ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 5, 1978 Механика

В. А. БАБЕШКО, В. Е. ВЕКСЛЕР

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

1. *Описание системы интегральных уравнений.* Некоторые краевые задачи теории упругости и математической физики со смешанными граничными условиями сводятся к системе интегральных уравнений первого рода на отрезке

$$\int_a^b k(x, y)\,\sigma(y)\,dy = u(x), \quad B \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant T \tag{1.1}$$

где

$$k(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} S(\eta_n, x) K(\eta_n) S(\eta_n, y) G^{-1}(\eta_n) \tag{1.2}$$

$$K(x) = \begin{pmatrix} K_{11}(x) & K_{12}(x) \\ K_{21}(x) & K_{22}(x) \end{pmatrix}, \qquad S(\eta, x) = \begin{pmatrix} \theta(\eta, x) & 0 \\ 0 & h(\eta, x) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma(y)$ — неизвестная вектор-функция, как правило, линейно связанная с контактными напряжениями, $u(y)$ — известная на (a, b) вектор-функция, характеризующая перемещения в области контакта.

Случай одного интегрального уравнения подобного рода исследовался в работах [1—3].

Предполагается, что функции $\theta(\eta_n, x)$ и $h(\eta_n, x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ являются собственными функциями соответственно следующих задач Штурма-Лиувилля:

$$1) \qquad -\left\{a(x)\frac{d\theta(\eta, x)}{dx}\right\}' + b(x)\,\theta(\eta, x) = n^2(\eta)\,\theta(\eta, x) \tag{1.4}$$

$$\alpha_B^{(1)}\theta(\eta, B) + \alpha_B^{(2)}\theta'(\eta, B) = 0 \tag{1.5}$$

$$\alpha_T^{(1)}\theta(\eta, T) + \alpha_T^{(2)}\theta'(\eta, T) = 0, \; n^2(\eta) = \eta^2 - C^2 \tag{1.6}$$

$$2) \qquad -\left\{a(x)\frac{dh(\eta, x)}{dx}\right\}' + q(x)\,h(\eta, x) = n^2(\eta)\,h(\eta, x) \tag{1.7}$$

$$\beta_B^{(1)}h(\eta, B) + \beta_B^{(2)}h'(\eta, B) = 0 \tag{1.8}$$

$$\beta_T^{(1)}h(\eta, T) + \beta_T^{(2)}h'(\eta, T) = 0 \tag{1.9}$$

Пусть спектры обеих задач дискретны, совпадают и состоят из точек η_n $(n = 1, 2, \ldots)$ и пусть имеют место следующие соотношения:

$$\int_B^T \theta(\eta_K, x)\,\theta(\eta_n, x)\,dx = \delta_{nK}, \quad \int_B^T h(\eta_K, x)\,h(\eta_n, x)\,dx = n^2(\eta_K)\,\delta_{nK} \tag{1.10}$$

Здесь δ_{nK} — символ Кронекера.

Различные условия, при которых имеют место вышеприведенные свойства функций $\theta(\eta_K, x)$ и $h(\eta_K, x)$, рассмотрены, например, в [4, 5].

Предполагается, что $\sigma(x)$ принадлежит классу вектор-функций таких, что их компоненты допускают разложения в ряды соответственно по $\theta(\eta_K, x)$ и $h(\eta_K, x)$.

Пусть существуют функции $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ такие, что

$$a(x) \equiv \mu^2(x), \quad q(x) \equiv \lambda^2(x) - \mu'(x)\,\lambda(x) - \mu(x)\,\lambda'(x)$$

$$b(x) \equiv \lambda^2(x) - \lambda(x)\,\mu'(x) + \mu(x)\,\lambda'(x) - \mu(x)\,\mu''(x) \tag{1.11}$$

$$h(\eta, x) = \lambda(x)\,\theta(\eta, x) - [\mu(x)\,\theta(\eta, x)]'$$

$$n^2(\eta)\,\theta(\eta, x) = \lambda(x)\,h(\eta, x) + \mu(x)\,h'(\eta, x) \tag{1.12}$$

Обозначим $\chi(\eta, x)$ и $m(\eta, x)$ соответственно решения уравнений (1.4) и (1.7), линейно независимые с $\theta(\eta, x)$ и $h(\eta, x)$ и связанные теми же рекуррентными соотношениями (1.12), что и $\theta(\eta, x)$ с $h(\eta, x)$.

