quad -k_1 = -k_2 < x_{10} < 0 \text{ для } x_1(\lambda_1) \text{ при } a = a_2$$

$$\lambda_{10} = x_{10} \cos \theta - i\gamma_1(x_{10}) \sin \theta, \quad -k_2 < x_{10} < 0 \text{ для } x_1(\lambda_1) \text{ при } a_3 < a < \infty$$

$$\lambda_{20} = x_{20} \cos \theta - i\gamma_2(x_{20}) \sin \theta, \quad -k_1 < x_{20} < 0 \text{ для } x_2(\lambda_2) \text{ при } a_2 < a < a_3$$

$$\lambda_{20} = x_{20} \cos \theta - i\gamma_2(x_{20}) \sin \theta, \quad -k_1 < x_{20} < 0 \text{ для } x_2(\lambda_2) \text{ при } a_3 < a < \infty$$

причем при некотором  $x_{10}^{**} \in (-k_1, -k_3)$  точка  $\lambda_{10}^{**} = x_{10}^{**} \cos \theta^{**} - i\gamma_1(x_{10}^{**}) \sin \theta^{**}$ , где  $\theta^{**} = \arctg (id\gamma_1/dx_1)^{-1} x_1 = x_{10}^{**}$ , будет точкой ветвления третьего порядка в отличие от остальных точек, которые являются точками ветвления второго порядка. Нетрудно заметить также, что во всех случаях  $\lambda_{10} < 0, \lambda_{20} < 0$ .

Подробнее исследование функций, аналогичных  $\gamma_n(x_n)$ , с другой точки зрения, приводится в работе [5].

Имея в виду эти свойства функций  $x_n(\lambda_n)$ , ( $n=1, 2$ ), функции  $u_n(x, y)$  можно представить в виде

$$u_1(r, \theta) = \frac{i}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{(c_1^2 - c_2^2) a_n}{2c_3^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \frac{dx_n}{d\lambda} e^{-i\lambda r} d\lambda$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{1}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{c_1^2(x_n^2 - k_1^2) - c_2^2\gamma_n^2}{2c_3^2\gamma_n(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} \frac{dx_n}{d\lambda} e^{-i\lambda r} d\lambda \quad (2.2)$$

$$\lambda = a_n \cos \theta - i\gamma_n(x_n) \sin \theta, \quad 0 < \theta < \pi/2 \quad (n = 1, 2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

причем контуры интегрирования обходят точки ветвления  $-\lambda_{n0}$  снизу, а  $\lambda_{n0}$  — сверху. Эти представления функций  $u_n(r, \theta)$  позволяют по методам Лайтхилла получить асимптотические формулы этих функций  $y \neq 0$  и  $r \rightarrow \infty$ .

Для доказательства возможности такого представления функций  $u_1(r, \theta), u_2(r, \theta)$  ограничимся рассмотрением одного из интегралов, входящих в выражение  $u_2(r, \theta)$  (2.2), так как остальные получаются аналогичным об-



разом. Рассмотрим случай  $0 \leq a < a_1$ ,  $0 < \theta < \pi/2$ . После замены переменной  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  этот интеграл представляется в виде

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} A(\sigma) \exp[-i(\sigma \cos \theta - i\gamma_1(\sigma) \sin \theta) r] d\sigma$$

$$A(\sigma) = \frac{c_1^2(\sigma^2 - k_1^2) - c_2^2\gamma_2^2}{2c_3^2 G \gamma_3(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}$$

Рассматриваемый интеграл представим в виде суммы интегралов

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{-k_1} A(\sigma) \exp[-i(\sigma \cos \theta - i\gamma_2(\sigma) \sin \theta) r] d\sigma$$

$$I_2 = \int_{-k_1}^{k_1} A(\sigma) \exp[-i(\sigma \cos \theta - i\gamma_2(\sigma) \sin \theta) r] d\sigma$$

$$I_3 = \int_{k_1}^{\infty} \overline{A(\sigma)} \exp[i(\sigma \cos \theta + i\overline{\gamma_2(\sigma)} \sin \theta) r] d\sigma$$

и каждый из этих интегралов в отдельности приведем к искомому виду.

