

В. С. ПРОЦЕНКО, Е. Д. ФЕСЕНКО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА  
 И ОБЛАСТИ КОНТАКТА В СЛУЧАЕ СЖАТИЯ ДВУХ  
 КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ, РАДИУСЫ КОТОРЫХ ПОЧТИ РАВНЫ

Задача определения давления  $P(\varphi')$  в области контакта и области контакта  $[-\varphi_0, \varphi_0]$  в случае сжатия двух круговых цилиндров, радиусы которых почти равны, была впервые поставлена И. Я. Штаерманом [1]. Эта задача в настоящее время вызывает особый интерес в связи со строительством магистральных трубопроводов.

Известно, что сохранение целостности изоляционного покрытия труб при транспортировании, хранении и укладке их в траншеи — одно из условий качества строительных работ, в значительной степени определяющее функционирование трубопроводов. Рассматриваемая задача дает возможность определить напряжения, развиваемые в изоляционном слое трубы, лежащей в траншее, а также напряжения, развивающиеся при транспортировке труб на плетевозе.

Сжатие упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями, радиусы которых почти равны, описывается системой интегральных уравнений вида [1]

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} P(\varphi') \left\{ A \cos(\varphi - \varphi') \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi - \varphi'|}{2} - B \sin|\varphi - \varphi'| + C \right\} d\varphi' =$$

$$= (r_2 - r_1)(1 - \cos \varphi) - a \cos \varphi \quad (1.1)$$

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} P(\varphi') \cos \varphi' d\varphi' = P^*/r_1 \quad (1.2)$$

где

$$-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \quad -\varphi_0 \leq \varphi' \leq \varphi_0$$

$$A = 2(\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2), \quad B = \nu_1 r_1 + \nu_2 r_2, \quad C = 2\nu_1 r_1$$

$$\nu_1 = [4(\lambda_1 + \mu_1)]^{-1}, \quad \nu_2 = [4(\lambda_2 + \mu_2)]^{-1}$$

$$\nu_1 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}, \quad \nu_2 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  — упругие постоянные сжимаемых тел,  $P^*$  — сжимающая сила,  $\alpha$  — сближение цилиндров при сжатии.

Величина  $\alpha$  — неизвестная постоянная величина.

Чтобы определить функцию  $P(\varphi')$  и угол  $\varphi_0$  из системы (1.1), (1.2), необходимо, прежде всего, определить постоянную величину  $\alpha$ ,  $\alpha < r_2 - r_1$ .

Для определения  $P(\varphi')$ ,  $\varphi_0$ ,  $\alpha$  из системы уравнений (1.1), (1.2) используем дополнительное условие, что функция давления  $P(\varphi')$  в граничных точках области контакта обращается в нуль\*

$$P(-\varphi_0) = 0, \quad P(\varphi_0) = 0 \quad (1.3)$$

и рассмотрим краевую контактную задачу.

При решении краевой контактной задачи (1.1), (1.2), (1.3) воспользуемся методом решения, рекомендованным в [1]. Предположим, что искомая функция  $P(\varphi')$  изменяется не непрерывно, а скачками. Функция  $P(\varphi')$  является четной функцией и, следовательно, в области контакта  $[-\varphi_0, 0]$  ее значения в соответствующих точках равны значениям функции  $P(\varphi')$  области  $[0, \varphi_0]$ . Интервал  $[-\varphi_0, \varphi_0]$ , в котором изменяется функция  $P(\varphi')$ , разобьем на  $2l$  частей и предположим, что в каждом из  $2l$  подинтервалов функция  $P(\varphi')$  постоянна. Надлежащим выбором дискретных значений  $P(\varphi')$ , а именно  $P_l$ ,  $l = \pm 1, \dots, \pm n$ , и значения угла  $\varphi_0$  мы можем добиться того, чтобы интегральные уравнения (1.1), (1.2) удовлетворялись в  $2l$  точках интервала  $[-\varphi_0, \varphi_0]$ . Тогда систему интегральных уравнений (1.1), (1.2) и краевое условие (1.3) преобразуем в систему вида

