ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 5, 1978 Механика

З. А. МАРТИРОСЯН

# О ДВУХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КРУГЛЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Осесимметричные контактные задачи с определением площади контакта для однородного цилиндра и жестких штампов исследовались в работах [5—7] и др. Контактные задачи с определением области контакта для случаев двух контактируемых тел, когда одно из них или оба имеют неограниченные размеры, рассмотрены в работах [8—22] и др. Определение области контакта между двумя упругими конечными телами из различных материалов исследовано в работах [23, 24] и др. Контактная задача для двух цилиндров при учете переменного коэффициента сцепления рассмотрена в работе [25], где изучен характер распределения контактных напряжений.

В настоящей работе рассматриваются две осесимметричные задачи теории упругости для двух цилиндров с различными упругими свойствами, имеющих конечные длины и одинаковые диаметры, которые контактированы между собой торцами при сжимающей внешней торцевой нагрузке. На боковых поверхностях цилиндров нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю. Контакт между цилиндрами принимается гладким, то есть без сцепления, а зона контакта двух цилиндров считается неизвестной и определяется в процессе решения задачи. Осесимметричная сжимающая нагрузка берется таким образом, что образуется контактная область в виде круга. Решения рассматриваемых задач представляются в виде рядов Фурье-Дини, при этом для коэффициентов этих рядов получены парные ряды-уравнения, содержащие функции Бесселя. Далее, следуя [4, 5], определение искомых коэффициентов сводится к решению квази-вполне регулярных бесконечных систем, свободные члены которых стремятся к нулю. Окончательные выражения для контактных напряжений получены с выделенной особенностью. Для конкретных внешней нагрузки и размеров составляющих цилиндров вычислены размеры контакта и напряжения на контактных и боковых поверхностях цилиндров.

1. Пусть два цилиндра конечной длины и одинакового диаметра, изготовленные из различных материалов, прижимаются по торцам друг к другу (фиг. 1). На других торцах цилиндров приложена осесимметричная сжимающая нагрузка таким образом, что образуется контактная область в виде круга. Сцепление на поверхности контакта отсутствует. На боковой поверхности цилиндров нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю.

В дальнейшем все величины, относящиеся к левому цилиндру, будем отмечать индексом 1, а к правому — индексом 2.

Граничные условия рассматриваемой осесимметричной задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} -p_i & 0 \leqslant r < a \\ 0 & a < r < R \end{cases} = a_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} J_0(\beta_k r) \tag{1.1}$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(r, l_i) = 0 \tag{1.2}$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(R, z) = 0 \quad u_r^{(i)}(R, z) = 0 \tag{1.3}$$

Из условия контакта имеем

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) \quad \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) \tag{1.4}$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0) \quad 0 \leqslant r < c \tag{1.5}$$

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0 \quad c < r < R \tag{1.6}$$

где $l_i$ — длины, $R$ — радиус цилиндров, $J_n(x)$ — функция Бесселя действительного аргумента первого рода, а $\beta_k$ — положительные корни уравнения $J_1(\beta_k R) = 0$, расположенные в порядке возрастания ($i=1, 2$).

Решение задачи сводится к нахождению функций Лява $\Phi^{(i)}(r, z)$, которые удовлетворяют бигармоническому уравнению [2]

$$\Delta^2 \Phi^{(i)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi^{(i)}(r, z) = 0 \tag{1.7}$$

граничным условиям (1.1—1.3) и условиям контакта (1.4—1.6).