Рассмотрим сначала интеграл  $I_1$ . После замены

$$\lambda = \sigma \cos \theta - i\gamma_2(\sigma) \sin \theta \quad (2.3)$$

этот интеграл преобразуется к виду

$$I_1 = \int_L A(\sigma) e^{-\lambda r} \frac{d\sigma}{d\lambda} d\lambda$$

причем контур  $L$  (фиг. 1) обходит точки  $k_1'$ ,  $k_2'$ , соответствующие точкам  $k_1$ ,  $k_2$  на плоскости  $\lambda$ , указанным образом.

Теперь заметим, что функция  $\alpha_2(\lambda_2)$ , как решение уравнения (2.1), аналитична в области  $D$ , ограниченной контуром  $L$  и отрицательной полуосью  $-\infty < \lambda_2 < -k_2 \cos \theta$ , за исключением точки  $\lambda_{20}$ , которая, как показано выше, является точкой ветвления второго порядка для  $\alpha_2(\lambda_2)$ .

Очевидно, что значения  $\sigma_2(\lambda_2) = \sigma(\lambda)$  являются значениями функции  $\alpha_2(\lambda_2)$  на  $L$ .

Рассмотрим функцию  $A(\alpha_2) d\alpha_2/d\lambda_2$ . Эта функция аналитична в области  $D$ , за исключением точки  $\lambda_{20}$  и совпадает со значениями  $A(\sigma) d\sigma/d\lambda$  на  $L$ . Следовательно, независимо от того, какую именно ветвь функции  $\alpha_2(\lambda_2)$  мы выбираем, интеграл от  $A(\alpha_2) d\alpha_2/d\lambda_2$  по любому замкнутому контуру, не содержащему точки  $\lambda_{20}$ , равен нулю. Значит

$$\left\{ \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right\} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-\lambda_2 r} d\lambda_2 = 0$$

Здесь  $\int_{CA} A(\lambda_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 \rightarrow 0$  при  $\sigma_2 \rightarrow -\infty$

Действительно,

$$\left| \int_{CA} A(\lambda_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 \right| \leq \frac{1}{|\sigma_2 \cos \theta|} \int_{v_0}^0 \left| \alpha_2 A(\lambda_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} \right| e^{v r} dv$$

$$\lambda_2 = u + iv, \quad v_0 = -\gamma_2(\sigma_2) \sin \theta, \quad u = \sigma_2 \cos \theta = \sigma \cos \theta$$

Поскольку интеграл, стоящий в правой части неравенства, ограничен при  $|\sigma_2| \rightarrow \infty$  ввиду наличия экспоненциального члена в подынтегральном выражении, то отсюда следует наше утверждение.

Но, с другой стороны, при  $\sigma_2 \rightarrow -\infty$  точка  $A$  стремится к бесконечности по линии  $L$ , а точка  $C$  — к бесконечности по отрицательной полуоси. Отсюда следует, что

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-k_2 \cos \theta} A(\lambda_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 \quad (2.4)$$

где контур интегрирования обходит точку  $\lambda_{20}$  снизу, а  $\alpha_2(\lambda_2)$  определяется из уравнения

$$\lambda_2 = \alpha_2(\lambda_2) \cos \theta - i\gamma_2(\alpha_2) \sin \theta$$

Функция  $\alpha_2(\lambda_2)$ , определяющаяся из этого уравнения, характеризуется тем, что в окрестности  $\lambda_{20}$  имеет разложение

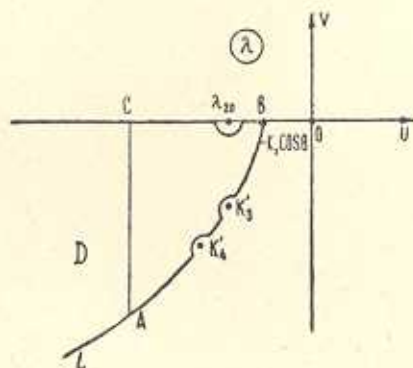
$$\alpha_2(\lambda_2) = \alpha_{20} - if \sqrt{\lambda_{20} - \lambda_2} + \dots, \quad f > 0$$

