ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 4, 1978 Механика

В. Т. АВАНЯН

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НА ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ (НЕАВТОНОМНАЯ СИСТЕМА)

1. В работе рассматривается задача об устойчивости неавтономной системы в следующей постановке [1].

Определение 1.1. Систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=X(t,\ x) \tag{1.1}$$

где

$$X(t,\ x)\in C_{t,x}^{(0,1)}\,(a\leqslant t<\infty,\ \|x\|<L<\infty);\quad X(t,0)=0$$

назовем устойчивой, если в заданном классе $K_\Delta^\omega \exists G(t)$ — матрица такая, что при достаточно малом $\rho>0$ любое решение $x(t)$, начальное значение $x(t_0)=x_0$ которого удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t_0)\,x_0,\ G^{-1}(t_0)\,x_0)\leqslant\rho^2 \tag{1.2}$$

для всех $t>t_0$ удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t)\,x(t),\ G^{-1}(t)\,x(t))\leqslant\rho^2 \tag{1.3}$$

Под классом K_Δ^ω подразумевается совокупность $n\times n$-матриц $G(t)=(G_1(t),\dots,G_n(t))$ над полем комплексных чисел, удовлетворяющих на $\Delta=[t_0,\infty)$ условиям: а) $|\det G(t)|\neq 0$; б) эрмитова норма столбцов $G_1(t),\dots,G_n(t)$ совпадает с заданной положительной функцией $\omega(t):\|G_j(t)\|=\omega(t)$ $(j=1,\dots,n)$.

Определение 1.2. Система дифференциальных уравнений (1.1) называется асимптотически устойчивой на (a,∞), если: а) она устойчива на $[a,\infty)$; б) $\forall t_0\in(a,\infty)\,\exists\rho(t_0)>0$, такое, что все ее решения $x(t)$, удовлетворяющие условию (1.2), обладают свойством

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$$

Определение 1.3. Систему (1.1) назовем неустойчивой на (a,∞), если $\forall G(t)\in K_\Delta^\omega$, $\rho>0$, и для некоторого $t_0\in(a,\infty)$ $\exists$ $x_\rho(t)$ решение (хотя бы одно) и момент $t_1>t_0$ такие, что

$$(G^{-1}(t_0)\,x_\rho(t_0),\ G^{-1}(t_0)\,x_\rho(t_0))\leqslant\rho^2$$

и

$$(G^{-1}(t_1)\,x_\rho(t_1),\ G^{-1}(t_1)\,x_\rho(t_1))>\rho^2$$

Ниже приводятся некоторые условия устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости неавтономных систем в данной постановке, когда $\omega(t) = \text{const}$.

2. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{2.1}$$

где $A(t) \in C[a, \infty)$ — ограниченная $n \times n$-матрица, такая, что каждое решение системы (2.1) ограничено на $[a, \infty)$. Построим матрицу $K(t) = X(t)\,CZ(t)$, где $X(t)$ — единственное решение матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\,X \quad X(t_0) = E$$

(E — единичная матрица), $C = (c_1, \dots, c_n)$ — постоянная $n \times n$-матрица,

$$Z(t) = \omega \operatorname{diag}\left(\frac{e^{i\theta_1(t)}}{\|Xc_1\|}, \dots, \frac{e^{i\theta_n(t)}}{\|Xc_n\|}\right)$$

непрерывно дифференцируемая на $[a, \infty)$ диагональная матрица, ($\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)$ — непрерывно дифференцируемые на $[a, \infty)$ вещественные скалярные функции). При этом столбцы $K_1(t), \dots, K_n(t)$ матрицы $K(t)$ удовлетворяют условию $\|K_i(t)\| = \omega$ на $[a, \infty)$ $(i = 1, \dots, n)$.

Если обозначить через $\Lambda(t) = -Z^{-1}\dfrac{dZ}{dt}$, то преобразование

$$x = K(t)\,y \tag{2.2}$$

приводит уравнение (2.1) к диагональному виду

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)\,y \quad (\Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))) \tag{2.3}$$

В соответствии с (2.2) и (2.3) имеем

$$x(t) = K(t) \exp \int_{t_0}^{t} \Lambda(\tau)\,d\tau\, y_0 \quad (y_0 = y(t_0)) \tag{2.4}$$

Построим пучок решений уравнения (2.1), берущих начало внутри и на поверхности эллипсоида

$$(H_0^{-1}x_0, H_0^{-1}x_0) \leqslant \rho^2 \tag{2.5}$$

где H_0 — постоянная невырожденная $n \times n$-матрица, столбцы которой имеют эрмитову норму, равную ω.

