ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 4, 1978 Механика

Ю. М. МАМЕДОВ

КРУЧЕНИЕ БРУСА ДВУСВЯЗНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ОБЛАДАЮЩЕГО ОСЯМИ СИММЕТРИИ

§ 1. *Постановка задачи*

Рассмотрим однородный изотропный брус, ограниченный произвольной боковой поверхностью и двумя основаниями, перпендикулярными к боковой поверхности.

Пусть усилия, приложенные к основаниям, статически эквивалентны закручивающим парам, действующим в плоскостях оснований. Боковую поверхность бруса будем считать свободной от внешних усилий.

Поперечное сечение бруса представляет собой двусвязную область S, ограниченную изнутри окружностью L_1 радиуса R, а извне — гладким контуром L_2 произвольного очертания.

Возьмем одно из поперечных сечений бруса за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ и поместим начало координат в центре окружности L_1.

За положительное направление обхода контуров L_1 и L_2 принимается такое направление, при котором ограниченная ими область S остается слева.

Как известно [1], задача определения напряжений в такой упругой среде сводится к нахождению функции $\varphi_1(z)$ регулярной в области S по переменной z из следующих краевых условий:

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = t\bar{t} + 2C_1 \quad \text{на} \quad L_1 \tag{1.1}$$

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = t\bar{t} + 2C_2 \quad \text{на} \quad L_2 \tag{1.2}$$

где t — аффикс точки кривой L_1 или L_2, а C_1 и C_2 — некоторые постоянные; одна из них выбирается произвольно, а вторая определяется в процессе решения задачи.

Поскольку внутренним контуром является окружность, центр которой совпадает с началом координат, то на ней $t\bar{t} = R^2$.

Учитывая это и принимая $2C_1 = -R^2$, приводим граничное условие (1.1) к следующему виду:

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = 0 \quad \text{на} \quad L_1 \tag{1.3}$$

§ 2. *Приведение задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода*

Следуя Д. И. Шерману [2—5], введем на кривой L_2 неизвестную чисто мнимую функцию $g(t)$ согласно равенству

$$\varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)} = 2g(t) \quad \text{на} \quad L_2 \tag{2.1}$$

Сложив почленно равенства (1.2) и (2.1), получим

$$\varphi_1(t) = g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t} + C_2 \tag{2.2}$$

Введем теперь наряду с имеющейся $\varphi_1(z)$ новую функцию $\varphi(z)$, также регулярную в области S и определяемую в ней равенством

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_2} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t - z} dt - C_2 \tag{2.3}$$

Функция $\varphi(z)$ в действительности регулярна не только в области S, но всюду вне (внутреннего) контура L_1 и, кроме того, исчезает на бесконечности, это следует из соблюдавшегося вне L_2 равенства, которое сопутствует (2.3)

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_2} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t - z} dt \tag{2.4}$$

Выражение для $\varphi_1(z)$ в области S, как следует из (2.3), будет таким:

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_2} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t - z} dt + C_2 \tag{2.5}$$

На основании теоремы Сохоцкого—Племеля последняя формула при $z \to t_0$ на L_2 записывается следующим образом:

$$\varphi_1(t_0) = \varphi(t_0) + \frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{4} t_0\bar{t}_0 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_2} \frac{g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{t - t_0} dt + C_2 \quad \text{на} \quad L_2 \tag{2.6}$$

Учитывая, что

$$\overline{g(t)} = -g(t) \tag{2.7}$$

выпишем выражение, сопряженное с (2.6). Будем иметь

$$\overline{\varphi_1(t_0)} = \overline{\varphi(t_0)} - \frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{4} t_0\bar{t}_0 -$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_2} \frac{-g(t) + \frac{1}{2} t\bar{t}}{\bar{t} - \bar{t}_0} d\bar{t} + C_2 \quad \text{на} \quad L_2 \tag{2.8}$$