Напряжения и перемещения выражаются через функцию $\Phi^{(i)}(r, z)$ следующим образом [2]:

$$\sigma_r^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_i \Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial r^2}\right)$$

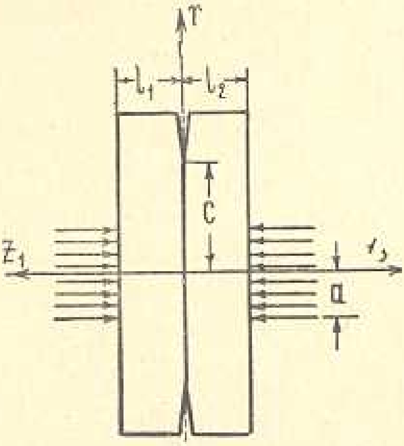
$$\sigma_\theta^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_i \Delta\Phi^{(i)} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r}\right)$$

$$\sigma_z^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu_i)\Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial z^2}\right]$$

$$\tau_{rz}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu_i)\Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial z^2}\right]$$

$$u_z^{(i)} = \frac{1}{2G_i}\left[2(1-\nu_i)\Delta\Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial z^2}\right]$$

$$u_r^{(i)} = -\frac{1}{2G_i}\frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial r \partial z} \tag{1.8}$$



Фиг. 1.

где $G_i$ — модули сдвига, а $\nu_i$ — коэффициенты Пуассона.

Решения уравнений (1.7) ищем в следующем виде [1]:

$$\Phi^{(i)}(r, z) = z(B_i z^2 + C_i z) + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(i)} \operatorname{sh}\beta_k z + B_k^{(i)} \operatorname{ch}\beta_k z + C_k^{(i)}\beta_k z \operatorname{sh}\beta_k z + D_k^{(i)}\beta_k z \operatorname{ch}\beta_k z) J_0(\beta_k r) \tag{1.9}$$

Удовлетворяя условиям (1.1—1.6), согласно (1.8) получаем

$$B_i = \frac{a_0^{(i)}}{6(1-\nu_i)}$$

$$B_k^{(i)} = -2\nu_i C_k^{(i)}$$

$$A_k^{(i)} = (1-2\nu_i) D_k^{(i)} - \frac{X_k}{\beta_k^3}$$

$$C_k^{(i)} = -\frac{\operatorname{sh}\beta_k l_i \operatorname{ch}\beta_k l_i + \beta_k l_i}{\beta_k^3[\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2]} X_k + \frac{\operatorname{sh}\beta_k l_i + \beta_k l_i \operatorname{ch}\beta_k l_i}{\beta_k^3(\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2)} a_k^{(i)} \tag{1.10}$$

$$D_k^{(i)} = \frac{\operatorname{sh}^2\beta_k l_i}{\beta_k^3(\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2)} X_k - \frac{\beta_k l_i \operatorname{sh}\beta_k l_i}{\beta_k^3(\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2)} a_k^{(i)}$$

Здесь неизвестные коэффициенты $X_k$ определяются из следующих парных рядов-уравнений по функциям Бесселя:

$$\begin{gathered} y_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(1+M_k)\frac{X_k}{\beta_k} J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k J_0(\beta_k r) \quad 0 \leqslant r < c \\ a_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k J_0(\beta_k r) = 0 \quad c < r < R \end{gathered} \tag{1.11}$$

где введены обозначения

$$y_0 = -\frac{(1-2\nu_1)C_1 + G(1-2\nu_2)C_2}{1-\nu_1+G(1-\nu_2)} \tag{1.12}$$

$$M_k = \alpha M_k^{(1)} + (1-\alpha) M_k^{(2)} \qquad Q_k = \alpha P_k^{(1)} a_k^{(1)} + (1-\alpha) P_k^{(2)} a_k^{(2)}$$

$$M_k^{(i)} = \frac{\operatorname{sh}\beta_k l_i(\operatorname{ch}\beta_k l_i - \operatorname{sh}\beta_k l_i) + \beta_k l_i(1+\beta_k l_i)}{\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2}$$

$$P_k^{(i)} = \frac{\operatorname{sh}\beta_k l_i + \beta_k l_i \operatorname{ch}\beta_k l_i}{\beta_k(\operatorname{sh}^2\beta_k l_i - \beta_k^2 l_i^2)} \tag{1.13}$$

$$\alpha = \frac{1-\nu_1}{1-\nu_1+G(1-\nu_2)} \qquad \frac{G_1}{G_2} = G \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

