ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 4, 1978 Механика

А. О. ВАТУЛЬЯН

О ДЕЙСТВИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА ОРТОТРОПНЫЙ СЛОЙ

Рассмотрены задачи сжатия и изгиба ортотропного слоя толщины $2h$ двумя симметрично приложенными к его плоскостям круглыми в плане жесткими штампами. Трение в области контакта отсутствует. Каждая из краевых задач сведена к двумерному интегральному уравнению 1-го рода относительно контактных давлений. Доказана однозначная разрешимость интегрального уравнения в весовом пространстве. Построено приближенное решение и доказана его сходимость к точному.

§ 1. *Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Существование обобщенных решений и их единственность*

Рассматриваемые краевые задачи описываются уравнениями Коши, определяющими уравнениями вида (1.1) [1], [2]

$$\sigma_{jj} = c_{jk}\varepsilon_{kk}, \quad j = 1, 2, 3; \quad \sigma_{23} = 2c_{44}\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = 2c_{55}\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{12} = 2c_{66}\varepsilon_{12} \tag{1.1}$$

и следующими граничными условиями:
задача (А) (сжатие)

$$\begin{gathered} x_3 = \pm h, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0, \quad (x_1, x_2) \overline{\in} \Omega, \quad u_3 = \pm f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega \end{gathered} \tag{1.2}$$

где Ω — односвязная область с гладкой границей, $c_{jk} = c_{kj}$ — упругие постоянные.

В случае задачи (Б) (изгиб) последнее из условий (1.2) заменяется следующим:

$$u_3 = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega \tag{1.3}$$

Следует отметить, что задача о действии штампа на изотропный слой наиболее полно исследована в [3]. В случае, когда слой ортотропен и на c_{kj} наложен ряд связей типа равенств, решение получено в [4].

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий строить решения краевой задачи для произвольного ортотропного материала.

Каждая из краевых задач (А), (Б) с помощью интегрального преобразования Фурье сводится к двумерному интегральному уравнению 1-го рода с разностным ядром относительно контактных давлений

$$\iint_{\Omega} k(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2)\, q(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 = 4\pi^2 f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega \tag{1.4}$$

$$k(t_1, t_2) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2)\, e^{i[\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2]}\, d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{1.5}$$

причем в задаче (А)

$$K(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{h}{c_{33}} \frac{L(u_1, u_2)}{u}, \qquad \alpha_j h = u_j = us_j, \quad u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$L(u_1, u_2) = a_0 \frac{(\mu_3^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_3^2)(\mu_2^2 - \mu_1^2)}{\sum\limits_{k=1}^{3} \mu_k^{-1} R_k \operatorname{cth} u\mu_k} \tag{1.6}$$

$$R_1 = (\mu_3^2 - \mu_2^2)(p_2\mu_1^2 + p_4), \qquad p_2 = a_0 [\Delta_1 s_1^4 + 2(2\gamma_6 + \gamma_3 - \gamma_7\gamma_8) s_1^2 s_2^2 + \Delta_2 s_2^4]$$

$$p_4 = -(\gamma_5 s_1^2 + \gamma_4 s_2^2)\left[\gamma_6\Delta_1 \zeta_1^4 + 2\left(\frac{\Delta}{2} - \gamma_3\gamma_6 + \gamma_6\gamma_7\gamma_8\right) s_1^2 s_2^2 + \gamma_6\Delta_2 s_2^4\right]$$

R_k $(k = 2, 3)$ получаются из R_1 циклической заменой, $\mu_1 \to \mu_2 \to \mu_3 \to \mu_1$, μ_k — корни характеристического уравнения

$$a_0\mu^6 + a_2\mu^4 + a_4\mu^2 + a_6 = 0, \quad \operatorname{Re}\mu_k > 0$$

$$a_0 = \gamma_4\gamma_5$$

$$a_2 = -[\gamma_4(\Delta_1 - 2\gamma_5\gamma_7) + \gamma_5\gamma_6] s_1^2 - [\gamma_5(\Delta_2 - 2\gamma_4\gamma_8) + \gamma_4\gamma_6] s_2^2$$

$$a_4 = [\gamma_6(\Delta_1 - 2\gamma_5\gamma_7) + \gamma_1\gamma_5\gamma_4] s_1^4 + [\gamma_6(\Delta_2 - 2\gamma_4\gamma_8) + \gamma_2\gamma_5\gamma_4] s_2^4 +$$
$$+ 2s_1^2 s_2^2 \left[\frac{\Delta}{2} + \gamma_9(\gamma_4 + \gamma_8)(\gamma_5 + \gamma_7) + \gamma_4\gamma_5\gamma_6 - \gamma_3\gamma_7\gamma_8 - \gamma_1\gamma_4\gamma_8 - \gamma_2\gamma_5\gamma_7 - \gamma_3\gamma_6\right]$$

$$a_6 = -(\gamma_5 s_1^2 + \gamma_4 s_2^2)[\gamma_1\gamma_6 s_1^4 + (\gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_3\gamma_6 - \gamma_3^2) s_1^2 s_2^2 + \gamma_2\gamma_6 s_2^4] \tag{1.7}$$

и введены следующие безразмерные параметры:

$$\gamma_j = c_{jj} c_{33}^{-1}, \quad j = 1, 2, 4, 5, 6, \quad \gamma_3 = c_{12} c_{33}^{-1}, \quad \gamma_7 = c_{13} c_{33}^{-1}, \quad \gamma_8 = c_{23} c_{33}^{-1}$$

$$\Delta_1 = \gamma_1 - \gamma_7^2, \quad \Delta_2 = \gamma_2 - \gamma_8^2, \quad \Delta = c_{33}^{-3} \det\|c_{ij}\|, \quad \gamma_9 = \gamma_3 + \gamma_6$$

Функция $L(u_1, u_2)$ обладает следующими свойствами:

1) $L(u_1, u_2) > 0$ по крайней мере при $p_2 > 0$, $p_4 < 0$ и вещественных u_1, u_2;

2) четна по u_1, u_2;

3) обладает следующими предельными значениями:

$$\lim_{u \to \infty} L(u_1, u_2)\, u^{-1} = a_6 p_4^{-1} > 0$$

$$\lim_{u \to \infty} L(u_1, u_2) = a_0 \frac{\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1)}{p_2\mu_1\mu_2\mu_3 - p_4(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} > 0 \tag{1.8}$$

Нетрудно убедиться предельным переходом к изотропному случаю, что $L(u_1, u_2)$ стремится к функции $L(u)$, которая совпадает с аналогичной функцией задачи IV [3].

