ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, №4, 1978 Механика

И. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ

УРАВНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СО СКАЧКООБРАЗНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

1. *Уравнения Лагранжа для случая* $m=m(t)$

Будем рассматривать сначала случай, когда изменение массы системы зависит от времени t.

Рассматриваем систему p материальных точек m_p, имеющих r степеней свободы.

Вводим независящие друг от друга обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_r$ в смысле Лагранжа, которые определяют положение точек, принадлежащих объему, занятому скачкообразно изменяющейся массой, связанные с декартовыми координатами соотношениями

$$\overline{r}_p = r_p(q_1, q_2, \ldots, q_r), \quad (p=1, 2, \ldots, m) \tag{1.1}$$

Напишем общее уравнение для тела со скачкообразно изменяющейся массой (путем отцепления) в таком виде:

$$\frac{d}{dt}\left\{\left[m_{0_p} - \sum_{j=1}^{n} \mu_{jp}(\tau_j) H(t-\tau_j)\right]\overline{v}_{jp}\right\} = \overline{R}'_{jp} + \overline{R}^{\cdot}_{jp} +$$

$$+ \overline{F}^{v}_{jp} + \sum_{j=1}^{n} \overline{v}^{r}_{jp}\mu_{jp}(\tau_j)\delta(t-\tau_j) \quad (p=1, 2, \ldots, m) \tag{1.2}$$

где m_{0_p} — масса, $H(t-\tau_j)$ — функция Хевисайда, $\overline{R}^{\cdot}_{jp}$ — равнодействующая (результирующая) внутренних сил, $\overline{R}'_{jp}$ — равнодействующая (результирующая) внешних сил, $\overline{F}^{v}_{jp}$ — равнодействующая (результирующая) скачкообразно изменяющихся массовых сил, $\delta(t-\tau_j)$ — функция распределения Дирака.

Умножая скалярно соотношение (1.2) на виртуальное смещение $\Delta\overline{r}_p$ и суммируя, получаем

$$\sum_{p=1}^{m}\frac{d}{dt}\left\{\left[m_{0p} - \sum_{j=1}^{n} \mu_{jp}(\tau_j) H(t-\tau_j)\right]\overline{v}_{jp}\right\}\Delta\overline{r}_p =$$

$$= \sum_{p=1}^{m}\overline{R}'_{jp}\Delta\overline{r}_p + \sum_{p=1}^{m}\overline{R}^{\cdot}_{jp}\Delta\overline{r}_p + \sum_{p=1}^{m}\overline{F}^{v}_{jp}\Delta\overline{r}_p + \sum_{p=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{v}^{r}_{jp}\mu_{jp}(\tau_j)\delta(t-\tau_j)\Delta\overline{r}_p \tag{1.3}$$

Положим, что частицы, принадлежащие телу, не перемещаются одна по отношению к другой и, следовательно,

$$\sum_{p=1}^{m} \overline{R}'_{jp} \Delta \overline{r}_p = 0 \tag{1.4}$$

Имея в виду соотношение (1.1), можно записать

$$\Delta \overline{r}_p = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k, \quad (p = 1, 2, \ldots, m)$$

Подставляя это выражение в (1.3), получаем

$$\sum_{p=1}^{m} \frac{d}{dt} \left\{ \left[m_{0p} - \sum_{j=1}^{n} \mu_{jp}(\tau_j) H(t-\tau_j) \right] \overline{v}_{jp} \right\} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k =$$

$$= \sum_{p=1}^{m} \overline{R}'_{jp} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k + \sum_{p=1}^{m} \overline{F}^{v}_{jp} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k + \sum_{p=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{v}^{r}_{jp} \mu_{jp}(\tau_j) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{v}^{r}_{jp} \mu_{jp}(\tau_j) \delta(t-\tau_j) \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k, \quad \text{или} \tag{1.5}$$

$$\sum_{k=1}^{r} \left\{ \sum_{p=1}^{m} \frac{d}{dt} \left[\left(m_{0p} - \sum_{j=1}^{n} \mu_{jp}(\tau_j) H(t-\tau_j) \right) \overline{v}^{r}_{jp} \right] \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} \right\} \Delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{p=1}^{m} \overline{R}'_{jp} \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} + \sum_{p=1}^{m} \overline{F}^{v}_{jp} \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} \right] \Delta q_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{p=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{v}^{r}_{jp} \mu_{jp}(\tau_j) \delta(t-\tau_j) \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} \right] \Delta q_k$$

Аналогичным путем, как для случая непрерывно изменяющейся массы, можем написать

$$\frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} = \frac{\partial \overline{v}_p}{\partial q_k}, \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \overline{v}_p}{\partial q_k}$$

причем производные понимаются в смысле теории распределения.