Вычитая почленно равенство (2.8) из (2.6) и выполнив, учитывая (2.1), необходимые преобразования, получим для определения неизвестной функции уравнение Фредгольма II рода (в нем функция $\varphi(z)$ предполагается условно известной)

$$g(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} g(t)\, d \ln \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - [\varphi(t_0) - \overline{\varphi(t_0)}] =$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\int_{L_2} t\bar{t}\left(\frac{dt}{t-t_0} + \frac{d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{t}_0}\right) \tag{2.9}$$

Займемся решением уравнения (2.9) в предположении, что известна функция, конформно отображающая внешность единичного круга на внешность области, ограниченной контуром L_2; приближенное выражение для нее имеет вид следующего приведенного полинома [6]:

$$z = A\zeta \sum_{k=0}^{s} a_{kq}\zeta^{-kq} \tag{2.10}$$

где

$$A = C_{-1};\ a_{kq} = C_{kq-1}/C_{-1};\ s = 2m_q - 1$$

Здесь C_{-1}, C_{kq-1} — коэффициенты отображающего полинома; m_q — число „узловых" точек в секторе $0 < \theta < \frac{\pi}{q}$; q — число осей симметрии.

§ 3. *Преобразование выведенного интегрального уравнения в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений*

Функцию $g(t) = g^*(\tau)$, где τ — аффикс точки единичной окружности, отображающей L_2, назовем ее γ, разложим в комплексный ряд Фурье на окружности γ. Для упрощения примем условно

$$g^*(\tau) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\tau^k - \tau^{-k}) \tag{3.1}$$

где α_0 — чисто мнимая, а α_k — действительные величины (ниже станет ясно, что это допущение в последующем не приводит к противоречию).

Для определения неизвестных α_k ($k = 0, 1, 2, 3...$) построим, исходя из интегрального уравнения (2.9), бесконечную систему линейных алгебраических уравнений.

Вычислим, используя (3.1), интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{g(t)}{t-z}\, dt \tag{3.2}$$

в котором точка z лежит внутри L_2. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{g(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\alpha_0}{t-z}\,dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\tau^k}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\tau^{-k}}{t-z}\,dt\right] \tag{3.3}$$

На основании свойств интегралов типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\alpha_0}{t-z}\,dt=\alpha_0 \tag{3.4}$$

Для вычисления интегралов, содержащихся под знаком суммы, обратим формулу (2.10) относительно переменной ζ; при этом будем считать, что переменная z изменяется вне окружности наименьшего радиуса Γ, описанной вокруг L_2. Это обращение может быть представлено в виде ряда

$$\zeta=\frac{z}{A}\sum_{k=0}^{\infty}C_{qk}\left(\frac{A}{z}\right)^{qk} \tag{3.5}$$

где постоянные C_{qk} однозначно определяются по заданным величинам. Возведем обе части равенства (3.5) в некую целую положительную степень ν. Найдем

$$\zeta^{(\nu)}=\left(\frac{z}{A}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}C_{qk}^{(\nu)}\left(\frac{A}{z}\right)^{qk} \tag{3.6}$$

Здесь $C_{qk}^{(\nu)}$ — некие новые постоянные; для их определения воспользуемся известной рекуррентной формулой [6]

$$C_{qk}^{(\nu)}=\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}[(1+\nu)\,m-k]\,C_{qm}C_{q(k-m)}^{(\nu)} \tag{3.7}$$

После некоторых вычислений, сходных с выполненными в работах [4] и [6], получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\tau^k}{t-z}\,dt=\sum_{n=k-qE(k/q)}^{k}C_{k-n}^{(k)}\left(\frac{z}{A}\right)^{n}\\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\tau^{-k}}{t-z}\,dt=0\end{gathered} \tag{3.8}$$

где $E\left(\dfrac{k}{q}\right)$ — целая часть $\dfrac{k}{q}$. Учитывая совместно равенства (3.8) и (3.4), преобразуем соотношение (3.3) к форме

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{g(t)}{t-z}dt = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sum_{n=k-qE(k/q)}^{k}{}^{*} C_{k-n}^{(k)}\left(\frac{z}{A}\right)^n \tag{3.9}$$