Действительно, поскольку каждому значению  $\lambda_2$  из интервала  $\lambda_{20} \leq \lambda_2 \leq -k_2 \cos \theta$  соответствуют два значения  $\alpha_2$ , то  $\alpha_2(\lambda_2)$  получает значения  $-k_2 \leq \alpha_2 \leq \alpha_{20}$  в точках  $\lambda_{20} \leq \lambda_2 \leq -k_2 \cos \theta$ , для которых  $\sqrt{\lambda_{20} - \lambda_2} = -i\sqrt{\lambda_2 - \lambda_{20}}$ , то есть при обходе точки  $\lambda_{20}$  снизу, а остальные значения в тех точках, для которых  $\sqrt{\lambda_{20} - \lambda_2} = i\sqrt{\lambda_2 - \lambda_{20}}$ , то есть при обходе точки  $\lambda_{20}$  сверху.

Далее, сделав аналогичную замену (2.3) в интеграле  $I_1$ , получим

$$I_1 = \int_{-k_2 \cos \theta}^{\lambda_{20}} A(\lambda_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \int_{\lambda_{20}}^{k_2 \cos \theta} A(\lambda_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2$$

Здесь  $\alpha_2(\lambda_2)$  — вышеупомянутая функция. Теперь, имея в виду вышесказанное относительно  $\alpha_2(\lambda_2)$ , получаем



Фиг. 1.

$$I_1 + I_2 = \int_{-\infty}^{k_2 \cos \theta} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 \quad (2.5)$$

причем контур интегрирования обходит точку ветвления  $\lambda_{20}$  сверху.

Поступая аналогичным образом, как и выше, получим

$$\int_{k_2}^{\infty} \overline{A(\sigma)} \exp[i(\sigma \cos \theta + i\gamma_2(\sigma) \sin \theta) r] d\sigma = \int_{k_2 \cos \theta}^{\infty} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \quad (2.6)$$

где  $\alpha_2(\lambda_2)$  определяется из уравнения

$$\lambda_2 = \alpha_2 \cos \theta + i\gamma_2(\alpha_2) \sin \theta$$

а контур интегрирования обходит точку ветвления  $-\lambda_{20}$  функции  $\alpha_2(\lambda_2)$  сверху.

После применения операции сопряжения в равенстве (2.6) окончательно получим

$$I_3 = \int_{k_2 \cos \theta}^{\infty} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2 \quad (2.7)$$

где  $\alpha_2(\lambda_2)$  определяется из уравнения

$$\lambda_2 = \alpha_2(\lambda_2) \cos \theta - i\gamma_2(\alpha_2) \sin \theta$$

Здесь  $\gamma_2(\alpha_2)$  положительно мнима при  $-k_2 < \alpha_2 < k_2$ , а контур интегрирования обходит точку ветвления  $-\lambda_{20}$  уже снизу.

Таким образом, из (2.5), (2.7) следует, что

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha_2) \frac{d\alpha_2}{d\lambda_2} e^{-i\lambda_2 r} d\lambda_2$$

где

$$\lambda_2 = \alpha_2(\lambda_2) \cos \theta - i\gamma_2(\alpha_2) \sin \theta \quad (2.8)$$

Определяемая из (2.8) функция  $\alpha_2(\lambda_2)$  характеризуется тем, что в окрестности точек ветвления  $\pm \alpha_{20}$  она имеет разложения

$$\begin{aligned} \alpha_2(\lambda_2) &= \alpha_{20} - i\sqrt{\lambda_{20} - \lambda_2} + \dots, & \sqrt{\lambda_{20} - \lambda_2} &= -i\sqrt{\lambda_2 - \lambda_{20}} \\ \alpha_2(\lambda_2) &= -\alpha_{20} - i\sqrt{\lambda_{20} + \lambda_2} + \dots, & \sqrt{\lambda_{20} + \lambda_2} &= -i\sqrt{-\lambda_{20} - \lambda_2} \end{aligned}$$

Представления функций  $u_1(r, \theta)$ ,  $u_2(r, \theta)$  в виде (1.6) для остальных значений  $a$  получаются аналогичным образом.