Обозначаем обобщенные силы через

$$Q_{kc} = \sum_{p=1}^{m} \overline{R}'_{jp} \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} \quad \text{и} \quad Q_{kv} = \sum_{p=1}^{m} \overline{F}^{v}_{jp} \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} \tag{1.6}$$

Предполагая, что m_p зависит только от времени t, имеем

$$\sum_{p=1}^{m} \frac{d}{dt} \left\{ \left[m_{0p} - \sum_{j=1}^{n} \mu_{jp}(\tau_j) H(t-\tau_j) \right] \overline{v}_{jp} \right\} \frac{\partial \overline{r}_p}{\partial q_k} =$$

$$=\frac{d}{\partial t}\left\{\sum_{p=1}^{m}\left[m_{0p}-\sum_{j=1}^{n}\mu_{jp}(\tau_j)H(t-\tau_j)\right]\bar{v}_{jp}\frac{\partial\bar{r}_p}{\partial q_k}\right\}-$$

$$-\sum_{p=1}^{m}\left[m_{0p}-\sum_{j=1}^{n}\mu_{jp}(\tau_j)H(t-\tau_j)\right]\bar{v}_{jp}\frac{\partial\bar{v}_p}{\partial q_k}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{2}\left[m_{0p}-\sum_{j=1}^{n}\mu_{jp}(\tau_j)H(t-\tau_j)\right]\bar{v}_{jp}^2\right\}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{2}\left[m_{0p}-\sum_{j=1}^{n}\mu_{jp}(\tau_j)H(t-\tau_j)\right]\bar{v}_{jp}^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}$$

где T — кинетическая энергия системы.

Обозначим

$$\sum_{p=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{v}_{jp}\mu_{jp}(\tau_j)\delta(t-\tau_j)\frac{\partial\bar{r}_p}{\partial q_k}=\sum_{p=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{v}_{jp}\mu_{jp}(\tau_j)\delta(t-\tau_j)\frac{\partial\bar{v}_p}{\partial \dot{q}_k}=F_{ak} \quad (1.7)$$

где F_{ak} — обобщенная реактивная сила.

Тогда уравнение (1.5) примет вид

$$\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_{kc}-Q_{kv}-F_{ak}\right]\Delta q_k=0$$

Так как параметры q_k являются независящими друг от друга, то из вышеприведенного соотношения получается система уравнений Лагранжа для r степеней свободы системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_{kc}+Q_{kv}+F_{ak}, \quad (k=1, 2, \ldots, r) \quad (1.8)$$

где обобщенные силы Q_{kc}, Q_{kv} и F_{ak} определяются соотношениями (1.6) и (1.7).

2. *Уравнения Гамильтона*

Для того чтобы вывести канонические уравнения Гамильтона, вводим обобщенные импульсы соотношениями

$$p_k=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left\{\frac{1}{2}\left[m_{0p}-\sum_{j=1}^{n}\mu_{jp}(\tau_j)H(t-\tau_j)\right]v_{jp}^2\right\}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}; \quad (k=1, 2,\ldots, r) \quad (2.1)$$

Считая, что выражение кинетической энергии зависит от q_k и $\dot{q}_k$, имеем:

$$\Delta T(q_k, \dot{q}_k)=\frac{\partial T}{\partial q_k}\Delta q_k+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\Delta\dot{q}_k=\frac{\partial T}{\partial q_k}\Delta q_k+\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)-\dot{q}_k\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)$$

откуда получается

$$\Delta\left(-T+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)=\dot{q}_k\Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}\Delta q_k$$

Вводим функцию Гамильтона, которую рассматриваем как функцию от q_k и p_k:

$$H(q_k, p_k)=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-T=p_k\dot{q}_k-T \tag{2.2}$$

Вариация этой функции будет

$$\Delta H=\dot{q}_k\Delta p_k-\frac{\partial T}{\partial q_k}\Delta q_k \tag{2.3}$$