Приведем парные ряды-уравнения к бесконечной системе [4, 5]. Неизвестные $X_k$ ищем в виде

$$X_k = \frac{1}{(\beta_k c)^{1/2} J_0^2(\beta_k R)} \sum_{m=0}^{\infty} b_m J_{2m+1/2}(\beta_k c) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.14}$$

Подставляя (1.14) во второе уравнение (1.11) и пользуясь разложением

$$f(r)=\begin{cases}(c^2-r^2)^{-1/2}F\left(-s,\ s+\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{r^2}{c^2}\right) & 0<r<c\\ 0 & c<r<R\end{cases}$$

$$f(r)=\frac{(2c)^{1/2}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{R^2\Gamma(s+L)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_{2s+1/2}(\beta_k c)\,J_0(\beta_k r)}{\beta_k^{1/2}J_0^2(\beta_k R)}\qquad (s=1,\ 2,\ldots)\tag{1.15}$$

получим

$$a_0-b_0\lim_{k\to 0}\frac{J_{1/2}(\beta_k c)}{(\beta_k c)^{1/2}}=0\qquad(\beta_0=0)$$

$$b_0=\sqrt{2}\,\Gamma(3/2)\,a_0^{(1)}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a_0^{(1)}\tag{1.16}$$

Подставляя (1.14) в первое уравнение (1.11), затем умножая полученное соотношение на $r(c^2-r^2)^{-1/2}F\left(-s,\ s+\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{r^2}{c^2}\right)$, далее интегрируя по $r$ в пределах от 0 до $c$ и используя значение интеграла

$$\int_0^c r^{\nu+1}(c^2-r^2)^{p/2}F\left(-s,\ 1+\frac{p}{2}+s+\nu,\ \nu+1,\ \frac{r^2}{c^2}\right)J_\nu(\beta_k r)\,dr=$$

$$=\left(\frac{2}{\beta_k}\right)^{1+\frac{p}{2}}c^{1+\frac{p}{2}+\nu}\,\frac{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma\left(1+\frac{p}{2}+s\right)}{2\Gamma(1+s+\nu)}\,J_{\nu+2s+\frac{p}{2}+1}(\beta_k c)\quad(s=1,2,\ldots)\tag{1.17}$$

получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}b_m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+M_k}{\beta_k^2J_0^2(\beta_k R)}\,J_{2m+1/2}(\beta_k c)\,J_{2s+1/2}(\beta_k c)=\sqrt{c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q_k}{\sqrt{\beta_k}}\,J_{2s+1/2}(\beta_k c)\tag{1.18}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$ — гипергеометрический ряд.

Выражение (1.18) представляет собой бесконечную систему алгебраических уравнений первого рода относительно $b_m$.

Пользуясь значением ряда

$$\frac{2}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{\nu+2m+1/2}(\beta_k c)\,J_{\nu+2s+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2J_0^2(\beta_k R)}=\frac{\delta_{ms}}{2\nu+4s+1}+$$

$$+\frac{2}{\pi}(-1)^{m+s}\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)\,I_{\nu+2s+1/2}(cy)\,I_{\nu+2m+1/2}(cy)}{yI_1(y)}\,dy\tag{1.19}$$

бесконечную систему (1.18) приводим к виду

$$b_s = \sum_{m=0}^{\infty} a_{sm} b_m + d_s \tag{1.20}$$

где введены обозначения

$$a_{sm} = -\frac{(-1)^{m+s} 2(4s+1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y) I_{2m+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)}{y I_1(y)} dy -$$

$$-2(4s+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k J_{2s+1/2}(\beta_k c) J_{2m+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} \tag{1.21}$$

$$d_s = 2(4s+1)\sqrt{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{\sqrt{\beta_k}} J_{2s+1/2}(\beta_k c) \tag{1.22}$$

$\delta_{ms}$ — символ Кронекера, $I_n(x)$, $K_n(x)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента соответственно первого и второго рода.