Относительно функций $K_{11}(u)$, $K_{12}(u)$, $K_{21}(u)$, $n^2(u)\,K_{22}(u)$, $G(u)$ предположим, что они целые, четные или нечетные одновременно.

Введем функцию

$$\Delta(u) = n^2(u) \det K(u)$$

Пусть на вещественной оси имеет место асимптотика

$$K_{11}(u)\,G^{-1}(u) = n^2(u)\,K_{22}(u)\,G^{-1}(u) = C|u|^{-1} + \underline{O}(|u|^{-1-\varepsilon})$$

$$K_{ij}(u)\,G^{-1}(u) = B|u|^{-2} + \underline{O}(|n|^{-2-\varepsilon}) \;(i \neq j), \; C^2 - B^2 > 0, \; \varepsilon > 0 \tag{1.13}$$

$$u \to \pm\infty$$

а в комплексной плоскости существуют правильные системы контуров $\{C_n\}$ и $\{C_n'\}$ [6], на которых выполняются оценки

$$|K_{ij}(u)\,G^{-1}(u)| \leqslant M|u|^{-\gamma}, \quad u \in C_n, \quad M = \text{const}$$

$$\gamma = 1 \text{ при } i = j = 1; \; \gamma = 2 \text{ при } i \neq j; \; \gamma = 3 \text{ при } i = j = 2$$

$$|K_{ij}(u')\,G(u')\,\Delta^{-1}(u')| \leqslant M|u'|^{\varkappa}, \quad u' \in C_n'$$

$$\varkappa = 1 \text{ при } i = j = 1; \; \varkappa = 0 \text{ при } i \neq j; \; \varkappa = -1 \text{ при } i = j = 2 \tag{1.14}$$

Тогда оцененные функции допускают разложения в ряды по простейшим дробям [6]. Предположим, что эти ряды сходятся абсолютно.

Пусть нули функций $G(u)$ и $\Delta(u)$ простые. Ввиду (1.13) на действительной оси их число может быть лишь конечным. Обозначим λ_K и μ_K ($K=1, 2,\ldots$) нули соответственно $\Delta(u)$ и $G(u)$, лежащие в верхней полуплоскости или на положительной полуоси.

2. *Разрешимость и единственность.* Определим пространство $H_\lambda(B, T)$ как множество вектор-функций $q(u)$ таких, что

$$\| q \|^2_{H_\lambda(B,\,T)} = \sum_{n=1}^{\infty} | M_n^{-\lambda} q_n^* |^2 < \infty$$

$$q_n^* = \int_B^T R_n(x)\, q(x)\, dx \tag{2.1}$$

где

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{u^2+D^2}} \begin{pmatrix} C & B \\ B & C \end{pmatrix}, \qquad R_K(x) = \begin{pmatrix} \theta(\eta_K, x) & 0 \\ 0 & n(\eta_K)\, h(\eta_K, x) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$D = \mathrm{const}$$

Введем пространство $H_\lambda(a, b)$ как совокупность сужений на (a, b) обобщенных вектор-функций из $H_\lambda(B, T)$. В пространстве $H_\lambda(a, b)$ вводится норма

$$\| q \|_{H_\lambda(a,\,b)} = \inf \| q^C \|_{H_\lambda(B,\,T)} \tag{2.3}$$

inf берется по всем вектор-функциям $q^C \in H_\lambda(B, T)$, сужение которых на (a, b) совпадает с q.

Обозначим через $C_0^\infty(a, b)$ множество всех бесконечно дифференцируемых вектор-функций, равных нулю вне компактных подмножеств в (a, b).

Пространство $\overset{\circ}{H}_\lambda(a, b)$ определим как замыкание множества $C_0^\infty(a, b)$ в норме $\|\cdot\|_{H_\lambda(B,\,T)}$.

Норма элемента $q \in \overset{\circ}{H}_\lambda(a, b)$ совпадает с его нормой в $H_\lambda(B, T)$. Введенные пространства заимствованы из [7], где изучены их свойства.

Указанные в пункте 1 свойства системы интегральных уравнений обеспечивают выполнение следующих теорем.