С другой стороны, из (1.8) получаем

$$\frac{\partial T}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-Q_k-F_{nk}=\dot{p}_k-Q_k-F_{nk}$$

и, следовательно,

$$\Delta H=\dot{q}_k\Delta p_k-(\dot{p}_k-Q_k-F_{nk})\Delta q_k \tag{2.4}$$

Однако вариация функции Гамильтона может быть написана так:

$$\Delta H=\frac{\partial H}{\partial q_k}\Delta q_k+\frac{\partial H}{\partial p_k}\Delta p_k \tag{2.5}$$

Сравнивая соотношения (2.3) и (2.5), получаем обобщенные канонические уравнения для тела со скачкообразно изменяющейся массой

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k};\quad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}+Q_k+F_{nk} \tag{2.6}$$

где

$$F_{nk}=\sum_{p=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{v}_{jp}\,\mu_{jp}(\tau_j)\,\delta(t-\tau_j)\frac{\partial\overline{v}_p}{\partial \dot{q}_k}$$

Напомним, что все производные в соотношении (2.6) понимаются в смысле теории распределения.

3. *Уравнения Лагранжа для случая* $m=m(t, q, \dot{q})$

Будем изучать далее более общий случай, когда масса тела изменяется в зависимости от координат, скоростей и времени.

Возьмем снова систему p материальных точек m_p, имеющих r степеней свободы. Положение какой-либо точки определяется соотношением:

$$\overline{r}_p = \overline{r}_p(q_1, q_2, \dots, q_r), \quad (p = 1, 2, \dots, m) \tag{3.1}$$

Для упрощения будем подразумевать, что масса системы изменяется только примыканием. Имея в виду, что

$$m_p = m_p(q_k, \dot{q}_k, t), \ (k = 1, 2, \dots, r)$$

можем написать для массы

$$m_p = m_{0p} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{ip}(\tau_i) H(t - \tau_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu_{jp}(q_j) H(q - q_j) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\beta} \mu_{\nu p}(\dot{q}_{0\nu}) H(\dot{q} - \dot{q}_{0\nu}) \tag{3.2}$$

а для скорости

$$\overline{v}_p = \overline{v}_{0p} - \sum_{i=1}^{n} \overline{s}_{ip}(\tau_i) H(t - \tau_i) - \sum_{j=1}^{m} \overline{s}_{jp}(q_j) H(q - q_j) -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{\beta} \overline{s}_{\nu p}(\dot{q}_\nu) H(\dot{q} - \dot{q}_{0\nu}) \tag{3.3}$$

Уравнение движения точки системы по отношению к определенной системе отсчета имеет вид

$$m_p \frac{d\overline{v}_p}{dt} = \overline{R}'_p + \overline{R}_p + \overline{R}''_p + \overline{N}_p, \qquad (p = 1, 2, \dots, m) \tag{3.4}$$

где m_p и $\overline{v}_p$ заданы соотношениями (3.2) и (3.3), а $\overline{R}'_p$ является результирующей внешних сил, $\overline{R}''_p$ является результирующей внутренних сил, $\overline{R}_p$ — результирующая реактивных сил, $\overline{N}_p$ — результирующая связывающих сил.

Умножая скалярно соотношение (3.4) на виртуальное смещение $\Delta\overline{r}_p$ и суммируя, получаем

$$\sum_{p=1}^{m} \left[m_p \frac{d\overline{v}_p}{dt} - \overline{R}'_p - \overline{R}_p - \overline{R}''_p - \overline{N}_p \right] \Delta\overline{r}_p = 0$$

Однако

$$\sum_{p=1}^{m} \overline{R}''_p \Delta\overline{r}_p = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{p=1}^{m} \overline{N}_p \Delta\overline{r}_p = 0$$

а

$$\Delta\overline{r}_p = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k} \Delta q_k$$

Поэтому можно написать

$$\sum_{p=1}^{m}\left[m_p\frac{d\overline{v}_p}{dt}-\overline{R}'_p+\overline{R}_p\right]\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}\Delta q_k=0 \qquad (3.5)$$