Совокупность вектор-функций (2.4), ограниченная условием

$$(y_0, y_0) \leqslant \rho^2 \tag{2.6}$$

и определяет вышеуказанный пучок решений уравнения (2.1).

Подставляя значение y_0 из (2.4) в (2.6), получим

$$x^*(t) B^{-1}(t) x(t) \leqslant \rho^2 \tag{2.7}$$

где

$$B(t) = K(t) \exp\left[2 \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re} \Lambda(\tau)\, d\tau\right] K^*(t)$$

Матрицу $B(t)$ представим в виде [2]:

$$HH^* = B \tag{2.8}$$

где все столбцы $h_1(t), \ldots, h_n(t)$ матрицы $H(t)$ имеют одну и ту же эрмитову норму $\forall t \in [t_0, \infty)$.

Полагая, что $\| h_j(t) \| \equiv \omega_0(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$, получим

$$\omega_0^2(t) = \frac{\omega^2}{n} \sum_{s=1}^{n} \exp[2\mu_s(t)(t - t_0)] \tag{2.9}$$

Здесь

$$\mu_s(t) = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re} \lambda_s d\tau$$

Легко видеть, что $\omega_0(t_0) = \omega$, $H(t_0) = K(t_0) = H_0$.

Таким образом, вышеуказанный пучок решений уравнения (2.1) представляется соотношением

$$(H^{-1}(t) x(t),\ H^{-1}(t) x(t)) \leqslant \rho^2 \quad (t \in [t_0, \infty)) \tag{2.10}$$

Из вышеизложенного вытекает

Теорема 2.1. Если для всех $t \geqslant t_0$

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \exp[2\mu_s(t)(t - t_0)] < 1 \tag{2.11}$$

то система (2.1) устойчива.

Доказательство. Пусть для всех $t > t_0$ выполняется соотношение (2.11). Рассмотрим ρ_ω-трубку

$$(G^{-1}(t) x,\ G^{-1}(t) x) \leqslant \rho^2 \tag{2.12}$$

где $G(t) = \dfrac{\omega}{\omega_0(t)} H(t)$, а $H(t)$ — матрица, определенная из (2.8). Очевидно $G(t) \in K_{\Delta}^{\infty}$. Пусть $x^{\circ}(t) \neq 0$ — какое-нибудь решение уравнения (2.1), принадлежащее пучку (2.10). Тогда на $[t_0, \infty)$ имеем, что

$$(G^{-1}(t)\,x^{\circ}(t),\ G^{-1}(t)\,x^{\circ}(t)) \leqslant \frac{\omega_0^2(t)}{\omega^2}\,\rho^2$$

Отсюда, так как в силу (2.11) из (2.9) следует неравенство $\omega_0(t) \leqslant \omega$ для всех $t > t_0$, то на $[t_0, \infty)$ выполняется условие

$$(G^{-1}(t)\,x^{\circ}(t),\ \ G^{-1}(t)\,x^{\circ}(t)) \leqslant \rho^2$$

а это означает, что решение $x^{\circ}(t)$ для всех $t \geqslant t_0$ не покидает ρ_{ω}-трубку (2.12), то есть система (2.1) устойчива.

Теорема 2.2. Если в какой-нибудь точке $t_1 \in (t_0, \infty)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{\sigma=1}^{n} \exp\left[2\mu_{\sigma}(t_1)(t_1 - t_0)\right] > 1 \tag{2.13}$$

то система (2.1) неустойчива.

Доказательство. Пусть в некоторой точке $t_1 \in (t_0, \infty)$ выполняется соотношение (2.13), тогда из (2.9) следует, что $\omega_0(t_1) > \omega$, а при этом [3] какую бы ρ_{ω}-трубку (2.12) ни взяли бы, всегда вне этой трубки в момент t_1 окажутся некоторые из тех решений $x^{\circ}(t)$ системы (2.1), которые в начальный момент t_0 находились внутри или на поверхности эллипсоида, то есть

$$(G^{-1}(t_0)\,x^{\circ}(t_0),\ \ G^{-1}(t_0)\,x^{\circ}(t_0)) \leqslant \rho^2$$

а в t_1

$$(G^{-1}(t_1)\,x^{0}(t_1),\ \ G^{-1}(t_1)\,x^{0}(t_1)) > \rho^2$$

что и доказывает неустойчивость системы (2.1).