Перейдем теперь к вычислению содержащегося (справа) в уравнении (2.7) (и уже не зависящего от $g(t)$) интеграла. Имеем [6]

$$t\bar{t} = D_0 + \sum_{k=q}^{sq}{}^{*} D_k(\tau^k + \tau^{-k}) \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= A^2\sum_{m=0}^{s} a_{qm}^2 \\ D_k &= A^2\sum_{m=0}^{s-k/q} a_{qm}a_{q(m+k/q)} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Умножив почленно формулу (3.10) на ядро Коши и затем проинтегрировав по кривой L_2, найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{t\bar{t}}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{D_0}{t-z}\,dt +$$

$$+\sum_{k=q}^{sq}{}^{*} D_k\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\tau^k}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\tau^{-k}}{t-z}\,dt\right] \tag{3.12}$$

Рассуждая аналогично тому, как прежде, и учитывая выражение (3.8), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\frac{1}{2}t\bar{t}}{t-z}dt = \frac{1}{2}\left[D_0 + \sum_{k=q}^{sq} D_k \sum_{n=k-qE(k/q)}^{k}{}^{*} C_{k-n}^{(k)}\left(\frac{z}{A}\right)^n\right] \tag{3.13}$$

Беря во внимание формулы (3.9) и (3.13), преобразуем равенство (2.5) к следующему:

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \sum_{n=k-qE(k/q)}^{k}{}^{*} C_{k-n}^{(n)}\left(\frac{z}{A}\right)^n +$$

$$+\frac{1}{2}\left[D_0 + \sum_{k=q}^{sq}{}^{*} D_k \sum_{n=k-qE(k/q)}^{k}{}^{*} C_{k-n}^{(k)}\left(\frac{z}{A}\right)^n\right] + C_2 \tag{3.14}$$

Далее подставим это значение $\varphi_1(z)$ в краевое условие (1.3) и выполним ряд преобразований, в итоге приводящих к равенству, которому удовлетворяет функция $\varphi(z)$ на внутреннем контуре L_1.

Оно выглядит так:

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{t}{A}\right)^{n}+\left(\frac{\bar{t}}{A}\right)^{n}\right]P_n-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=q}^{sq}{}^{*}\left[\left(\frac{t}{A}\right)^{n}+\left(\frac{\bar{t}}{A}\right)^{n}\right]L_n-2\sum_{k=q}^{\infty}{}^{*}\alpha_k C_k^{(k)}-$$

$$-\sum_{k=q}^{sq}{}^{*}D_k C_k^{(k)}-D_0-2C_2 \text{ на } L_1 \tag{3.15}$$

где

$$P_n=\sum_{k=n}^{\infty}{}^{*}\alpha_k C_{k-n}^{(k)}$$
$$L_n=\sum_{k=n}^{sq}{}^{*}D_k C_{k-n}^{(k)} \tag{3.16}$$

Из граничного условия (3.15) вытекает, что

$$\varphi(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{z}\right)^{n}\left(\frac{R}{A}\right)^{n}P_n-\frac{1}{2}\sum_{n=q}^{sq}{}^{*}\left(\frac{R}{z}\right)^{n}\left(\frac{R}{A}\right)^{n}L_n \tag{3.17}$$

при обязательном дополнительном соотношении

$$C_2=-\sum_{k=q}^{\infty}{}^{*}\alpha_k C_k^{(k)}-\frac{1}{2}\sum_{k=q}^{sq}{}^{*}D_k C_k^{(k)}-\frac{1}{2}D_0 \tag{3.18}$$

Преобразуем равенство (3.17) к переменной τ. Для этого используем формулу (2.10), предварительно сделав в ней соответствующую замену переменных (то есть, перейдя от точки z и ζ соответственно к t и τ); проделав дополнительно некоторые вычисления, в результате получим

$$\varphi^{*}(\tau)=-\sum_{k=1}^{\infty}\tau^{-k}M_k^{(1)}-\frac{1}{2}\sum_{k=q}^{\infty}{}^{*}\tau^{-k}M_k^{(2)} \tag{3.19}$$