Покажем, что сумма модулей коэффициентов бесконечной системы (1.20) при возрастании $s$ стремится к нулю, то есть

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{sm}| = \lim_{s\to\infty} \frac{2(4s+1)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y) I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) I_{2m+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right)}{y I_1(y)} +$$

$$+\lim_{s\to\infty} 2(4s+1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^*}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} |J_{2s+1/2}(\beta_k c) J_{2m+1/2}(\beta_k c)| = 0 \tag{1.23}$$

Для первого члена (1.23) получим оценку

$$\frac{2(4s+1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) \left[\sum_{m=0}^{\infty} I_{2m+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) dy <\right.$$

$$< \frac{2(4s+1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) \sum_{m=0}^{\infty} I_{2m-1}\left(\frac{cy}{R}\right) dy =$$

$$= \frac{2(4s+1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2s+1/2}\left(\frac{cy}{R}\right) \left[I_{-1}\left(\frac{cy}{R}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{cy}{R}\right] dy \tag{1.24}$$

Интеграл (1.24) сходится абсолютно и равномерно по параметру $s$ и, следовательно, выражение (1.24) является ограниченной функцией от $s$.

Для больших значений $s$ имеем [3]

$$I_{2s+1/2}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1/2}}{\Gamma\left(2s+\frac{1}{2}\right)} \tag{1.25}$$

следовательно, интеграл, входящий в (1.24), при возрастании $s$ стремится к нулю.

Аналогично можно доказать, что второй член выражения (1.23) стремится к нулю при возрастании $s$, откуда следует, что система (1.20) квазивполне регулярна.

Из (1.22) видно, что свободные члены $d_s$ также стремятся к нулю при $s \to \infty$.

После решения бесконечной системы (1.20) из первого уравнения (1.11) при фиксированном $r$ определяется $y_0$.

Значение второго ряда системы (1.11) в области $0 \leqslant r < c$ представляет собой контактное напряжение, а значение первого ряда в области $c < r < R$ — перемещение вне контакта.

Подставив значение $X_k$ по формуле (1.14) во второй ряд (1.11) и пользуясь формулой (1.15), для контактного нормального напряжения получим следующее выражение:

$$\sigma_z(r, 0) = \begin{cases} 0 & c < r < R \\ \dfrac{R^2(c^2-r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2c}} \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m \dfrac{m!F\left(-m, m+1/2, 1, \dfrac{r^2}{c^2}\right)}{\Gamma(m+1/2)} & 0 \leqslant r < c \end{cases} \tag{1.26}$$

Коэффициент при особенности $\sqrt{c^2-r^2}$ в формуле (1.26) в окрестности $r = c$ имеет вид

$$\frac{R^2}{\sqrt{2\pi c}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m b_m \tag{1.27}$$

Вопрос определения размера площади контакта связан с исследованием нормального контактного напряжения с определением его величины и знака.

На основании (1.26), (1.20) и (1.13) приходим к выводам, что если $a_k^{(1)} = a_k^{(2)}$ и $l_1 = l_2$, то размеры области контакта не зависят от интенсивности внешней нагрузки и от свойств материалов.

2. Рассмотрим теперь аналогичную задачу, когда нормальные перемещения на одном из торцов цилиндра равны нулю, а остальные граничные условия контакта остаются без изменений. Принимается, что нулевые нормальные перемещения относятся к левому цилиндру, то есть отмечаются индексом 1.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_z^{(2)}(r, l_2) = a_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} J_0(\beta_k r) \tag{2.1}$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(r, l_i) = 0 \tag{2.2}$$

$$u_z^{(1)}(r, l_1) = 0 \tag{2.3}$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(R, z) = 0, \quad u_r^{(i)}(R, z) = 0 \tag{2.4}$$

Условия контакта (1.4 — 1.6) остаются без изменения.

Напряжения и перемещения представляются в виде (1.8), а функции Лява — в виде (1.9).