Теорема 2.3. Если на $[t_0, \infty)$

$$\mu(t) \leqslant -b < 0 \quad (\mu(t) = \max_{\sigma} \mu_{\sigma}) \tag{2.14}$$

где b—положительная постоянная, то система (2.1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Так как при (2.14) выполняется неравенство (2.11), то система (2.1) устойчива.

Пусть теперь $x^{\circ}(t) \not\equiv 0$ — произвольное решение уравнения (2.1) из пучка (2.10), которое удовлетворяет неравенству

$$(G^{-1}(t_0)\,x^{0}(t_0),\ \ G^{-1}(t_0)\,x^{0}(t_0)) \leqslant \rho^2$$

где $G(t)$—некоторая матрица из класса K_{Δ}^{∞}.

Докажем, что

$$\lim_{t\to\infty} \| x^0(t) \| = 0 \tag{2.15}$$

В самом деле, из (2.4) имеем, что

$$\| x^0(t) \| \leqslant \| K(t) \| \cdot \left\| \exp \int_{t_0}^{t} \Lambda(\tau)\, d\tau \right\| \cdot \| y_0 \| \tag{2.16}$$

где

$$\| K(t) \| = \omega \sqrt{n}$$

$$\left\| \exp \int_{t_0}^{t} \Lambda(\tau)\, d\tau \right\| \leqslant \sqrt{n} \exp[-b(t-t_0)]$$

В силу этого из (2.16) для всех $t \geqslant t_0$ имеем:

$$\| x^0(t) \| \leqslant \omega n \exp[-b(t-t_0)] \| y_0 \|$$

откуда и следует (2.15).

Теорема 2.4. Если на $[a, \infty)$ выполняются неравенства

$$\left| \exp \int_{a}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau \right| \geqslant m_1 > 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{t-a} \int_{a}^{t} \mu_i(\tau)\, d\tau \leqslant -b < 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.18}$$

где $\mu_i(t)$ — все собственные значения эрмитово-симметризованной матрицы

$$A^H(t) = \frac{1}{2}[A(t) + A^*(t)]$$

(матрица $A^*(t)$—эрмитово-сопряженная матрица $A(t)$), то система (2.1) асимптотически устойчива.

Доказательство. В (2.2), где $K(t) = X(t)CZ(t)$, выберем

$$Z(t) = \omega \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\| Xc_1 \|}, \ldots, \frac{1}{\| Xc_n \|} \right)$$

Тогда $\lambda_\sigma(t)$ — элемент диагональной матрицы Λ в (2.3) определяется по формуле

$$\lambda_\sigma(t) = \frac{d}{dt} \ln \| Xc_\sigma \| \quad (\sigma = 1, \ldots, n) \tag{2.19}$$

В соответствии с (2.2) и (2.3) имеем, что

$$x(t) = K(t) \exp \int_{t_0}^{t} \Lambda(\tau)\, d\tau\, y(a) \tag{2.20}$$

Матрицы X^{-1} и Z^{-1} существуют на $[a, \infty)$.
Существование первого следует из формулы Остроградского—Лиувилля в силу (2.17), второго — из ограниченности на $[a, \infty)$ каждого решения системы (2.1).

Значит, на $[a, \infty)$ матрица $K^{-1}(t)$ также существует, а функция

$$V(t, x) = (K^{-1}(t)\, x, \quad K^{-1}(t)\, x) = \|y\|^2$$

является положительно определенной. Ее производная по t представляется в виде

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} 2\lambda_\sigma |y_\sigma|^2 \tag{2.21}$$

(y_σ — элемент столбцевой матрицы y).