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} P_k \left\{ A \left[ \sin(l-k+1) \frac{\varphi_0}{n} \ln \operatorname{tg} \frac{|l-k+1|}{2} \frac{\varphi_0}{n} - \right. \right. \\ & - \sin(l-k) \frac{\varphi_0}{n} \ln \operatorname{tg} \frac{|l-k|}{2} \frac{\varphi_0}{n} + \sin(l+k) \frac{\varphi_0}{n} \ln \operatorname{tg} \frac{(l+k)}{2} \frac{\varphi_0}{n} - \\ & \left. - \sin(l+k-1) \frac{\varphi_0}{n} \ln \operatorname{tg} \frac{(l+k-1)}{2} \frac{\varphi_0}{n} - 2 \frac{\varphi_0}{n} \right] + \\ & + B \left[ \delta(l-k) \left( \cos(l-k+1) \frac{\varphi_0}{n} - \cos(l-k) \frac{\varphi_0}{n} \right) + \right. \\ & \left. + \cos(l+k) \frac{\varphi_0}{n} - \cos(l+k-1) \frac{\varphi_0}{n} \right] + 2C \frac{\varphi_0}{n} \left. \right\} + \\ & + 2 \cos l \frac{\varphi_0}{n} = (r_2 - r_1) \left( 1 - \cos l \frac{\varphi_0}{n} \right) \quad (1.4) \end{aligned}$$

при  $l = 1, 2, \dots, n$ .

$$2 \sum_{k=1}^{n-1} P_k \left[ \sin k \frac{\varphi_0}{n} - \sin(k-1) \frac{\varphi_0}{n} \right] - \frac{P^*}{r_1} = 0 \quad (1.5)$$

$$P_n = 0 \quad (1.6)$$

\* В монографии [1] условие (1.3) для определения  $\varphi_0$  не используется, что приводит к существенной погрешности вычисления  $P(\varphi)$ .

где

$$\delta(l - k) = 1 \quad \text{при } l - k \geq 0$$

$$\delta(l - k) = -1 \quad \text{при } l - k < 0$$

$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$  — дискретные постоянные значения искомой функции контактного давления  $P(\varphi')$  в области контакта  $[0, \varphi_0]$ .

Имеем систему  $n + 1$  уравнений с  $n + 1$  неизвестными. Искомыми величинами системы (1.4), (1.5), (1.6) являются величины  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ , величина  $\alpha$  и угол  $\varphi_0$ .

При решении системы (1.4), (1.5), (1.6) применим метод итерации.

Пусть нам известно некоторое приближенное значение угла  $\varphi_0$  ( $\varphi_0 = \varphi_0^*$ ). При значении угла  $\varphi_0^*$  переменные коэффициенты при искомым величинах  $\alpha$  и  $P_k, k = 1, \dots, n - 1$  системы (1.4) преобразуются в постоянные коэффициенты. И, следовательно, система  $n$  трансцендентных уравнений преобразуется в этом случае в систему  $n$  линейных уравнений. При решении системы  $n$  линейных уравнений применим метод Гаусса [2] и определим значения величин  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, \alpha$ . А затем значения  $\varphi_0^*, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$  подставим в уравнение (1.5) (условно считаем это уравнение контрольным уравнением). Если при этом уравнение (1.5) преобразуется в тождество, то это значит, что значения  $\varphi_0^*, P_1, \dots, P_{n-1}, \alpha$  являются решением системы (1.4), (1.5), (1.6). В противном случае счет продолжается до тех пор, пока будет найдено такое значение угла  $\varphi_0^*$  и значения  $P_1, \dots, P_{n-1}$ , при которых уравнение (1.5) превратится в тождество. В результате решения системы (1.4), (1.5), (1.6) получим значение области контакта  $[-\varphi_0, \varphi_0]$ , значение сближения цилиндров при сжатии  $\alpha$  и кусочно-постоянную функцию  $P(\varphi')$ , меняющуюся скачками. Построив график значений  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, 0$  и сгладив скачки, получим кривую, изображающую приближенное решение системы интегральных уравнений (1.1), (1.2).

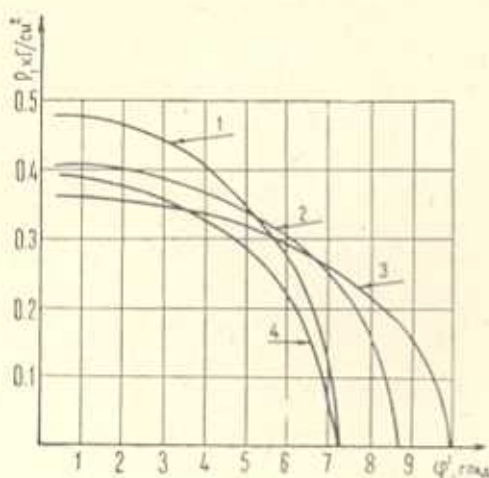
С помощью ЭВМ мы решили систему (1.1), (1.2) для пяти вариантов исходных данных  $r_1, r_2, P^0, \kappa_1, \kappa_2, \nu_1, \nu_2$  (табл. 1). Решение системы (1.1),