Теорема 2.1. Пусть $K_{11}(\eta_n)\, G^{-1}(\eta_n) > 0$, $\Delta(\eta_n)\, G^{-1}(\eta_n) > 0$, $(n=1, 2,\ldots)$. Тогда система (1.1) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{H}_{-0.5}(a, b)$ при любой правой части, принадлежащей $H_{0.5}(a, b)$.

3. *Преобразование ядра системы.* Преобразуем ядро системы интегральных уравнений. Для этого разложим функции $K_{ij}(z)\, G^{-1}(z)$ ($i=1,\ j=1;\ i=1,\ j=2;\ i=2,\ j=1$), $K_{22}(z)\, n^2(z)\, G^{-1}(z)$ на простейшие дроби [6] и подставим в (1.1). Поменяв местами порядок суммирования и вычислив внутренние ряды, получаем

$$k(x, y) = -2 \sum_{K=1}^{\infty} \mu_K \begin{pmatrix} W_{11}^K \varphi_{11}(\mu_K, x, y) & W_{12}^K \varphi_{12}(\mu_K, x, y) \\ W_{21}^K \varphi_{12}(\mu_K, y, x) & W_{22}^K \varphi_{22}(\mu_K, x, y) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$W_{ij}^K = K_{ij}(\mu_K)[G'(\mu_K)]^{-1} \quad (i = j = 1 \text{ или } i \neq j) \quad (3.2)$$

$$W_{22}^K = K_{22}(\mu_K) n^2(\mu_K)[G'(\mu_K)]^{-1} \quad (3.3)$$

$$\varphi_{11}(\gamma, x, y) = \begin{cases} \varphi(\gamma, x)\psi(\gamma, y), & x > y \\ \varphi(\gamma, y)\psi(\gamma, x), & x < y \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\varphi_{12}(\gamma, x, y) = \begin{cases} n^2(\gamma)\varphi(\gamma, x) g(\gamma, y), & x > y \\ \psi(\gamma, x) f(\gamma, y), & x < y \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\varphi_{22}(\gamma, x, y) = \begin{cases} f(\gamma, x) g(\gamma, y), & x > y \\ f(\gamma, y) g(\gamma, x), & x < y \end{cases}$$

Здесь

$$\varphi(\lambda, x) = A[\chi(\lambda, x) - \varkappa(T)\theta(\lambda, x)]$$

$$\psi(\lambda, x) = A^{-1}C_3[\chi(\lambda, x) - \varkappa(B)\theta(\lambda, x)]$$

$$f(\lambda, x) = A[m(\lambda, x) - s(T) h(\lambda, x)]$$

$$g(\lambda, x) = A^{-1}[m(\lambda, x) - s(B) h(\lambda, x)]$$

где A — произвольная постоянная.

$$\varkappa(t) = [\alpha_t^{(1)}\chi(\lambda, t) + \alpha_t^{(2)}\chi'(\lambda, t)][\alpha_t^{(1)}\theta(\lambda, t) + \alpha_t^{(2)}\theta'(\lambda, t)]^{-1}$$

$$s(t) = [\beta_t^{(1)} m(\lambda, t) + \beta_t^{(2)} m'(\lambda, t)][\beta_t^{(1)} h(\lambda, t) + \beta_t^{(2)} h'(\lambda, t)]^{-1}$$

$$C_3 = \{a(x) W\langle \chi(\lambda, x), \theta(\lambda, x)\rangle [\varkappa(B) - \varkappa(T)]\}^{-1}$$

$$C_5 = \{a(x) W\langle m(\lambda, x), h(\lambda, x)\rangle [s(B) - s(T)]\}^{-1}$$

Здесь $W\langle\ldots\rangle$ означает вронскиан, в котором дифференцирование проводится по второму параметру. Ввиду известных свойств вронскиана C_3 и C_5 — постоянные.

$$\frac{s(B)}{\varkappa(B)} = \frac{\varkappa(T)}{s(T)} = 1, \quad C_5 = C_3 n^2(\lambda)$$