Первый член выражения (3.5) можно записать и так:

$$\sum_{p=1}^{m}m_p\frac{d\overline{v}_p}{dt}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}\Delta q_k=\sum_{k=1}^{r}\Delta q_k\sum_{p=1}^{m}m_p\frac{d\overline{v}_p}{dt}\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}$$

Далее преобразуем вторую сумму соответствующим образом

$$\sum_{p=1}^{m}m_p\frac{d\overline{v}_p}{dt}\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}=\sum_{p=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(m_p\overline{v}_p\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}\right)-\frac{dm_p}{dt}\overline{v}_p\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}-m_p\overline{v}_p\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}\right)\right]=$$

$$=\sum_{p=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(m_p\frac{\partial\frac{1}{2}\overline{v}_p^2}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{dm_p}{dt}\overline{v}_p\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}-m_p\frac{\partial\frac{1}{2}\overline{v}_p^2}{\partial q_k}\right]=$$

$$=\sum_{p=1}^{m}\left[\frac{d}{\partial t}\left(\frac{\partial\frac{1}{2}m_p\overline{v}_p^2}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial\frac{1}{2}m_p\overline{v}_p^2}{\partial q_k}-\frac{dm_p}{dt}\overline{v}_p\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}-\right.$$

$$\left.-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial m_p}{\partial \dot{q}_k}\frac{\overline{v}_p^2}{2}\right)-\frac{\partial m_p}{\partial q_k}\frac{\overline{v}_p^2}{2}\right]=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}-$$

$$-\sum_{p=1}^{m}\left[\frac{dm_p}{dt}\overline{v}_p\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial m_p}{\partial \dot{q}_k}\frac{\overline{v}_p^2}{2}\right)-\frac{\partial m_p}{\partial q_k}\frac{\overline{v}_p^2}{2}\right] \qquad (3.6)$$

В соотношении (3.6) $T=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m}m_p\overline{v}_p^2$ является суммарной кинетической энергией системы со скачкообразно изменяющейся массой.

Второй член соотношения (3.5)

$$\sum_{p=1}^{m}\overline{R}'_p\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}\Delta q_k=\sum_{k=1}^{r}\Delta q_k\sum_{p=1}^{m}\overline{R}'_p\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}=\sum_{k=1}^{r}\Delta q_k Q_k \qquad (3.7)$$

где $Q_k=\sum_{p=1}^{m}\overline{R}'_p\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}$ — внешняя обобщенная сила.

Аналогичным образом третий член

$$\sum_{p=1}^{m}\overline{R}_p\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}\Delta q_k=\sum_{k=1}^{r}\Delta q_k\sum_{p=1}^{m}\overline{R}_p\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}=\sum_{k=1}^{r}\Delta q_k p_k \qquad (3.8)$$

где $p_k=\sum_{p=1}^{m}\overline{R}_p\frac{\partial\overline{r}_p}{\partial q_k}$ — реактивная обобщенная сила.

Если учесть соотношения (3.6), (3.7) и (3.8), соотношение (3.5) примет вид

$$\sum_{k=1}^{r}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}-\sum_{p=1}^{m}\left[\frac{dm_p}{dt}\bar{v}_p\frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial m_p}{\partial \dot{q}_k}\frac{\bar{v}_p^2}{2}\right)-\frac{\partial m_p}{\partial q_k}\frac{\bar{v}_p^2}{2}\right]-\right.$$

$$\left.-\sum_{p=1}^{m}\bar{F}_{cp}\frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k}-\sum_{p=1}^{m}R_p\frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k}\right\}\Delta q_k=0 \qquad (3.9)$$

Так как параметры q независимы друг от друга, из соотношения (3.9) получается система уравнений Лагранжа для r степеней свободы системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k-p_k-\sum_{p=1}^{m}\left[\frac{dm_p}{dt}\bar{v}_p\frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k}+\right.$$

$$\left.+\frac{d}{dt}\left(\frac{dm_p}{\partial \dot{q}_k}\frac{\bar{v}_p^2}{2}\right)-\frac{\partial m_p}{\partial q_k}\frac{\bar{v}_p^2}{2}\right]=0 \qquad (3.10)$$