где

$$M_k^{(1)}=\sum_{n=k-qE\left(\frac{k-1}{q}\right)}^{k}{}^{*}P_n\left(\frac{R}{A}\right)^{2n}a_{k-n}^{(-n)}$$
$$M_k^{(2)}=\sum_{n=q}^{sq}{}^{*}L_n\left(\frac{R}{A}\right)^{2n}a_{k-n}^{(-n)} \tag{3.20}$$

Выпишем теперь равенство, сопряженное с (3.19). При этом

$$\overline{\varphi^*(\tau)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \tau^k M_k^{(1)} - \frac{1}{2}\sum_{k=q}^{\infty}{}^{*} \tau^k M_k^{(2)} \tag{3.21}$$

Вычитая равенства (3.19) и (3.21) почленно одно из другого, находим

$$\varphi^*(\tau) - \overline{\varphi^*(\tau)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\tau^k - \tau^{-k})\, M_k^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_{k=q}^{\infty}{}^{*} (\tau^k - \tau^{-k})\, M_k^{(2)} \tag{3.22}$$

Вернемся сейчас к соотношению (3.9). Выполним в нем необходимые преобразования, связанные с переходом в правой части к переменной τ, кроме того, примем во внимание равенство Сохоцкого-Племеля. Тогда найдем

$$\frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{g(t)}{t - t_0}\,dt = \Pi_n^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k \Pi_k^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} \Pi_k^{(4)} \tag{3.23}$$

где

$$\Pi_n^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{*} P_n a_n^{(n)}$$

$$\Pi_k^{(3)} = \sum_{n=k}^{\infty}{}^{*} P_n a_{n-k}^{(n)} \tag{3.24}$$

$$\Pi_k^{(4)} = \sum_{n=G(k)}^{\infty}{}^{*} P_n a_{n+k}^{(n)}$$

Здесь $G(k) = \dfrac{k + \varepsilon q}{sq - 1}$ и ε — наименьшее целое положительное число, которое придает нижнему пределу суммы целое значение. Нижний предел суммирования для значений k, кратных q, обозначается через $G^*(k)$. При всех значениях k, кратных q, соблюдается неравенство $G^*(k) \leqslant k$ (в нем знак равенства имеет место лишь при $k = q$).

Далее приведем еще равенство, сопряженное с (3.23), помня, что в нем все коэффициенты — вещественные величины, $\bar{\tau} = \dfrac{1}{\tau}$ и $g(t)$ — чисто мнимая функция. Оно имеет вид

$$-\frac{g(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{g(t)}{\bar{t} - \bar{t}_0}\,d\bar{t} = \Pi_n^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} \Pi_k^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k \Pi_k^{(4)} \tag{3.25}$$

Вычитая же формулы (3.23) и (3.25) почленно одну из другой, получим

$$g(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} g(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}=\sum_{k=1}^{\infty}(\tau^k-\tau^{-k})(\Pi_k^{(3)}-\Pi_k^{(4)}) \tag{3.26}$$

Рассуждая аналогично тому, как выше, из выражения (3.13) находим

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{L_2} t\bar t\left[\frac{dt}{t-t_0}+\frac{d\bar t}{\bar t-\bar t_0}\right]=\frac{1}{2}\sum_{k=q}^{sq}{}^{*}(\tau^k-\tau^{-k})\,(M_k^{(3)}-M_k^{(4)})-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=2m_q q}^{sq(sq-1)}{}^{*}(\tau^k-\tau^{-k})\,M_k^{(4)} \tag{3.27}$$

причем

$$\begin{aligned} M_k^{(3)}&=\sum_{n=G^*(k)}^{sq}{}^{*}L_n a_{n-k}^{(n)}\\ M_k^{(4)}&=\sum_{n=G^*(k)}^{sq}{}^{*}L_n a_{n-k}^{(n)} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Наконец, в интегральном уравнении (2.9) учтем формулы (3.1), (3.22), (3.26), (3.27); проделав затем необходимые преобразования, получим бесконечную систему линейных уравнений для искомых неизвестных α_k с индексом, кратным q. Эта система достаточно проста и выглядит так:

$$4\alpha_k-2\sum_{P=q}^{\infty}\alpha_p\Omega_{k,p}=T_k(G^*)-F_k(G^*) \tag{3.29}$$