Удовлетворяя условиям (2.1 — 2.4) и (1.4 — 1.6), при помощи (1.8) получаем

$$C_1 = -3l_1 B_1 \tag{2.5}$$

$$C_k^{(1)} = -\frac{\mathrm{sh}^2 \beta_k l_1}{\mathrm{sh}\,\beta_k l_1 \,\mathrm{ch}\,\beta_k l_1 + \beta_k l_1} \frac{X_k}{\beta_k^2}$$

$$D_k^{(1)} = \frac{\mathrm{sh}\,\beta_k l_1 \,\mathrm{ch}\,\beta_k l_1}{\mathrm{sh}\,\beta_k l_1 \,\mathrm{ch}\,\beta_k l_1 + \beta_k l_1} \frac{X_k}{\beta_k^3} \tag{2.6}$$

Коэффициенты $B_i$, $A_k^{(2)}$, $B_k^{(2)}$, $C_k^{(2)}$, $D_k^{(2)}$, $A_k^{(1)}$, $B_k^{(1)}$ находим из соотношений (1.10). Неизвестные коэффициенты $X_k$ определяются из решения парных рядов (1.11), где

$$M_k^{(1)} = -\frac{\mathrm{sh}\,\beta_k l_1 (\mathrm{ch}\,\beta_k l_1 - \mathrm{sh}\,\beta_k l_1) + \beta_k l_1}{\mathrm{sh}\,\beta_k l_1 \,\mathrm{ch}\,\beta_k l_1 + \beta_k l_1} \qquad P_k^{(1)} = 0 \tag{2.7}$$

а $M_k^{(2)}$, $P_k^{(2)}$, $y_0$ и $\alpha$ даны формулами (1.13).

Представляя выражение $X_k$ в виде (1.14), аналогичным образом получаем для определения коэффициентов $b_m$ квази-вполне регулярную систему бесконечных линейных алгебраических уравнений типа (1.20), где

$$a_{sm} = -2(4s+1)\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[-\alpha\,\frac{\mathrm{sh}\,\beta_k l_1 (\mathrm{ch}\,\beta_k l_1 - \mathrm{sh}\,\beta_k l_1) + \beta_k l_1}{\mathrm{sh}\,\beta_k l_1 \,\mathrm{ch}\,\beta_k l_1 + \beta_k l_1} +$$

$$+ (1-\alpha)\,\frac{\mathrm{sh}\,\beta_k l_2 (\mathrm{ch}\,\beta_k l_2 - \mathrm{sh}\,\beta_k l_2) + \beta_k l_2 (1 + \beta_k l_2)}{\mathrm{sh}^2 \beta_k l_2 - \beta_k^2 l_2^2}\Bigg] \times$$

$$\times \frac{J_{2s+1/2}(\beta_k c)\, J_{2m+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} -$$

$$-\frac{(-1)^{m+s}\, 2(4s+1)}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{K_1(y)\, I_{2m+1/2}\left(\dfrac{cy}{R}\right) I_{2s+1/2}\left(\dfrac{cy}{R}\right)}{y I_1(y)}\, dy \tag{2.8}$$

$$d_s = 2\sqrt{c}\,(4s+1)\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha)\frac{\operatorname{sh}\beta_k l_2 + \beta_k l_2 \operatorname{ch}\beta_k l_2}{\beta_k^{3/2}(\operatorname{sh}^2\beta_k l_2 - \beta_k^2 l_2^2)} a_k^{(2)} J_{2s+1/2}(\beta_k c) \qquad (2.9)$$

После решения бесконечной системы аналогичным образом определим $y_0$, а при помощи (2.5) — $C_2$.

Контактное нормальное напряжение определится по формуле (1.26), а коэффициент особенности — по (1.27).

3. *Численные примеры.*

а) В качестве примера рассмотрим два цилиндра одинаковой длины и одинакового диаметра, которые прижимаются по торцам друг к другу без сцепления. На торцах цилиндров приложены равномерно распределенные нормальные нагрузки (фиг. 1)

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \begin{cases} -p & \text{при} \quad 0 < r < a \\ 0 & \text{при} \quad a < r < R \end{cases} \qquad (3.1)$$

В этом случае размеры контакта не зависят от свойств материалов.