Принимая во внимание соотношение (3.2), можно написать

$$\frac{dm_p}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\mu_{ip}(\tau_i)\,\delta(t-\tau_i);\quad \frac{\partial m_p}{\partial \dot{q}_k}=\sum_{\nu=1}^{\beta}\mu_{\nu p}(\dot{q}_\nu)\,\delta(\dot{q}-\dot{q}_\nu)$$

$$\frac{\partial m_p}{\partial q_k}=\sum_{j=1}^{m}\mu_{jp}(q_j)\,\delta(q-q_j)$$

Последний член соотношения (3.10)

$$\sum_{p=1}^{m}\left[\frac{dm_p}{dt}\bar{v}_p\frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial m_p}{\partial \dot{q}_k}\frac{\bar{v}_p^2}{2}\right)-\frac{\partial m_p}{\partial q_k}\frac{\bar{v}_p^2}{2}\right]=$$

$$=\sum_{p=1}^{m}\left\{\bar{v}_p\frac{\partial \bar{r}_p}{\partial q_k}\sum_{i=1}^{n}\mu_{ip}(\tau_i)\,\delta(t-\tau_i)+\frac{d}{dt}\left[\frac{\bar{v}_p^2}{2}\sum_{\nu=1}^{\beta}\mu_{\nu p}(\dot{q}_\nu)\,\delta(\dot{q}-\dot{q}_\nu)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{v}_p^2}{2}\sum_{j=1}^{m}\mu_{jp}(q_j)\,\delta(q-q_j)\right\}=D_k \qquad (3.11)$$

Следовательно, система уравнений Лагранжа для материальных систем со скачкообразно изменяющейся массой будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k-p_k-D_k=0;\quad (k=1,\ldots,r) \qquad (3.12)$$

Вышеприведенный метод имеет тот недостаток, что член D_k требует довольно сложного вычисления. В некоторых случаях, для упрощения вычислений можно применять метод «солидификации», предложенный

И. И. Артоболевским [5] для изучения плоских механизмов со скачкообразно изменяющейся массой.

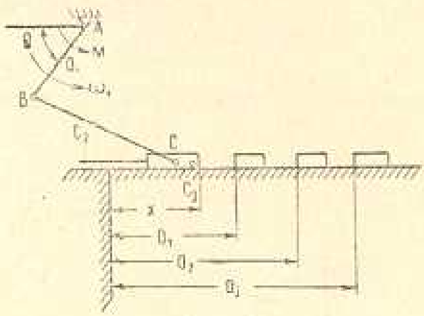
В этом случае уравнения Лагранжа будут иметь такой вид

$$\frac{d^*}{dt}\left(\frac{\partial^* T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial^* T}{\partial q_k}-Q_k-p_k=0; \quad (k=1, 2, \ldots, r) \tag{3.13}$$

где операторы $\frac{d^*}{dt}$, $\frac{\partial^*}{\partial \dot{q}_k}$ и $\frac{\partial^*}{\partial q_k}$ относится к случаю, когда система считается „солидифицированной", то есть имеет постоянную массу.

В уравнениях (3.13) эффект «вариации массы» учитывается обобщенной реактивной силой P_k.

Пример. Рассматриваем механизм на фиг. 1, где обобщенной координатой считается угол вращения ведущего элемента, а обобщенная скорость $\dot{q}=\dot{\theta}=\omega_1$.



Фиг. 1.

Обозначим через М и через M сокращенные обобщенные моменты активных и реактивных сил соответственно.

Кинетическая энергия всего механизма будет выражаться формулой

$$T=\frac{1}{2}J^*\omega_1^2 \tag{3.14}$$

где J^* является сокращенным инерционным моментом механизма с переменной массой, а ω_1 — угловой скоростью ведущего элемента.

Так как механизм имеет только одну степень свободы, уравнение Лагранжа будет иметь вид:

$$\frac{d^*}{dt}\left(\frac{\partial^* T}{d\omega_1}\right)-\frac{\partial^* T}{\partial\theta}=\mathrm{M}-M \tag{3.15}$$

Имея в виду тот факт, что принята гипотеза о том, что масса механизма является постоянной и что сокращенный инерционный момент зависит только от обобщенной координаты θ, уравнению движения придадим вид

$$J^*\frac{d\omega_1}{dt}-\frac{dJ^*}{d\theta}\frac{\omega_1^2}{2}=\mathrm{M}-M \tag{3.16}$$

Для вычисления элементов, входящих в уравнение (3.16), для упрощения будем подразумевать, что угловая скорость ω_1 изменяется непрерывно и что центр масс C_3 с переменным положением достаточно близок к C для того, чтобы пренебрегать расстоянием между ними.