Приступим к получению асимптотических формул для рассматриваемых функций при  $\theta < \theta < \pi/2$  и  $\gamma \rightarrow \infty$ . При выводе этих формул ограничимся случаем  $a_1 < a < a_2$ , поскольку для других значений  $a$  эти формулы имеют тот же вид, что и при отсутствии магнитного поля.



В рассматриваемом случае, например, при  $a_1 < a < a_2$  функция  $\alpha_1(\lambda_1)$  при каждом фиксированном  $\theta$  из интервала  $0 < \theta < \theta^*$  имеет три точки ветвления второго порядка

$$\lambda_{10}^{(1)} = \alpha_{10}^{(1)} \cos \theta - i \gamma_1(\alpha_{10}^{(1)}) \sin \theta \quad \text{при} \quad \alpha_{10}^{(1)} \in (-k_1, 0)$$

$$\lambda_{10}^{(2)} = \alpha_{10}^{(2)} \cos \theta - i \gamma_1(\alpha_{10}^{(2)}) \sin \theta \quad \text{при} \quad \alpha_{10}^{(2)} \in (-k_3, \alpha_{10}^*)$$

$$\lambda_{10}^{(3)} = \alpha_{10}^{(3)} \cos \theta - i \gamma_1(\alpha_{10}^{(3)}) \sin \theta \quad \text{при} \quad \alpha_{10}^{(3)} \in (\alpha_{10}^*, -k_2)$$

а  $\alpha_2(\lambda_2)$  — точку ветвления второго порядка  $\lambda_{20}$ . При  $\theta = \theta^*$  точка  $\lambda_{10}^*$  является точкой ветвления третьего порядка для  $\alpha_1(\lambda_1)$ , а  $\lambda_{20}$  — точкой ветвления второго порядка для  $\alpha_2(\lambda_2)$ . Имея в виду вышесказанное, методом Лайтхилла получим следующие асимптотические формулы для  $u^{(n)}(r, \theta, t)$  ( $n = 1, 2$ )

а)  $0 < \theta < \theta^*$

$$u^{(n)}(r, \theta, t) = -\frac{i}{V \pi r} \sum_{k=1}^3 A_n^{(k)} \exp \left[ -i \left( \omega t - |\lambda_{10}^{(k)}| r - \frac{\pi}{4} \right) \right] - \frac{i B_n}{V \pi r} \exp \left[ -i \left( \omega t - |\lambda_{20}| r - \frac{\pi}{4} \right) \right] + O(r^{-3/2}); \quad (n = 1, 2)$$

где

$$A_1^{(k)} = -\frac{i}{2\pi G} \frac{(c_1^2 - c_2^2) \alpha_{10}^{(k)}}{2c_3^2 [\gamma_1^2(\alpha_{10}^{(k)}) - \gamma_2^2(\alpha_{10}^{(k)})] V \lambda_1^*(\alpha_{10}^{(k)})}$$

$$A_2^{(k)} = -\frac{1}{4\pi G c_3^2} \frac{c_1^2 (\alpha_{10}^{(k)} - k_1^2) - c_2^2 \gamma_1^2(\alpha_{10}^{(k)})}{\gamma_1 [\gamma_1^2(\alpha_{10}^{(k)}) - \gamma_2^2(\alpha_{10}^{(k)})] V \lambda_1^*(\alpha_{10}^{(k)})}$$