4. *Сведение системы интегральных уравнений к бесконечной алгебраической системе.* Пусть элементы вектор-функции $u(x)$ допускают представление в виде рядов соответственно по $\theta(\gamma_K, x)$ и $h(\gamma_K, x)$. Тогда достаточно ограничиться правой частью системы (1.1) вида

$$u(x) = \begin{pmatrix} \theta(\gamma, x) \\ h(\gamma, x) \end{pmatrix}, \quad x \in (a, b) \quad (4.1)$$

Продолжим правую часть системы (1.1) на весь отрезок (B, T) некоторой неизвестной вектор-функцией. Тогда, обращая уравнение (1.1) и используя преобразование, аналогичное описанному в пункте 3, получим следующее представление решения системы (1.1):

$$\sigma(x)=\begin{pmatrix} \alpha(\eta)\,\theta(\eta, x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{(1)}\varphi(\lambda_n, x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^{(1)}\psi(\lambda_n, x) \\ \beta(\eta)\,h(\eta, x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{(2)} f(\lambda_n, x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^{(2)} g(\lambda_n, x) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\eta) &= G(\eta)\,\Delta^{-1}(\eta)\,n^2(\eta)[K_{22}(\eta)-K_{12}(\eta)] \\ \beta(\eta) &= G(\eta)\,\Delta^{-1}(\eta)\,[K_{11}(\eta)-K_{21}(\eta)] \end{aligned} \tag{4.3}$$

$x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ $(n=1, 2,\ldots)$ — неизвестные постоянные, между которыми имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} K_{21}(\lambda_n)\,x_n^{(1)}+n^2(\lambda_n)\,K_{22}(\lambda_n)\,x_n^{(2)} &= 0 \\ K_{21}(\lambda_n)\,y_n^{(1)}+K_{22}(\lambda_n)\,y_n^{(2)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Подставим (4.2) в уравнение (1.1) с ядром (3.1) и произведем интегрирование. После приравнивания коэффициентов при $\varphi(\lambda_n, x)$, $\psi(\lambda_n, x)$, $f(\lambda_n, x)$, $g(\lambda_n, x)$ с учетом (4.4) получаем следующие равенства, выполнение которых является достаточным условием того, что вектор-функция (4.2) является решением уравнения (1.1)

$$\sum_{S=1}^{\infty}\left[\frac{K_{i1}(\mu_K)}{K_{i2}(\mu_K)}\langle \varphi(\lambda_S, b), \varphi(\mu_K, b)\rangle - \right.$$

$$\left. -\frac{K_{21}(\lambda_S)}{n^2(\lambda_S)\,K_{22}(\lambda_S)}\langle f(\lambda_S, b), f(\mu_K, b)\rangle\right] x_S^{(1)} +$$

$$+\sum_{S=1}^{\infty}\left[\frac{K_{i1}(\mu_K)}{K_{i2}(\mu_K)}\langle \psi(\lambda_S, b), \varphi(\mu_K, b)\rangle - \right.$$

$$\left. -\frac{K_{21}(\lambda_S)}{K_{22}(\lambda_S)}\langle g(\lambda_S, b), f(\mu_K, b)\rangle\right] y_S^{(1)} =$$

$$=-\frac{K_{i1}(\mu_K)}{K_{i2}(\mu_K)}\,\alpha(\eta)\,\langle \theta(\eta, b), \varphi(\mu_K, b)\rangle-\beta(\eta)\,\langle h(\eta, b), f(\mu_K, b)\rangle \tag{4.5}$$

$$\sum_{S=1}^{\infty}\left[\frac{K_{i1}(\mu_K)}{n^2(\mu_K)K_{i2}(\mu_K)}\langle \varphi(\lambda_S, a), \psi(\mu_K, a)\rangle - \right.$$

$$\left. -\frac{K_{21}(\lambda_S)}{n^2(\lambda_S)\,K_{22}(\lambda_S)}\langle f(\lambda_S, a), g(\mu_K, a)\rangle\right] x_S^{(1)} +$$

$$+\sum_{S=1}^{\infty}\left[\frac{K_{11}(\mu_K)}{n^2(\mu_K)K_{12}(\mu_K)}\langle\psi(\lambda_S,a),\psi(\mu_K,a)\rangle-\right.$$

$$\left.-\frac{K_{21}(\lambda_S)}{K_{22}(\lambda_S)}\langle g(\lambda_S,a),g(\mu_K,a)\rangle\right]y_S^{(1)}=$$