Интегрируя (2.21) вдоль решения уравнения (2.1), получим

$$V(t, x) = V(a, x(a)) + \int_{a}^{t} \sum_{\sigma=1}^{n} 2\lambda_\sigma |y_\sigma|^2\, dt'$$

Из уравнения (2.3) имеем, что

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \lambda_\sigma y_\sigma \quad (\sigma = 1, \ldots, n)$$

откуда получим

$$|y_\sigma|^2 = \exp \int_{a}^{t} 2\lambda_\sigma\, d\tau\, |y_\sigma(a)|^2$$

Поэтому

$$V(t, x) = V(a, x(a)) \left[1 + \sum_{\sigma=1}^{n} \left(\exp \int_{a}^{t} 2\lambda_\sigma\, d\tau - 1 \right) \frac{|y_\sigma(a)|^2}{\|y(a)\|^2} \right] \tag{2.22}$$

Из (2.19) $\forall t \in [a, \infty)$ следует неравенство

$$\mu_{\min}(t) \leqslant \lambda_\sigma(t) \leqslant \mu_{\max}(t) \quad (\sigma = 1, \ldots, n) \tag{2.23}$$

где $\mu_{\min}(t)$ и $\mu_{\max}(t)$ — соответственно минимальные и максимальные собственные значения матрицы $A^H(t)$.

На основании условия (2.18) из (2.23) следует, что на $[a, \infty)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{t-a}\int_a^t \lambda_\sigma(\tau)\,d\tau \leqslant -b < 0 \quad (\sigma = 1, \ldots, n) \tag{2.24}$$

в силу которого из (2.22) следует, что на $[a, \infty)$ выполняется неравенство $V(t, x(t)) \leqslant V(a, x(a))$, то есть система (2.1) устойчива.

Остается доказать, что любое решение $x(t)$ системы (2.1), для которого $V(t_0, x(t_0)) \leqslant \rho^2$, обладает следующим свойством:

$$\lim_{t\to\infty} \| x(t) \| = 0 \tag{2.25}$$

Из (2.20) имеем, что

$$\| x(t) \| \leqslant \omega \sqrt{n}\, \| y(a) \| \left(\sum_{\sigma=1}^{n} \exp \int_a^t 2\lambda_\sigma\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

Отсюда в силу неравенства (2.24) следует (2.25). Теорема доказана.

3. Рассмотрим действительную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varphi(t, x) \tag{3.1}$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица, а

$$\varphi(t, x) \in C(0 \leqslant t < \infty, \ \|x\| < L)$$

(для простоты принимаем $t_0 = 0$), причем

$$\frac{\varphi(t, x)}{\|x\|} \underset{t}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } x \to 0 \tag{3.2}$$

($\|x\|$ — эвклидова норма вектора x). Очевидно, что система (3.1) допускает тривиальное решение.

Теорема 3.1. Если все собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A имеют отрицательные вещественные части

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

то система (3.1) асимптотически устойчива на $[0, \infty)$.

Доказательство. Пусть выполняется неравенство (3.3), тогда нетрудно показать, что уравнение первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3.4}$$

системы (3.1) асимптотически устойчиво на $[0, \infty)$ и существует постоянная матрица $G \in K^0_\Delta$ такая, что производная по t формы

$$V(x) = (G^{-1}x,\ G^{-1}x) = (Hx,\ x) \quad (H = G^{-1*}G^{-1}) \tag{3.5}$$

составленная в силу системы (3.4), является отрицательно определенной эрмитовой формой, то есть

$$\dot{V}(x) = ((A^*H + HA)\,x,\ x) < 0 \text{ при } \|x\| \neq 0$$

Составляя производную по t формы (3.5) в силу системы (3.1), имеем

$$\dot{V}(x,\ t) = (Bx,\ x) + (Hx,\ \varphi) + (H\varphi,\ x) \tag{3.6}$$

где постоянная матрица $B = A^*H + HA$ — отрицательно определенная.

Из (3.2) следует неравенство $\|\varphi(t,\ x)\| < \varepsilon\|x\|$ для достаточно малых $\|x\|: \|x\| < l_\varepsilon < L$, где ε произвольно мало.

Поэтому из (3.6) имеем неравенство

$$\dot{V}(t,\ x) < [\lambda_{\max}(B) + 2\varepsilon\|H\|]\,\|x\|^2$$

откуда следует, что $\dot{V}(t,\ x) < 0$ для всех $t > 0$, если только выполняются неравенства

$$0 < \varepsilon < -\lambda_{\max}(B)/2\|H\| \text{ и } 0 < \|x\| < l_\varepsilon$$

Из (3.6) имеем еще $\dot{V}(t,\ x)\big|_{x=0} = 0$.