Таблица 1

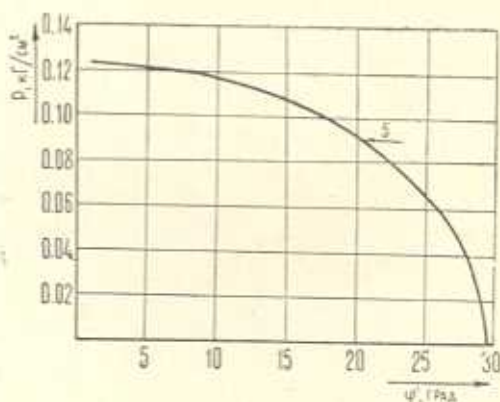
№ п/п	$r_1, \text{см}$	$r_2, \text{см}$	$P^0, \text{кг/см}$	$\kappa_1, \text{см}^2/\text{кг}$	$\kappa_2, \text{см}^2/\text{кг}$	$\nu_1, \text{см}^2/\text{кг}$	$\nu_2, \text{см}^2/\text{кг}$
1	71	72	6.9	$1.24 \cdot 10^{-7}$	$5.2 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-4}$
2	71	72	6.9	$1.24 \cdot 10^{-7}$	$5.77 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$	$8.1 \cdot 10^{-4}$
3	71	72	6.9	$1.24 \cdot 10^{-7}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$	$1.04 \cdot 10^{-3}$
4	61	62	4.46	$1.24 \cdot 10^{-7}$	$5.77 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$	$8.1 \cdot 10^{-4}$
5	71	71.1	6.9	$1.24 \cdot 10^{-7}$	$5.2 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-4}$

(1.2) мы получим при разбиении интервала  $[0, \varphi_0]$  на 20 подинтервалов и при разбиении  $[0, \varphi_0]$  на 50 подинтервалов. При решении системы (1.4), (1.5), (1.6) мы поставили условие, чтобы при подстановке полученных значений  $\varphi_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n$  в контрольное уравнение (1.5) его левая часть отличалась от правой части в седьмом знаке после запятой. В результате по-

лучим, что решение системы (1.1), (1.2) при  $n=20$  и  $n=50$  практически совпадают. Полученные зависимости функции давления  $P(\varphi')$  и углы контакта  $\varphi_0$  представлены на фиг. 1, 2.



Фиг. 1. 1 — Зависимость  $P(\varphi')$  для I варианта начальных данных; угол контакта  $\varphi_0 = 7^{\circ}17'$ ; 2 — Зависимость  $P(\varphi')$  для II варианта начальных данных;  $\varphi_0 = 8^{\circ}46'$ ; 3 — Зависимость  $P(\varphi')$  для III варианта начальных данных;  $\varphi_0 = 9^{\circ}55'$ ; 4 — Зависимость  $P(\varphi')$  для IV варианта начальных данных;  $\varphi_0 = 7^{\circ}13'$



Фиг. 2. 5 — Зависимость  $P(\varphi')$  для V варианта начальных данных;  $\varphi_0 = 29^{\circ}33'$

В расчетах на прочность покрытия труб при их транспортировании, когда имеют место динамические нагрузки, следует учитывать увеличение величины  $P^*$ . Представляет интерес определение такой предельной величины  $P^*$ , при которой начинает разрушаться изоляционный слой трубы, с целью наложения определенных ограничений на условие транспортирования труб.

Վ. Ս. ՊՐՈՏՅԵՆԿՈ, Ե. Դ. ՖԵՍԵՆԿՈ

ՀՆՇՄԱՆ ՈՐՈՇԱԿԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ ԵՎ ԿՈՆՏԱԿՏԻ  
ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԵՐԿՈՒ ԿՂՈՐ ԳՂԱՆՆԵՐԻ ՍԵՂՄՄԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ,  
ՈՐՈՆՅ ՇԱՌԱՎԻՂՆԵՐԸ ՀԱՄԱՐՅԱ ՀԱՎԱՍԱՐ ԵՆ

Ա մ փ ն փ ու լ մ

Լարումների որոշման խնդիրը խողովակի մեկուսացման շերտում հանդում է առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդրի լուծմանը: Խնդրի լուծումը ստացվել է հետևյալ եզրային պայմանից՝ ճնշումը կոնտակտի սահմանային կետերում հավասար է զրոյի:

DETERMINATION OF PRESSURE IN THE CONTACT AREA  
AND OF THE CONTACT AREA PROPER FOR THE CASE  
OF COMPRESSION OF TWO CIRCULAR CYLINDERS  
WHOSE RADII ARE ALMOST EQUAL

V. S. PROTSENKO, E. D. FESENKO

S u m m a r y

The problem of determining the stresses in the pipe insulation layer is reduced to solving the contact problem in the elasticity theory (to determining the pressure in the contact area and the contact area proper). The solution is obtained, using a boundary condition: the pressure at the boundary points of contact vanishes.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штасерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949, с. 270.
2. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. Изд-во «Наука», 1974.