$$=-\frac{K_{11}(\mu_K)\alpha(\eta)}{K_{12}(\mu_K)n^2(\mu_K)}\langle\theta(\eta,a),\varphi(\mu_K,a)\rangle-\beta(\eta)\langle h(\eta,a),g(\mu_K,a)\rangle \quad (4.6)$$

$$\langle f(\gamma,a),h(\beta,a)\rangle=(\gamma^2-\beta^2)^{-1}\mu^2(a)\left[f(\gamma,a)\frac{\partial h(\beta,a)}{\partial a}-\right.$$

$$\left.-h(\beta,a)\frac{\partial f(\gamma,a)}{\partial a}\right]\qquad i=1,2;\quad K=1,2,3,\ldots \quad (4.7)$$

Будем рассматривать равенства (4.5) — (4.6) как бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения $x_n^{(1)}$ и $y_n^{(1)}$. С помощью бесконечных матриц и векторов система (4.5) — (4.6) записывается в виде

$$B_{11}^{*}y+B_{12}^{*}x=D_1^{*} \quad (4.8)$$

$$B_{21}^{*}y+B_{22}^{*}x=D_2^{*} \quad (4.9)$$

Элементы строк матриц B_{11}^{*}, B_{21}^{*} совпадают с коэффициентами при $y_K^{(1)}$ соответственно в (4.5) и (4.6), причем для нечетных строк $i=1$, для четных $i=2$. Аналогично определяются и матрицы B_{12}^{*} и B_{22}^{*}.

Предположим, что имеет место асимптотика

$$\frac{\partial\varphi(\mu_S,x)}{\partial x}=p\frac{\mu_S\varphi(\mu_S,x)}{\mu(x)}[1+\underline{O}(S^{-1})]$$

$$\frac{\partial\psi(\lambda_K,x)}{\partial x}=-p\frac{\lambda_K\psi(\lambda_K,x)}{\mu(x)}[1+\underline{O}(K^{-1})]$$

$$p=\text{const};\quad S,K\gg 1 \quad (4.10)$$

Разделим строки системы (4.8) на $p(\mu_K-C)\mu(b)\varphi(\mu_K,b)$, а строки системы (4.9) на $-p(\mu_K-C)^{-1}\mu(a)\psi(\mu_K,a)$ и сделаем замену

$$X_S=\varphi(\lambda_S,a)x_S^{(1)},\quad Y_S=\psi(\lambda_S,b)y_S^{(1)} \quad (4.11)$$

Преобразованную систему обозначим

$$B_{11}Y+B_{12}X=d_1 \quad (4.12)$$

$$B_{21}Y+B_{22}X=d_2 \quad (4.13)$$

Исследование асимптотики элементов матриц B_{11} и B_{22} при $S,K\to\infty$ позволяет расщепить каждую из матриц B_{11} и B_{22} на две

$$B_{11}=A+C_{11},\quad B_{22}=A+C_{22} \quad (4.14)$$

где матрица $A=(a_{KS})$ имеет элементы

$$a_{2K-1,\,S}=\left(\frac{K_{11}(\mu_K)}{(\mu_K-C)\,K_{12}(\mu_K)}-\frac{K_{21}(\lambda_S)}{(\lambda_S-C)\,K_{22}(\lambda_S)}\right)(\lambda_S-\mu_K)^{-1} \quad (4.15)$$

$$a_{2K,\,S}=\left(\frac{K_{21}(\mu_K)}{(\mu_K-C)\,K_{22}(\mu_K)}-\frac{K_{21}(\lambda_S)}{(\lambda_S-C)\,K_{22}(\lambda_S)}\right)(\lambda_S-\mu_K)^{-1} \quad (4.16)$$

5. *Обращение матрицы* A. Построим матрицу $A^{-1}=(\tau_{lS})$ такую, что $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$ (I — единичная матрица). Для построения матрицы A^{-1} в случае отсутствия действительных λ_S и μ_S рассмотрим следующую систему интегральных уравнений на полуоси:

$$\int_0^\infty h(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi=f(x), \quad 0\leqslant x<\infty \quad (5.1)$$

где

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} H(u)\,G^{-1}(u)\,e^{iux}\,du \quad (5.2)$$

$$H(u)=\begin{pmatrix} K_{11}(u) & (u-C)\,K_{12}(u) \\ (u+C)\,K_{21}(u) & n^2(u)\,K_{22}(u)\end{pmatrix}, \quad f(x)=\begin{pmatrix}\lambda e^{i\mu_l x} \\ \mu e^{i\mu_l x}\end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$\varphi(x)$ — неизвестная на $(0,\infty)$ вектор-функция.