Таким образом, для системы (3.1) в некоторой окрестности O существует положительно определенная эрмитова форма $V(x)$, явно независящая от t и допускающая отрицательно определенную производную по t в силу этой системы

$$\dot{V}(t,\ x(t)) < 0 \text{ при } \|x(t)\| \neq 0 \quad (0 \leqslant t < \infty) \tag{3.7}$$

Значит система (3.1) устойчива на $[0, \infty)$ [2].

Теперь покажем, что если $\|x(0)\| \leqslant l_\varepsilon < L$, то при выполнении неравенства $V(x(0)) \leqslant \rho^2$ выполняется равенство

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0 \tag{3.8}$$

то есть система (3.1) асимптотически устойчива.

В самом деле, по неравенству (3.7) функция $v(t) = V(x(t))$ монотонно убывающая и поэтому она при $t \to \infty$ будет монотонно стремиться к некоторому пределу α, оставаясь все время больше этого предела, так что для всех $t > 0$

$$V(x(t)) > \alpha \tag{3.9}$$

Докажем, что $\alpha = 0$. Пусть $\alpha \neq 0$, следовательно, $\alpha > 0$. Так как $V(x(t))$ есть функция непрерывная, то из (3.9) вытекает, что решение $x(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| > a > 0 \text{ на } [0, \infty) \tag{3.10}$$

В силу (3.10) получим, что $\dot{V}(t, x(t)) \leqslant -b < 0$ для всех $t > 0$. Следовательно, при всех $t > 0$ будет выполняться неравенство $V(x(t)) \leqslant V(x(0)) - bt$, что, очевидно, невозможно.

Таким образом, мы приходим к заключению, что

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$$

Откуда, вследствие знакоопределенности $V(x(t))$, вытекает (3.8), что и доказывает теорему.

Теорема 3.2. Если хотя бы одно собственное значение матрицы A обладает положительной вещественной частью, то система (3.1) неустойчива.

Доказательство. Система (3.1) не может быть устойчивой, так как легко показать, что при ограниченном $\omega(t)$ из устойчивости в смысле определения 1.1 следовала бы устойчивость по Ляпунову, а по условию теоремы система (3.1) неустойчива по Ляпунову [4]. Теорема доказана.

4. Ниже доказывается теорема об устойчивости векторно-матричного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = U(t)\,x + h(t, x) \tag{4.1}$$

где $U(t)$ — $n \times n$-матрица, непрерывная и ограниченная по норме ($\|U(t)\| \leqslant U_0 < \infty$, где $U_0 > 0$—некоторое число) на $[a, \infty)$ и такая, что каждое решение $x(t)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = U(t)\,x \tag{4.2}$$

ограничено на $[a, \infty)$; $h(t, x)$ — $n \times 1$-матрица, элементы которой — нелинейные функции отклонений x_s таковы, что равномерно по t на $[a, \infty)$ выполняется соотношение

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{h(t, x)}{\|x\|} = 0 \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. Если на $[t_0, \infty)$

$$\left| \exp \int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\, U(\tau)\, d\tau \right| \geqslant m_1 > 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \mu_i(\tau)\, d\tau \leqslant -b < 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.5}$$

где $\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)$ — собственные значения матрицы

$$U^H(t) = \frac{1}{2}[U^*(t) + U(t)]$$

то система (4.1) устойчива.

Доказательство. Пусть преобразование $x = K(t)y$ приводит уравнение (4.2) к диагональному виду

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t) y \tag{4.6}$$

Тогда, как следует из [1],

$$K(t) = X(t)CZ(t) \tag{4.7}$$

где столбцы $K_\sigma(t)$ матрицы $K(t)$ удовлетворяют условию

$$\|K_\sigma(t)\| = \omega \text{ на } [t_0, \infty) \quad (\sigma = 1, \ldots, n) \tag{4.8}$$

а матрица $\Lambda(t)$ имеет вид

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \text{причем} \quad \lambda_\sigma = \frac{d}{dt}\ln\|Xc_\sigma\| \tag{4.9}$$

В (4.7) матрицы $X(t)$, C, $Z(t)$ построены таким же образом, как при доказательстве теоремы 2.4.