При этих условиях имеем

$$a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = a_0 = -\frac{a^2}{R^2}p, \qquad a_k^{(1)} = a_k^{(2)} = a_k = -\frac{2a J_1(\beta_k a)}{R^2\beta_k J_0^2(\beta_k R)}p \qquad (3.2)$$

После удовлетворения граничных условий и условий контакта для определения коэффициентов $b_m$ получим систему бесконечных линейных алгебраических уравнений типа (1.20), где

$$M_k = \frac{\operatorname{sh}\beta_k l(\operatorname{ch}\beta_k l - \operatorname{sh}\beta_k l) + \beta_k l(1+\beta_k l)}{\operatorname{sh}^2\beta_k l - \beta_k^2 l^2} \qquad (3.3)$$

$$Q_k = \frac{\operatorname{sh}\beta_k l + \beta_k l \operatorname{ch}\beta_k l}{\beta_k(\operatorname{sh}^2\beta_k l - \beta_k^2 l^2)} a_k \qquad (3.4)$$

График зависимости площади контакта от длины цилиндров для значений $\frac{a}{R} = 0.125$ и 0,25 показан на фиг. 2.

Распределение нормального контактного напряжения при различных значениях $l$ и $a$ показано на фиг. 3 и 4.

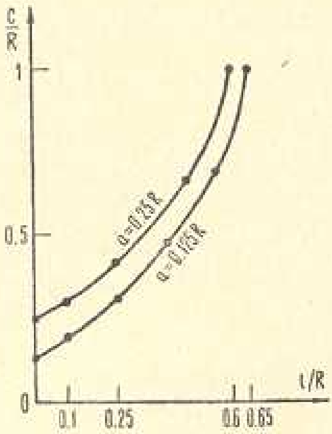
Зависимость длины цилиндров ($l$) от размера участка приложения нагрузки ($a$) при условии, что цилиндры остаются в контакте по всей площади ($c = R$), приведена на фиг. 5.

б) Рассмотрим теперь случай, когда нормальные перемещения на одном из цилиндров равны нулю, а остальные граничные условия и условия контакта совпадают с условиями первой задачи.

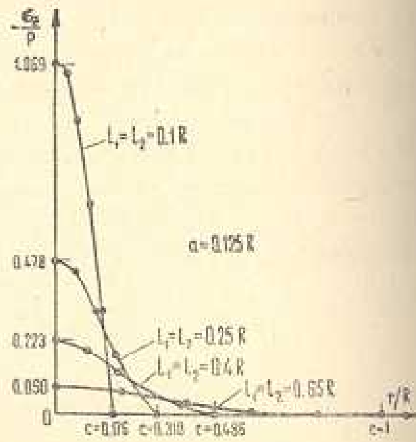
При этих условиях имеем

$$a_0^{(1)} = a_k^{(1)} = 0, \qquad a_0^{(2)} = -\frac{a^2}{R^2}p, \qquad a_k^{(2)} = a_k = -\frac{2a J_1(\beta_k a)}{R^2\beta_k J_0^2(\beta_k R)} \qquad (3.5)$$

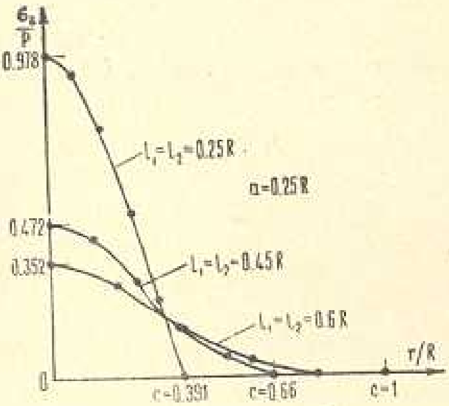
Для определения коэффициентов $b_m$ аналогичным образом получим систему бесконечных линейных алгебраических уравнений типа (1.20), где $M_k$ и $Q_k$ определяются по формуле (1.13).



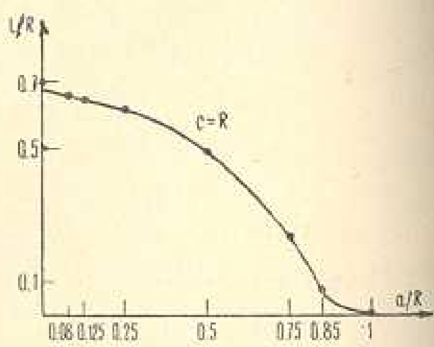

Фиг. 2.