Сокращенный момент активных сил есть

$$M = M_1 - F_r \frac{v_c}{\omega_1} \tag{3.17}$$

где v_c — скорость центра массы C.

Сокращенный момент реактивных сил есть: $M = F_r \frac{v_c}{\omega_1}$, где реактивная сила F_r, имея в виду, что масса изменяется в зависимости от координаты x, выражается соотношением

$$F_r = \frac{dm_3}{dx} \frac{v_c^2}{2}$$

Имея в виду фиг. 1, получаем, что масса элемента 3 механизма изменяется по закону: $m_3 = m_{03} + \sum_{j=1}^{m} \mu(a_j) H(x - a_j)$, где m_{03} — масса в исходный момент, а $\mu(a_j)$ — скачок массы, примерно масса тел перед элементом 3.

Имея в виду изложенное выше, для сокращенного момента реактивных сил будем иметь

$$M = \frac{v_c^3}{2\omega_1} \sum \mu(a_j) \delta(x - a_j) \tag{3.18}$$

Для того, чтобы вычислить суммарную кинетическую энергию «солидифицированного» механизма, определим сокращенный инерционный момент

$$\frac{J^* \omega_1^2}{2} = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_{c2} \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_{c2}^2}{2} + \frac{m_3 v_c^2}{2}$$

или

$$J^* = J_1 + J_{c2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_2 \left(\frac{v_{c2}}{\omega_1}\right)^2 + m_3 \left(\frac{v_c}{\omega_1}\right)^2$$

и

$$\frac{dJ^*}{d\theta} = J_{c2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{v_{c2}}{\omega_1}\right)^2 + m_3 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{v_c}{\omega_1}\right)^2$$

Теперь, считая массу механизма переменной, запишем

$$J^* = J_1 + J_{c2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_2 \left(\frac{v_{c2}}{\omega_1}\right)^2 + \left[m_{03} + \sum_{j=1}^{m} \mu(a_j) H(x - a_j) \right] \left(\frac{v_c}{\omega_1}\right)^2 \tag{3.19}$$

$$\frac{dJ^*}{d\theta}=J_{c2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+m_2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_{c2}}{\omega_1}\right)^2+\left[m_{03}+\sum_{j=1}^{m}\mu(a_j)H(x-a_j)\right]\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_c}{\omega_1}\right)^2 \tag{3.20}$$

Подставляя соотношения (3.17), (3.18) и (3.19) в дифференциальное уравнение, получаем

$$J^*\frac{d\omega_1}{dt}-\left\{J_{c2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+m_2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_{c2}}{\omega_1}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left[m_{03}+\sum_{j=1}^{m}\mu(a_j)H(x-a_j)\right]\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_c}{\omega_1}\right)^2\right\}\frac{\omega_1^2}{2}=$$

$$=\mathrm{M}_1-F\frac{v_c}{\omega_1}-\frac{v_c^3}{2\omega_1}\sum_{j=1}^{m}\mu(a_j)\delta(x-a_j)$$

Заменяя переменную внутри скобок, будем иметь

$$J^*\frac{d\omega_1}{dt}-\left\{J_{c2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+m_2\frac{d}{dt}\left(\frac{v_{c2}}{\omega_1}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left[m_{03}+\sum_{j=1}^{m}\mu(a_j)H(x-a_j)\right]\frac{d}{dt}\left(\frac{v_c}{\omega_1}\right)^2\right\}\frac{\omega_1}{2}=$$

$$=\mathrm{M}_1-F\frac{v_c}{\omega_1}-\frac{v_c^3}{2\omega_1}\sum_{j=1}^{m}\mu(a_j)\delta(x-a_j) \tag{3.21}$$

Введем переменную t в выражения, которые содержат уже функции $H(x-a_j)$ и $\delta(x-a_j)$.