Из (4.8) следует, что $K(t) \in K_\Delta^\omega$. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что все решения $x(t) \neq 0$ уравнения (4.1), удовлетворяющие условию

$$(K^{-1}(t_0)x(t_0),\ K^{-1}(t_0)x(t_0)) \leqslant \rho^2 \quad (a \leqslant t_0 < \infty) \tag{4.10}$$

для всех $t > t_0$ удовлетворяют условию

$$(K^{-1}(t)x(t),\ K^{-1}(t)x(t)) \leqslant \rho^2 \tag{4.11}$$

Преобразование $x = K(t)y$ приводит уравнение (4.1) к виду

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y + M(t)h(t, Ky) \quad (M = K^{-1}) \tag{4.12}$$

Производная по t положительно определенной эрмитовой формы

$$V(t, x) = (K^{-1}(t)x,\ K^{-1}(t)x) = \|y\|^2$$

вычисленная в силу (4.12), представляется в виде

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} 2\lambda_\sigma |y_\sigma|^2 + 2\operatorname{Re}(y^* Mh) \tag{4.13}$$

где y_σ $(\sigma = 1, \ldots, n)$ — элементы столбцевой матрицы y.

Интегрируя (4.13), получим

$$V(t,\ x)=V(t_0,\ x_0)\left[1+\sum_{\sigma=1}^{n}\left(\exp\int_{t_0}^{t}2\lambda_\sigma d\tau-1\right)\frac{|y_\sigma(t_0)|^2}{\|y(t_0)\|^2}+\right.$$

$$\left.+(t-t_0)\psi(t,\ y)\right] \tag{4.14}$$

где

$$\psi(t,\ y)=\frac{2}{(t-t_0)\,\|y(t_0)\|^2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{Re}\left[y^*\exp\left(\int_{t'}^{t}2\Lambda(\tau)\,d\tau\right)Mh\right]dt'$$

Покажем, что на $[t_0,\ \infty)$ равномерно по t

$$\lim_{y\to 0}\psi(t,\ y)=0 \tag{4.15}$$

Действительно,

$$|\psi(t,\ y)|\leqslant\frac{2}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{\sigma=1}^{n}\exp\int_{t'}^{t}4\lambda_\sigma d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\|M\|\,\frac{\|y\|^2}{\|y_0\|^2}\,dt'\,\mathop{\mathrm{Sup}}_{[a,\ \infty)}\frac{\|h\|}{\|y\|} \tag{4.16}$$

С другой стороны,

$$\frac{\|y\|^2}{\|y_0\|^2}\leqslant\exp\left[\int_{t_0}^{t}\sum_{\sigma=1}^{n}2\lambda_\sigma dt'+\int_{t_0}^{t}2\,\|M\|\frac{\|h\|}{\|y\|}\,dt'\right]$$

В силу (4.8) имеем

$$\|K(t)\|=\sqrt{n}\,\omega<\infty \quad \text{на} \quad [t_0,\ \infty) \tag{4.17}$$

Для матрицы $\dot K(t)$ имеем

$$\|\dot K(t)\|=\sqrt{n}\,\omega\,(\|U\|+\|\Lambda\|)$$

Из (4.9) имеем

$$\mu_{\min}(t)\leqslant\lambda_\sigma(t)\leqslant\mu_{\max}(t)\quad(t_0\leqslant t<\infty;\ \sigma=1,\ \dots,\ n) \tag{4.18}$$

где $\mu_{\min}(t)$ и $\mu_{\max}(t)$ — соответственно минимальные и максимальные собственные значения матрицы $U^H(t)$. Но так как $\mu_i(t)\leqslant\|U^H(t)\|\leqslant\leqslant\|U(t)\|$ на $[t_0,\ \infty)$ $(i=1,\ \dots,\ n)$, то из (4.9) в силу (4.18) получаем неравенство $\|\Lambda(t)\|\leqslant\sqrt{n}\,u_0$ на $[t_0,\ \infty)$. Поэтому в силу (4.18) имеем, что

$$\|\dot K(t)\|\leqslant(\sqrt{n}+n)\,\omega u_0<\infty \quad \text{на} \quad [t_0,\ \infty) \tag{4.19}$$