Фиг. 3.




Фиг. 4.



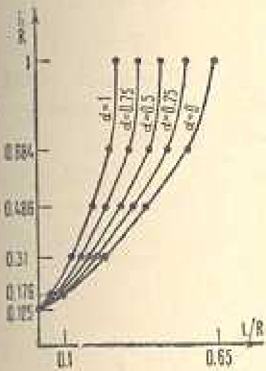

Фиг. 5.

В этом случае при $l_1 = l_2$ размеры контакта зависят от свойств материалов.

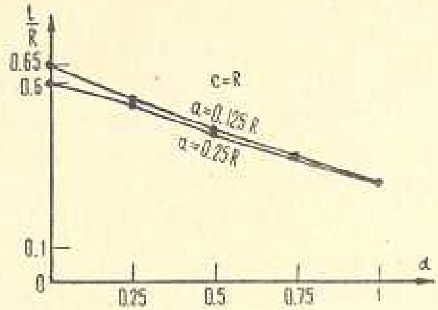
График зависимости площади контакта от длины цилиндров ($l_1 = l_2$) для значений $\frac{a}{R} = 0.125$ при $\alpha = 0$; 0.25; 0.5; 0.75; 1 показан на фиг. 6.

Если $\alpha = 0$, то напряженное состояние в двух задачах совпадает.

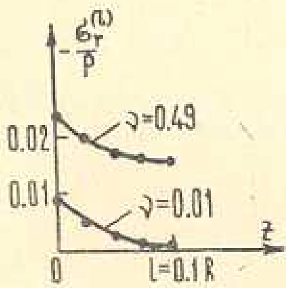
При полном контакте ($c = R$) и отсутствии особенности напряжений на крае контакта зависимости между длиной цилиндров и $\alpha$ при $\frac{a}{R} = 0.125$; 0.25 показаны на фиг. 7.




Фиг. 6.




Фиг. 7.




Фиг. 8.

Распределение нормального напряжения $\sigma_r^{(l)}$ на боковой поверхности $r = R$ при значениях $l = 0.1\,R$, $a = 0.125\,R$, $\nu_i = 0.01$; 0.49 показаны на фиг. 8.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 24 XI 1977

Գ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

## ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԼՈՐ ԳԼԱՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

### Ամփոփում

*Դիտարկվում է ճակատներով հպված, տարբեր առաձգական հատկություններ և միևնույն տրամագծեր ունեցող երկու շրջանային գլանների առաձգականության տեսության երկու առանցքասիմետրիկ խնդիրներ։ Նորմալ տեղափոխումները և շոշափող լարումները գլանային մակերևույթների վրա հավասար են զրոյի։ Գլանների կոնտակտի տիրույթը ընդունվում է անհայտ և որոշվում է խնդիրների լուծման ընթացքում։*

Խնդիրների լուծումները ներկայացվում են Ֆուրյե-Դինիի շարքերի միջոցով։ Այդ շարքերի գործակիցների որոշման համար ստացված են զույգ շարքեր-հավասարումներ, որոնք պարունակում են Բեսելի ֆունկցիաներ։ Զույգ շարքեր-հավասարումների լուծումները հանգեցված են քվազի-լիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծմանը, որոնց ազատ անդամները ձգտում են զրոյի։ Բերված թվային օրինակներում որոշված են կոնտակտի տիրույթի չափերը և հաշված են նորմալ լարումները կոնտակտի տիրույթում և գլանային մակերևույթների վրա։