б) Случай  $\theta = \theta^*$

$$u^{(n)}(r, \theta, t) = \frac{A_n \Gamma(1/3) V \sqrt{3}}{2\pi \sqrt[3]{r}} \exp[-i(\omega t - |\lambda_{10}^*| r - \pi/3)] + \frac{B_n \Gamma(2/3)}{2\pi r^{3/2}} \exp[-i(\omega t - |\lambda_{10}^*| r - \pi/6)] - \frac{C_n i}{V \pi r} \exp[-i(\omega t - |\lambda_{20}| r - \pi/4)] + O(r^{-4/3}), \quad (n = 1, 2)$$

где

$$A_1 = -\frac{i \sqrt[3]{6} (c_1^2 - c_2^2)}{6G c_3^2} \frac{\alpha_{10}^*}{\gamma_1^2(\alpha_{10}^*) - \gamma_2^2(\alpha_{10}^*)} \frac{1}{V \lambda_1^{*3}(\alpha_{10}^*)}$$

$$A_2 = \frac{\sqrt[3]{6}}{6c_3^2 G} \frac{c_1^2 \gamma_1^2(\alpha_{10}^*) - c_1^2 (\alpha_{10}^{*2} - k_1^2)}{\gamma_1(\alpha_{10}^*) [\gamma_1^2(\alpha_{10}^*) - \gamma_2^2(\alpha_{10}^*)]} \frac{1}{V \lambda_1^{*3}(\alpha_{10}^*)}$$

Ввиду громоздкости формул выражения коэффициентов  $B_n$  и  $C_n$  не приводятся.

Отметим, что в случае  $a_2 < a < a_3$  асимптотические формулы имеют почти аналогичный вид. Случаи  $a = a_2$  и  $0^* < \theta < \pi/2$  не рассматриваются, поскольку вид асимптотических формул в этих случаях такой же, как и при отсутствии магнитного поля.

Далее отметим, что из решения рассматриваемой стационарной задачи нетрудно получить решение нестационарной задачи, когда в магнитоупругой среде действует сила  $Y(x, y, t) = \delta(x)\delta(y)\delta(t)$ .

Действительно, введем преобразование в виде

$$u_n(x, y, \omega) = \int_0^{\infty} u^{(n)}(x, y, t) e^{-i\omega t} dt, \quad 0 < \omega < \infty, \quad (n = 1, 2) \quad (2.9)$$

Тогда  $u_n(x, y, \omega)$ , являющиеся решениями уравнений (1.2), будут выражаться формулами (2.2), которые, как можно убедиться, представляются в виде

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta, \omega) = & \frac{1}{2\pi G} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{i(c_1^2 - c_2^2) s_n}{c_3^2 (\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \cos(\omega \lambda_* r) d\lambda_* + \\ & + \frac{1}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{i(c_1^2 - c_2^2) s_n}{c_3^2 (\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \sin(\omega \lambda_* r) d\lambda_* + \\ & + \frac{i}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{i(c_1^2 - c_2^2) s_n}{c_3^2 (\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \cos(\omega \lambda_* r) d\lambda_* \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(r, \theta, \omega) = & \frac{1}{2\pi G} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{c_1^2 (s_n^2 - c_1^{-2}) - c_2^2 \gamma_n^{*2}}{c_3^2 \gamma_n^* (\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \cos(\omega \lambda_* r) d\lambda_* + \\ & + \frac{1}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{c_1^2 (s_n^2 - c_1^{-2}) - c_2^2 \gamma_n^{*2}}{c_3^2 \gamma_n^* (\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \sin(\omega \lambda_* r) d\lambda_* + \\ & + \frac{i}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{c_1^2 (s_n^2 - c_1^{-2}) - c_2^2 \gamma_n^{*2}}{c_3^2 \gamma_n^* (\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_*} \cos(\omega \lambda_* r) d\lambda_* \end{aligned}$$