При этом содержашиеся в ней коэффиценты находятся из равенств

$$\Omega_{k,p}=\Omega_{k,p}^{(1)}+\Omega_{k,p}^{(2)}=\sum_{n=q}^{M(p,k)}{}^{*}\left(\frac{R}{A}\right)^{2n}a_{k-n}^{(-n)}C_{p-n}^{(p)}+$$

$$+\sum_{n=G^*(k)}^{p}{}^{*}C_{p-n}^{(p)}[a_{n+k}^{(n)}-a_{n-k}^{(n)}]$$

$$T_k(G^*)=M_k^{(3)}-M_k^{(4)} \tag{3.30}$$

$$F_k(G^*)=M_k^{(2)}-M_k^{(4)}$$

Здесь

$$\Omega_{k,p}^{(2)}=0 \text{ для } p<G^*(k)$$

$$M(p,k)=p \text{ для } p\leqslant k$$

$$M(p,k)=k \text{ для } p>k$$

Другие α_k (с индексами, не кратными q), как вытекает из (3.29), равны нулю.

Укоротим систему (3.29), сохранив в ней первые N уравнений. Решив так укороченную систему, можно определить первые N коэффициентов α_N. Вообще говоря, входящие в укороченную систему α_{kq} $(k=1, 2,..., N)$ отличны от нуля: $\alpha_k\equiv 0$ для $k>Nq$.

В формуле (2.5) учтем значение функции $\varphi(z)$, а также интегралов, входящих в ее правую часть. Будем иметь

$$\varphi_1(z)=\sum_{n=q}^{Nq}{}^{*}\left(\frac{z}{A}\right)^n P_n\left[1-\left(\frac{R}{z}\right)^{2n}\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=q}^{sq}{}^{*}\left(\frac{z}{A}\right)^n L_n\left[1-\left(\frac{R}{z}\right)^{2n}\right]+\alpha_0 \tag{3.31}$$

§ 4. *Вычисление жесткости при кручении*

Для вычисления жесткости при кручении имеем [1]

$$D=\mu\iint_S\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdy \tag{4.1}$$

Применяя формулу Остроградского—Грина, получим

$$D=-\mu\int_{L_1+L_2}[\varphi(x, y)(xdx+ydy)+xy(xdx-ydy)] \tag{4.2}$$

Имея в виду, что

$$x=\frac{z+\bar z}{2},\qquad y=\frac{z-\bar z}{2i},\qquad \varphi(x, y)=-\frac{\varphi_1(z)-\overline{\varphi_1(z)}}{2i} \tag{4.3}$$

придадим формуле (4.2) следующий вид:

$$D=\mu\left\{\frac{1}{4i}\int_{L_1+L_2}\bar z^2 zdz+\frac{1}{4i}\int_{L_1+L_2}[\varphi_1(z)-\overline{\varphi_1(z)}]\,d(z\bar z)\right\} \tag{4.4}$$

Переходя в ней от переменного z к t и беря в расчет, что на L_2 произведение $t\bar t=R^2$, найдем

$$D=\mu\left\{\frac{1}{4i}\oint_{L_1}[\varphi_1(t)-\overline{\varphi_1(t)}]\,d(\bar t t)+\frac{1}{4i}\oint_{L_2}\bar t^2 tdt+\frac{1}{4i}\oint_{L_1}\bar t^2 tdt\right\} \tag{4.5}$$

Так как

$$\frac{1}{4i}\oint_{L_1}\bar t^2 tdt=-\frac{\pi R^4}{2}{}^{*} \tag{4.6}$$

то выражение для жесткости принимает вид

---

* Заметим, что интегрирование по контуру L_2 производится против часовой стрелки, а по контуру L_1 — по часовой стрелке.

$$D=\mu\left\{\frac{1}{4}\oint\limits_{\gamma}[\varphi_1^*(\tau)-\overline{\varphi_1^*(\tau)}]\,d\,[\omega(\tau)\,\overline{\omega(\tau)}]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4i}\oint\limits_{\gamma}\overline{\omega^2(\tau)}\,\omega(\tau)\,d\omega(\tau)-\frac{\pi R^4}{2}\right\} \tag{4.7}$$

Здесь интегрирование производится против часовой стрелки.