Решая (5.1) методом Винера-Хопфа [5] и заменяя все входящие в решение интегралы рядами по теории вычетов, получаем

$$\varphi(x)=\sum_{K=1}^{\infty} C_K(l)\,e^{i\lambda_K x} \quad (5.4)$$

где вектор $C_K(l)$ имеет вид

$$C_K(l)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{G_-(\lambda_K)\,G_+(\mu_l)}{\Delta_-(\lambda_K)\,\Delta_+(\mu_l)}\,a_-(\lambda_K)\,a_+(\mu_l)\,F(\lambda_K) \quad (5.5)$$

где

$$F(u)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}\,(\mu_l-u)}\begin{pmatrix}\lambda \\ \mu\end{pmatrix}, \quad C_K(l)=\begin{pmatrix}C_K^{(1)}(l) \\ C_K^{(2)}(l)\end{pmatrix}$$

причем

$$K_{21}(\lambda_K)\,C_K^{(1)}(l)+(\lambda_K-C)\,K_{22}(\lambda_K)\,C_K^{(2)}(l)=0 \quad (5.6)$$

Здесь

$$a_{\pm}(u) = \Delta_{\pm}(u) H_{\pm}^{-1}(u) = \begin{pmatrix} a_{11}^{\pm}(u) & a_{12}^{\pm}(u) \\ a_{21}^{\pm}(u) & a_{22}^{\pm}(u) \end{pmatrix}$$

$$H(u) = H_{+}(u) \cdot H_{-}(u) \tag{5.7}$$

$G_{\pm}(u)$, $\Delta_{\pm}(u)$, $H_{\pm}(u)$ — результаты факторизации функций $G(u)$, $\Delta(u)$ и матрицы $H(u)$ относительно вещественной оси [6].

Подставим решение в виде (5.4) в (5.1). Разложим ядро $H(u)$ в ряд по вычетам и произведем интегрирование. После приравнивания коэффициентов при экспонентах, получаем следующие соотношения:

$$-2\pi [G'(\mu_S)]^{-1} H(\mu_S) \sum_{K=1}^{\infty} C_K(l) \frac{1}{\lambda_K - \mu_S} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \delta_{lS}, \quad S = 1, 2, \ldots \tag{5.8}$$

Заменив $C_K^{(2)}(l)$ через $C_K^{(1)}(l)$ по формуле (5.6) и положив один раз

$$\lambda = -\frac{2\pi (\mu_l - C) K_{12}(\mu_l)}{G'(\mu_l)}, \quad \mu = 0$$

другой раз

$$\lambda = 0, \qquad \mu = -\frac{2\pi n^2 (\mu_l) K_{22}(\mu_l)}{G'(\mu_l)}$$

получаем, что элементы обратной справа к A матрицы A^{-1} $(A \cdot A^{-1} = I)$ имеют вид

$$\tau_{lK} = \frac{G_{-}(\lambda_S)(\mu_l - C)[G'_{-}(\mu_l)]^{-1}}{\Delta'_{-}(\lambda_S)\Delta_{+}(\mu_l)(\lambda_K - \mu_l)} \times$$

$$\times \begin{cases} K_{12}(\mu_l)[a_{11}^{-}(\lambda_S) a_{11}^{+}(\mu_l) + a_{12}^{-}(\lambda_S) a_{21}^{+}(\mu_l)], & K = 2S - 1 \\ (\mu_l + C) K_{22}(\mu_l)[a_{11}^{-}(\lambda_S) a_{12}^{+}(\mu_l) + a_{12}^{-}(\lambda_S) a_{22}^{+}(\mu_l)], & K = 2S \end{cases} \tag{5.9}$$

Равенство $A^{-1} \cdot A = I$ проверяется непосредственно. Также непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ и в случае наличия действительных μ_K и λ_K, если факторизация проводилась относительно контура σ, совпадающего с вещественной осью всюду, за исключением окрестностей действительных μ_K и λ_K, причем μ_K и λ_K обходятся снизу, а $-\mu_K$ и $-\lambda_K$ — сверху.