Здесь произведена замена  $\lambda_* = \omega \lambda_n^{-1}$ ,  $s_n = \omega s_n^{-1}$ ,  $s_n(\lambda_*)$  определяется из уравнения

$$\lambda_* = s_n \cos \theta - i \gamma_n^* (s_n) \sin \theta$$

где

$$\gamma_n^*(s_n) = \gamma_n (s_n^{-1} \omega) \omega^{-1}$$

Теперь после замены  $\lambda_+ r = t$ , сопоставления формул (2.9) и (2.10) и при учете четности функций  $u_n(r, \theta, \omega)$  по переменной  $\omega$ , получим искомое решение рассматриваемой задачи в виде

$$u^{(1)}(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi Gr} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{i(c_1^2 - c_2^2) s_n}{c_3^2 (\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_+}$$

$$u^{(2)}(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi Gr} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{c_1^2 (s_n^2 - c_1^{-2}) - c_2^2 \gamma_n^{*2}}{c_3^2 \gamma_n^* (\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})} \frac{ds_n}{d\lambda_+}$$

В частности, при  $y=0$  получим

$$u^{(1)}(x, 0, t) = 0$$

$$u^{(2)}(x, 0, t) = \frac{1}{2\pi G|x|} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{c_1^2 (s_n^2 - c_1^{-2}) - c_2^2 \gamma_n^{*2}}{c_3^2 \gamma_n^* (\gamma_1^{*2} - \gamma_2^{*2})}, \quad s_n = \frac{t}{|x|}$$

Решение обсуждаемой нестационарной задачи при другом подходе получено в работе [2].

Отметим, что вышеуказанным образом можно получить подобные результаты для анизотропной среды. Кроме того, аналогичным подходом можно провести исследование задачи Ламба для анизотропных и магнитоупругих сред.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 23 I 1978

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԿԵՆՏՐՈՆԱՑԱՄ ՇԱՐՄՈՆԻԿ ԳՐԻԳՈՎՈՂ  
ՄԱԳՆԻՍՏԱՌԱԳՆԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՏԱՏԱՆՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Աշխատանքում դիտարկվում է կենտրոնացած հարմոնիկ ուժի ազդեցության տակ անվիրջ իզոտրոպ առաձգական միջավայրի տատանումները, սովյալ միջավայրի շարժման հարթությանը զուգահեռ մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում: Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության միջոցով կառուցվում է մագնիսաառաձգական միջավայրի տատանումները բնութագրող դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը: Կայտարիլի մեթոդով, ուժի կիրառման կետից մեծ հեռավորությունների վրա գտնվող կետերի համար, կախված մագնիսական դաշտի ինտենսիվությունից, ստացված են տեղափոխությունների համար ասիմպտոտիկ բանաձևեր: Բացի դրանից դիտարկվող ստացիոնար խնդրից ստացված է կենտրոնացած իմպուլսի վերաբերյալ ոչ ստացիոնար խնդրի լուծումը:



# ON THE VIBRATION OF MAGNETOELASTIC MEDIUM EXCITED BY A CONCENTRATED HARMONIC FORCE

Ed. Kh. GRIGORIAN

## S u m m a r y

The vibration of an isotropic infinite medium under the effect of a concentrated harmonic force, in the presence of a homogeneous magnetic field parallel to the plane of the medium motion, is considered. The solution characterizing the vibration of a magnetoelastic medium is obtained by Fourier's transformation.

Further, by Latchill's method the asymptotic formulas for displacements at large distances from the point of the force application, depending on the intensity of an external magnetic field, are derived. The solution for a nonstationary problem on concentrated impulse is obtained as well from the above stationary problem.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* An introduction to Fourier analysis and generalized functions. Cambridge Univ. Press, 1959.
2. *Багдоян А. Г.* Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 2.
3. *Свекло В. А.* Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. ЛГУ, 1949, в. 17.
4. *Осипов И. О.* К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника. ПММ, 1969, т. 36, вып. 3.
5. *Осипов И. О.* О волновых полях и остроугольных краях на волновых фронтах в анизотропной среде от точечного источника. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
6. *Седов А. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., изд-во «Наука», 1973.
7. *Нобл Б.* Метод Бишера-Хопфа. М., изд. ИЛ, 1962.
8. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М., изд. «Наука», 1968.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, т. 2. М., изд. «Наука», 1968.