На основании (4.4) имеем $|\det X(t)|\geqslant m_1>0$ на $[a,\ \infty)$. Для постоянной невырожденной матрицы $C:|\det C|\geqslant m_2>0$, а так как каждое решение системы (4.2) ограничено на $[a,\ \infty)$, то $|\det Z(t)|\geqslant\geqslant m_3>0$ на $[a,\ \infty)$. Следовательно, на $[a,\ \infty)$

$$|\det K(t)| \geqslant m > 0 \quad (m = m_1 m_2 m_3) \tag{4.20}$$

Из (4.17), (4.19) и (4.20) следует, что в (4.7) $K(t)$ есть матрица Ляпунова. Но так как $M(t) = K^{-1}(t)$ также есть матрица Ляпунова, следовательно, она ограничена по норме на $[a, \infty)$. Кроме того, в силу (4.3) равномерно по t на $[a, \infty)$

$$\lim_{y \to 0} \frac{h(t, Ky)}{\|y\|} = 0$$

В этих условиях $\|y\|/\|y_0\|$ — ограниченная величина, и так как ограничены и все другие множители подинтегрального выражения в (4.16), то

$$\int_{t_0}^{t} \left(\sum_{\sigma=1}^{n} \exp \int_{t'}^{t} 4\lambda_\sigma d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|M\| \frac{\|y\|^2}{\|y_0\|^2} dt' < \frac{r}{2} (t - t_0)$$

где r — некоторая положительная постоянная.

Итак,

$$|\psi(t, y)| \leqslant r \sup_{[a, \infty)} \frac{\|h\|}{\|y\|}$$

откуда и следует (4.15).

На основании (4.5) и (4.18) следует, что на $[a, \infty)$

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \lambda_\sigma(\tau)\, d\tau \leqslant -b < 0 \quad (\sigma = 1, \ldots, n)$$

Тогда существует такое $\delta > 0$, что

$$\sum_{\sigma} \left(\exp \int_{t_0}^{t} 2\lambda_\sigma d\tau - 1 \right) \frac{|y_{\sigma_0}|^2}{\|y_0\|^2} \leqslant -2\delta (t - t_0)$$

С другой стороны, учитывая (4.15), можно указать такое $\rho_0 > 0$, что для всех y, удовлетворяющих неравенству $\|y\| < \rho_0$, будем иметь $|\psi(t, y)| < 2\delta$, и тогда согласно (4.14) $V(t, x) \leqslant V(t_0, x(t_0))$ на $[t_0, \infty)$, а это означает, что любое решение $x(t)$ уравнения (4.1), удовлетворяющее условию (4.10), где $0 < \rho \leqslant \rho_0$, для всех $t > t_0$ удовлетворяет неравенству (4.11).

Теорема доказана.

В заключение автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю К. А. Абгаряну за постановку задачи и за постоянное внимание к работе.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 25 III 1977

Վ. Տ. ԱՎԱՆՅԱՆ

ԺԱՄԱՆԱԿԻ ՏՎԱԾ ԻՆՏԵՐՎԱԼՈՒՄ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ (ՈՉ ԱՎՏՈՆՈՄ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ)

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է ժամանակի անվերջ ինտերվալում ոչ ավտոնոմ սիստեմների կայունությունը ըստ Կ. Ա. Աբգարյանի դրվածքի, որը կիրառելի է նաև ժամանակի վերջավոր ինտերվալի համար որոշ լրացումից հետո։

Ապացուցվում են թեորեմներ՝ գծային համասեռ սիստեմի կայունության, անկայունության և ասիմպտոտորեն կայունության համար, քվազիգծային սիստեմի ասիմպտոտորեն կայունության և անկայունության համար և ոչ գծային սիստեմի կայունության համար։

ON THE THEORY OF STABILITY FOR A SPECIFIED INTERVAL OF TIME (NONAUTONOMOUS SYSTEM)

V. T. AVANIAN

Summary

The stability of a nonautonomous system for an infinite interval of time is studied according to K. A. Abkarian's definition which can also be applied to a finite interval of time.

The theorems for stability, unstability, and asymptotic stability of a homogeneous linear system as well as for asymptotic stability and unstability of a quasi-linear system and stability of a nonlinear system are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абгарян К. А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М., «Наука», 1973, 364—367, 376—380.
2. *Абгарян К. А., Аванян В. Т.* К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. М., «Методы теории дифференциальных уравнений и их приложение. Тематический сб. научн. тр. МАИ», 1975, вып. 339.
3. *Абгарян К. А.* К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967, 262—264.