6. *Вырожденный случай*. Некоторого упрощения удается добиться, если множество нулей функции $G(u)$ содержится в множестве нулей функции $\Delta(u)$. Подобное распределение нулей $G(u)$ и $\Delta(u)$ характерно для систем интегральных уравнений, к которым сводятся задачи, допускающие разделение переменных.

Будем в дальнейшем под λ_K подразумевать лишь те нули $\Delta(u)$, которые не совпадают с нулями $G(u)$.

Общий вид решения (4.2), (4.3) и системы (4.5) и (4.6) остаются прежними, но в каждой из систем (4.5), (4.6) K-ое уравнение для $i=1$ эквивалентно K-тому уравнению для $i=2$.

Таким образом, для определения $x_S^{(1)}$ и $y_S^{(1)}$ служат системы (4.5), (4.6) для $i=1$.

Дальнейшие преобразования и замена (4.11) сохраняются. В итоге приходим к необходимости обратить матрицу

$$a_{SK}=\left(\frac{K_{11}(\mu_K)}{(\mu_K-C)\,K_{12}(\mu_K)}-\frac{K_{21}(\lambda_S)}{(\lambda_S-C)\,K_{22}(\lambda_S)}\right)(\lambda_S-\mu_K)^{-1} \quad (6.1)$$

Так же, как в предыдущем пункте, но с учетом условия, наложенного на нули функции $G(u)$, получаем двустороннюю обратную к A матрицу A^{-1}, положив в (5.8)

$$\lambda=-\frac{2\pi(\mu_l-C)\,K_{12}(\mu_l)}{G'(\mu_l)},\qquad \mu=-\frac{2\pi n^2(\mu_l)\,K_{22}(\mu_l)}{G'(\mu_l)}$$

Тогда, использовав матричное равенство

$$\Delta_+(u)\,H_-(u)=a_+(u)\,H(u)$$

получаем

$$\tau_{lK}=\frac{G_-(\lambda_K)\left[a_{12}^-(\mu_K)\,a_{11}^-(\lambda_l)-a_{11}^-(\mu_K)\,a_{12}^-(\lambda_l)\right]}{\Delta_-(\lambda_l)\,(\lambda_l-\mu_K)\,G_-'(\mu_K)}$$

7. *Переход к операторным уравнениям второго рода.* Построив матрицу A^{-1}, умножим уравнения (4.14) слева на матрицу A^{-1}. В результате приходим к уравнениям второго рода в пространствах числовых последовательностей

$$Y+A^{-1}C_{11}Y+A^{-1}B_{12}X=A^{-1}d_1,\quad X+A^{-1}B_{21}Y+A^{-1}C_{22}X=A^{-1}d_2 \quad (7.1)$$

Свойства уравнений (7.1) зависят от свойств матриц $G^{-1}(u)\,H(u)$ и $G_\pm^{-1}(u)\,H_\pm(u)$.

Введем пространство числовых последовательностей, убывающих с весом K^λ. Обозначим его $C(\lambda)$. После введения нормы

$$\|x\|_{C(\lambda)}=\sup_K K^\lambda\,|x_K|$$

$C(\lambda)$ превращается в банахово пространство [10].

Теорема 7.1. *Пусть в условиях вырожденного случая имеют место оценки (4.10) и пусть, кроме того, выполняются следующие асимптотические оценки при $S,K\to\infty$:*

а)

$$\lambda_S=aSi+b_1+\underline{O}(S^{-1}),\quad \mu_K=aKi+b_2+\underline{O}(K^{-1})$$

б)

$$\frac{a_{ij}^{-}(\mu_K)}{G_{-}^{'}(\mu_K)} = K^{-\tau}(1+\overline{O}(1)), \qquad \frac{G_{-}(\lambda_S)\,a_{ij}^{-}(\lambda_S)}{\Delta_{-}^{'}(\lambda_S)} = S^{\tau}(1+\overline{O}(1))$$

в)

$$K_{i1}(x_S)\left[(x_S - C)\,K_{i2}(x_S)\right]^{-1} = O(1), \ \ \operatorname{Im} x_S \gg 1, \quad x_1 = \lambda_S, \quad x_2 = \mu_i$$

Тогда матрицы $A^{-1}C_{11}$, $A^{-1}C_{22}$, $A^{-1}B_{12}$, $A^{-1}B_{21}$ порождают вполне непрерывные операторы в пространствах $C(\sigma)$ $(0<\sigma<0.5)$.