# ON TWO CONTACT PROBLEMS FOR CIRCULAR ELASTIC CYLINDERS OF FINITE LENGTH

Z. A. MARTIROSIAN

## Summary

Two axisymmetric problems is the elasticity theory for two cylinders of finite length and equal diameters, with different elastic properties contacted to each other on the butts under external compressive butt loads are considered. On the lateral surfaces of the cylinders the normal displacements and shear stresses are equal to zero. The contact between the cylinders is assumed to be smooth. The contact zone is unknown and is to be determined in solving the problems. The solutions are presented as Fourier-Dini's series. To determine the coefficients of these series the dual series-equations, containing Bessel's functions, are obtained. The dual series-equations are reduced to the solution of a quasi-quite regular infinite system of linear equations with free terms tending to zero. For the specified external load and dimensions of the cylinders the contact dimensions and stresses on the contact and cylindrical surfaces are calculated.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН Арм. ССР, 1954, т. XIX, № 1.
2. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. М., ОНТИ, 1937.
3. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.
4. *Cooke J. C., Tranter C. J.* Dual Fourier-Bessel Series. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, August 1959, vol. XII, part 2, Oxford.
5. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, т. XXII, № 5.
6. *Мелконян А. П.* Об одной смешанной осесимметричной задаче теории упругости для цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 2.
7. *Баблоян А. А.*, *Мелконян А. П.* Об одной осесимметричной контактной задаче для цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1973, т. XXVI, № 5.
8. *Stippes M., Wilson H. B., Jr. Krull F. N.* A contact Stress Problem for a Smooth Disk in an Infinite Plate. Proceedings of the 4-th U. S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, 1962.

9. *Наумов Ю. А., Шевляков Ю. А.* Изгиб балочных плит на упругом основании при неполном контакте. Сб. «Гидроаэромеханика и теория упругости». Изд. Харьковского университета. 1968, вып. 9.
10. *Noble B., Hussain M.* Exact Solution of Certain Dual Series for Indentation and Inclusion Problem. Intern. J. Eng. Sci, 1969, vol. 7, No. 11.
11. *Вейцман.* О контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1969, т. 36.
12. *Pu S. L., Hussain M. A., Anderson G.* Lifing of a Plate from the Foundation due to Axisymmetric Pressure. Developments in Mechanics Proceedings of the 11-th Midwestern Mechanics Conference. 1969, vol. 5.
13. *Пу Хуссейн.* К вопросу о контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1970, т. 37, № 3.
14. *Наумов Ю. А., Никифорова В. Д.* Об отставании упругого слоя. Прикл. мех., Журнал АН УССР, 1971, т. 7, № 11.
15. *Кир, Дандерс.* Издат. Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.
16. *Кир, Сильва.* Две смешанные задачи для полуполосы. Прикл. мех. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.
17. *Weitsman Y.* A Tensionless Contact between a Beam and an Elastic Half-Space. Intern. J. End. Sci., 1972, vol. 10, No. 1.
18. *Erdogan F., Ratwani M.* The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), 1974, 41, No. 3.
19. *Gladwell G. M. L., Iyer K. R. P.* On the Unbounded Contact between a Circular Plate and an Elastic Foundation. Journal Elasticity, 1974, vol. 4.
20. *Tsai K. C., Dunders J., Keer L. M.* Elastic Layer Pressed against a Half Space. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), 1974, 41, No. 3.
21. *Dunders J.* Properties of Elastic Bodies in Contact. Proceedings of the IUTAM Simposium on the Mechanics of the Contact between Deformable Bodies. University Press, 1975.
22. *Абрамян Б. Л., Макарян В. С.* Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями из различных материалов с учетом трения между слоями. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 5.
23. *Баблоян А. А., Мелконян М. Г.* О контакте двух прямоугольников без сцепления с определением области контакта. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 5.
24. *Мелконян М. Г., Мкртчян А. М.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. XXIII, № 3.
25. *Pytko Stanislaw, Wierzcholski Kizysztof.* Wytezenie materialu w obszarze styku dwoch walcow przy uwzglednieniu zmiennego wspolczynnika sczepienia. „Zag. eksploat. maszyn“, 1976, 11, No. 2.
26. *Янке Э.* и *Эмде Ф.* Таблицы функций. М., Физматгиз, 1959.
27. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1 и 2. М., ИЛ, 1949.