С другой стороны, обратившись к формуле (3.31) и выполнив очевидные вычисления, придем к соотношению, справедливому на окружности γ (отображающей кривую L_z)

$$\varphi_1^*(\tau)-\overline{\varphi_1^*(\tau)}=\sum_{k=p}^{P_q(N,\,s)}{}^{*}\,(\tau^k-\tau^{-k})\times$$

$$\times\left[E_k(G^*)+\frac{1}{2}T_k(G^*)\right]-\frac{1}{2}\sum_{k=2m_q q}^{sq(sq-1)}{}^{*}(\tau^k-\tau^{-k})\,M_k^{(4)}+2\alpha_0 \tag{4.8}$$

где введенные величины

$$E_k(G^*)=M_k^{(1)}+\frac{1}{2}M_k^{(2)}+\Pi_k^{(3)}-\Pi_k^{(4)} \tag{4.9}$$

причем верхние пределы суммирования в первой сумме таковы:

$$\begin{aligned}&P_q(N,\,s)=Nq,\ \text{если}\ N\geqslant s\\&P_q(N,\,s)=Sq,\ \text{если}\ N<s\end{aligned} \tag{4.10}$$

Взяв во внимание формулы (2.10) и (4.8), придадим равенству (4.7) после несложных промежуточных преобразований более удобную форму.

Окончательное выражение для жесткости при кручении примет вид

$$D=-\mu\pi\left\{\frac{R^4}{2}+\frac{A^4}{4}\sum_{k=0}^{2s}(qk-2)\,[a_{qk}^{(2)}]^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=q}^{sq}kD_k\left[E_k(G^*)+\frac{1}{2}T_k(G^*)\right]\right\} \tag{4.11}$$

§ 5. *Вычисление касательных напряжений при кручении*

Согласно работе [1] имеем

$$X_z-iY_z=i\mu\frac{M}{D}\,[\varphi'(z)-\bar{z}] \tag{5.1}$$

Воспользовавшись формулой (3.31), вычислим производную функции $\varphi_1(z)$. Найдем

$$\varphi_1'(z)=\sum_{n=q}^{P_q(N,\,s)}{}^{*}\,\frac{n}{A^n}\,(z^{n-1}+R^{2n}z^{-(n+1)})\left(P_n+\frac{1}{2}L_n\right) \tag{5.2}$$

Переходя здесь к полярным координатам $z = re^{i\varphi}$, получим

$$\varphi_1'(z) = \sum_{n=q}^{P_q(N,\, s)}{}^{*} \left(P_n + \frac{1}{2} L_n\right) \frac{n}{A^n} \left\{ \left[r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \cos(n+1)\varphi \right] + i \left[r^{n-1} \sin(n-1)\varphi - \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \sin(n+1) \right] \right\} \quad (5.3)$$

Подставляя значение $\varphi_1'(z)$ из формулы (5.3) в равенство (5.1) и отделяя в нем действительную и мнимую части, придем к требуемым формулам для компонент касательных напряжений

$$X_z = -\mu \frac{M}{D} \left\{ r \sin\varphi + \sum_{n=q}^{P_q(N,\, s)}{}^{*} \frac{n}{A^n} \left(P_n + \frac{1}{2} L_n\right) \times \right.$$