8. *Примеры*

а) Симметричные или антисимметричные колебания двух штампов на параллельных поверхностях упругого прямоугольника. В этом случае

$$\varphi(\gamma,\ x) = l(\gamma)\cos\gamma x, \quad f(\gamma,\ x) = m(\gamma)\sin\gamma x$$

γ_k, $l(\gamma)$, $m(\gamma)$ определяются из граничных условий на торцах.

б) Осесимметричная задача о колебаниях штампов, приклеенных к противоположным основаниям упругого цилиндра конечной длины. Здесь

$$\varphi(\gamma,\ x) = l(\gamma)\,J_0(\gamma x), \quad f(\gamma,\ x) = m(\gamma)\,J_1(\gamma,\ x)$$

γ_k, $l(\gamma)$, $m(\gamma)$ определяются из граничных условий на боковой поверхности.

в) Осесимметричная задача о вибрации штампа на поверхности упругой сферы со свободной или закрепленной внутренней поверхностью

$$\varphi(\gamma_n,\ x) = \sqrt{n+0.5}\ P_n(x), \qquad f(\gamma_n,\ x) = \sqrt{n+0.5}\ P_n^{(1)}(x)$$

Во всех приведенных примерах распределение нулей функции $G(u)$ и $\Delta(u)$ удовлетворяет условиям вырожденного случая.

НИИ механики и прикладной математики
Ростовского государственного университета
Ростовский инженерно-строительный институт

Поступила 20 VII 1977

Վ. Ա. ԲԱԲԵՇԿՈ, Վ. Ն. ՎԵԿՍԼԵՐ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅՈՒՄ ՀԱՆԴԻՊՈՂ ԱՌԱՋԻՆ ՍԵՌԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է Շտուրմ-Լիուվիլի որոշ խնդիրների լուծումներով նկարագրվող կորիզներով հատվածի վրա առաջին սեռի երկու ինտեգրալ հավասարումներից կազմված սիստեմ. Նման սիստեմները բնորոշ են առաձգականության տեսության և մաթեմատիկական ֆիզիկայի մի շարք խառը խնդիրների համար։ Սահմանվել են միակության և լուծելիության որոշ պայ-

մասներ։ Ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծումը բերվել է հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի։ Այդ սիստեմը ֆակտորիզացիայի մեթոդի օգնությամբ ռեգուլյարացվում է։

ON SOME SYSTEMS OF INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND OCCURRING IN THE THEORY OF ELASTICITY AND IN MATHEMATICAL PHYSICS

V. A. BABESHKO, V. E. VEXLER

S u m m a r y

A system of two integral equations of the first kind on the length with kernels, described in the solutions for some problems of Sturm--Liouville, is dealt with in the paper. Such systems are characteristic of a number of mixed problems in mathematical physics and the theory of elasticity in the case of complete separation of boundary conditions. Some conditions of solvability and uniqueness are given. The general type of solution is found. The solution to the system of integral equations is reduced to that for an infinite system of linear algebraic equations. The latter is regularized by the factorization method. A special case of distribution of kernel peculiarities in the system of integral equations is singled out permitting a substantial simplification of the infinite system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В. А.* К теории и приложениям некоторых интегральных уравнений первого рода. Докл. АН СССР, 1972, т. 204, № 2.
2. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 1.
3. *Александров В. М.* Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных рядов-уравнений к бесконечным алгебраическим системам. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
4. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. 1. М., Изд. ИЛ, 1960.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
7. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. УМН, 1965, т. 20, вып. 1.
8. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа. М., Изд. ИЛ, 1962.
9. *Бабешко В. А.* Факторизация одного класса матриц-функций и ее приложения. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 5.
10. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.