Исходим из равенства

$$m_{03}+\sum_{j=1}^{m}\mu(a_j)H(x-a_j)=m_{03}+\sum_{j=1}^{m}\mu(\tau_j)H(t-\tau_j) \tag{3.22}$$

Дифференцируя здесь оба члена по времени в смысле теории распределения, имеем

$$\frac{d}{dt}\left[m_{03}+\sum_{j=1}^{m}\mu(a_j)H(x-a_j)\right]=\frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\left[m_{03}+\sum_{j=1}^{m}\mu(a_j)H(x-a_j)\right]=$$

$$=\bar{v}_c\frac{d}{dx}\left[\sum_{j=1}^{m}\mu(a_j)H(x-a_j)\right]=\bar{v}_c\sum_{j=1}^{m}\mu(a_j)\delta(x-a_j)$$

$$\frac{d}{dt}\left[m_{03}+\sum_{j=1}^{m}\mu(\tau_j)H(t-\tau_j)\right]=\sum_{j=1}^{m}\mu(\tau_j)\delta(t-\tau_j)$$

Следовательно, можем писать

$$\sum_{j=1}^{m} \mu(a_j)\,\delta(x-a_j) = \frac{1}{v_c}\sum_{j=1}^{m} \mu(\tau_j)\,\delta(t-\tau_j) \tag{3.23}$$

С учетом соотношений (3.22) и (3.23) уравнение (3.21) примет вид

$$J^* \frac{d\omega_1}{dt} - \left\{ J_{c2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_2\frac{d}{dt}\left(\frac{v_{c2}}{\omega_1}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[m_{03} + \sum_{j=1}^{m} \mu(\tau_j)\,H(t-\tau_j) \right] \frac{d}{dt}\left(\frac{v_c}{\omega_1}\right)^2 \right\} \frac{\omega_1}{2} =$$

$$= \mathrm{M}_1 - \frac{F v_c}{\omega_1} - \frac{v_c^2}{2\omega_1}\sum_{j=1}^{m} \mu(\tau_j)\,\delta(t-\tau_j)$$

где

$$J^* = J_1 + J_{c2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{v_{c2}}{\omega_1}\right)^2 + \left[m_{03} + \sum_{j=1}^{m} \mu(\tau_j)\,H(t-\tau_j) \right]\left(\frac{v_c}{\omega_1}\right)^2$$

Петрошанский горный институт
(Румыния)

Поступила 2 XII 1977

Ի. Ն. ԿՈՆՍՏԱՆՏԻՆԵՍԿՈՒ

ԹՌԻՉՔԱՁԵՎ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

*Դիտարկվում են հոլոնոմ սիստեմի Լագրանժի երկրորդ սեռի և Համիլ-
նի հավասարումների կառուցման հարցերը, երբ սիստեմում մասնակցող
ութական կետերի զանգվածները փոփոխվում են թռիչքներով։*

Ուսումնասիրվում են երկու դեպքեր՝

*1. Երբ զանգվածները փոփոխվում են թռիչքաձև միայն ժամանակից
խված։*

*2. Երբ զանգվածները փոփոխվում են ընդհանրացված կոորդինատներից,
ագություններից և ժամանակից կախված։*

*Օգտագործվում են Մեշչերսկու մեթոդը և ընդհանրացված ֆունկցիաների
ությունը։*

Բերվում է կոնկրետ օրինակ։

EQUATIONS OF ANALYTICAL MECHANICS FOR MATERIAL SYSTEMS WITH VARIABLE DISCONTINOUS CHARACTERISTICS

I. N. CONSTANTINESCU

Summary

In the paper the equation of analytical mechanics for material systems with variable discontinous characteristics are studied, that is in the case in which the mass varies discontinously and discontinous variable forces are applied to the system.

The Lagrange equations are approached for the case in which $m = m(t)$ and $m = m(t, q, q)$ as well as the canonical aquations of Hamilton and the equations of Appell.

A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kecs W., Teodorescu P. P.* Aplicatii ale teoriei distributiilor in mecanica. Edit. Academiei R. S. R. Bucuresti, 1970.
2. *Tocaci E.* Aspecte ale utilizarii teoriei distributiilor in mecanica, Studii si cercetari de mecanica aplicata, 29. 1, 27—45. 1970.
3. *Nowacki W.* Dinamica sistemelor elastice. (Trad. din limba poloneza). Edit. Tehnica, Bucuresti, 1969.
4. *Бабаков И. М.* Теория колебания. М., Изд. Наука, 1968.
5. *Артоболевский И. И.* Динамика машин. Сб. статей. М., Машгиз, 1963.