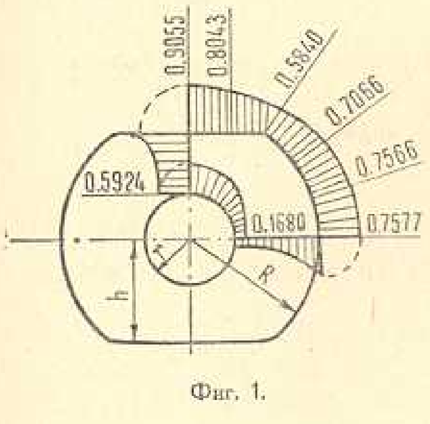
$$\left. \times \left[r^{n-1} \sin(n-1)\varphi - \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \sin(n+1)\varphi \right] \right\} \quad (5.4)$$

$$Y_z = -\mu \frac{M}{D} \left\{ -r \cos\varphi + \sum_{n=q}^{P_q(N,\, s)}{}^{*} \frac{n}{A^n} \times \right.$$

$$\left. \times \left[r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \frac{R^{2n}}{r^{n+1}} \cos(n+1)\varphi \right] \right\} \quad (5.5)$$

здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

По формулам (5.4) и (5.5) могут быть вычислены составляющие напряжений в любой точке области, занимаемой поперечным сечением бруса.



Фиг. 1.

Вектор напряжения в точках контура области направлен по касательной к нему, и его величина дается формулой

$$T = \sqrt{X_z^2 + Y_z^2} \quad (5.6)$$

Для решения задач кручения сплошных и полых призматических тел составлена программа на языке АЛГОЛ-60.

В качестве примера рассматривается кручение двулысычного вала с центральным круговым отверстием.

Геометрические параметры поперечного сечения вала

$$\frac{r}{R} = 0.4, \quad \frac{h}{R} = 0.7$$

Коэффициенты отображающего полинома при указанных геометрических размерах сечения содержатся в работе [6].

Жесткость при кручении $D/\mu R^4 = 1.156$.

Эпюра касательных напряжений, приведенных к единичному крутящему моменту ($M = 1\ кг \cdot см$), представлена на фиг. 1.

Автор благодарит Д. И. Шермана за внимание, проявленное к настоящей работе.

Ждановский металлургический институт

Поступила 20 VI 1977

Յու. Մ. ՄԱՄԵԴՈՎ

ՍԻՄԵՏՐԻԱՅԻ ԱՌԱՆՑՔՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԵՐԿԿԱՊԱՆԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔԻ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Տրվում է բարդ ձևի երկկապանի լայնական կտրվածքով սնամեջ պրիզմատիկ ձողերի որոշ դասի խնդիրների լուծումը։

Փնտրվող ոլորման կոմպլեքս ֆունկցիան կառուցվում է Դ. Ի. Շերմանի եղանակով։

Ինժեներական կոնկրետ խնդիրների լուծման համար Ալգոլ—60-ի լեզվով կազմվել է ծրագիր։

Բերվում է թվային օրինակ։

TORSION OF THE BEAM OF DOUBLY-CONNECTED CROSS-SECTION HAVING SYMMETRY AXES

Yu. M. MAMEDOV

S u m m a r y

The paper deals with the solution of a number of problems on torsion of hollow prismatic beams of doubly-connected cross-section of an intricate shape, the region occupied by the beam cross-section possessing symmetry axes.

The complex function of torsion sought for is found in terms of D. I. Sherman's method and represented as a transformed polynomial.

For solving particular engineering problems a program in the Algol-60 language is worked out providing a simple and universal method for numerical analysis of problems on torsion of solid and prismatic bodies with a specified form of cross-section.

A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966, стр. 496—504.
2. *Шерман Д. И.* Об одном методе решения некоторых задач теории упругости для двусвязных областей. Докл. АН СССР, 1947, т. V, № 8.
3. *Шерман Д. И.* Об одной задаче кручения. Докл. АН СССР, 1948, т. XIII, № 5.
4. *Шерман Д. И.* Про один метод розв'язання деяких задач кручення згину і плоскої теорії пружності для неоднозв'язних областей. Прикл. механика. В-во АН УССР, 1957, т. III, в. 4.
5. *Шерман Д. И.* Про напружений стан скручуваного квадратного бруса з симетричною круговою попрожниною. Прикл. механіка. В-во АН УССР, 1958, т. IV, в. 3.
6. *Оболонский Б. А., Урбанская В. С., Урбанский Р. Е.* Кручение некруглых валов. М., «Высшая школа», 1974, стр. 112—168.