Введем в рассмотрение функциональное пространство $\mathring{H}(K, \Omega)$ [5] с нормой

$$\|q\|^2_{\mathring{H}(K,\Omega)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int K(\alpha_1, \alpha_2)\,|\,Q(\alpha_1, \alpha_2)\,|^2\,d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$Q(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} q(\xi_1, \xi_2)\,e^{i(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2)}\,d\xi_1 d\xi_2 \tag{1.9}$$

Лемма. Пространство $L_p(\Omega)$ $(4/3 \leqslant p < 2)$ вложено в $\mathring{H}(K, \Omega)$. Лемма доказывается применением неравенств Хаусдорфа-Юнга и Гельдера и свойств функции $K(\alpha_1, \alpha_2)$.

Теорема 1. *В пространстве* $L_p(\Omega)$ $(4/3 \leqslant p < 2)$ *уравнение (1.4) не может иметь более 1-го решения.*

Умножая (1.4) на $\overline{q}(x_1, x_2) \in L_p(\Omega)$ и интегрируя, имеем

$$\|q\|^2_{\mathring{H}(K,\Omega)} = \iint\limits_{\Omega}\overline{q}(x_1, x_2)\,f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 \tag{1.10}$$

В силу леммы соотношение (1.10) корректно и из $f(x_1, x_2) = 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega$ следует $q(x_1, x_2) \equiv 0$, $(x_1, x_2) \in R_2$.

Теорема 2. *Если* $f(x_1, x_2) \in H(K^{-1}\,\Omega)$, *то (1.4) разрешимо в* $\mathring{H}(K, \Omega)$, где $H(K^{-1}, \Omega)$ — *пространство, сопряженное* $\mathring{H}(K, \Omega)$ [5].

Умножим (1.4) на $\overline{\varphi}(x_1, x_2) \in \mathring{H}(K, \Omega)$ и проинтегрируем. Используя определения соответствующих норм и неравенство Шварца, легко показать, что

$$\left|(q, \varphi)_{\mathring{H}(K,\Omega)}\right| \leqslant \|f\|_{H(K^{-1},\Omega)}\|\varphi\|_{\mathring{H}(K,\Omega)}$$

Таким образом, слева стоит линейный и ограниченный в $\mathring{H}(K, \Omega)$ функционал, что и доказывает в силу теоремы Рисса утверждение теоремы.

Замечание 1. Все изложенное выше относится к задаче (А). Функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$ в случае задачи (Б) получается из (1.6) заменой $\operatorname{cth} u$ на $\operatorname{th} u$. Кроме того, для разрешимости интегрального уравнения (1.4) в случае (Б) необходимо потребовать выполнения условия статики

$$\iint\limits_{\Omega} q(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = 0$$

§ 2. Построение приближенного решения интегрального уравнения

Осуществим в (1.4)—(1.5) замены $\alpha_1 + i\alpha_2 = \alpha e^{i\psi}$, $x_1 + ix_2 = re^{i\varphi}$, $\xi_1 + i\xi_2 = \rho e^{i\theta}$. Считая Ω кругом радиуса „a" и допуская возможность представления функций их рядами Фурье

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r)\, e^{in\varphi}, \quad q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(\rho)\, e^{in\theta}$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k(\alpha)\, e^{ik\psi} \tag{2.1}$$

внесем (2.1) в (1.4) — (1.5) и произведем интегрирование. Получим бесконечную систему интегральных уравнений

$$Kq = \int_0^a \int_0^\infty S(\alpha r)\, L(\alpha)\, S(\alpha\rho)\, q(\rho)\, \alpha d\alpha \rho d\rho = f(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a \tag{2.2}$$

причем

$$S(z) = \{J_n(z)\, \delta_{nk}\}_{n,k=-\infty}^{\infty}, \quad L(z) = \{h_{n-k}(z)\}_{n,k=-\infty}^{\infty}$$

— бесконечномерные матрицы ($J_n(z)$ — функции Бесселя), а

$$q(\rho) = \{i^n q_n(\rho)\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad f(r) = \{i^n f_n(r)\}_{n=-\infty}^{\infty} \tag{2.3}$$

— бесконечномерные векторы.

Произведем редукцию системы (2.2), считая в (2.3) $|n| \leqslant N$, $|k| \leqslant N$, в результате чего придем к системе $2N+1$ интегральных уравнений с $2N+1$ неизвестными

$$K^* q^* = \int_0^a \int_0^\infty S^{(N)}(\alpha r)\, L^{(N)}(\alpha)\, S^{(N)}(\alpha\rho)\, q^{(N)}(\rho)\, \alpha d\alpha \rho d\rho = f^{(N)}(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a \tag{2.4}$$

где индекс N вверху означает, что в (2.3) $|n|$, $|k| \leqslant N$ (в дальнейшем его везде опускаем).

При построении решения (2.4) будем следовать методике [6].

Используя свойства функций Бесселя и Ханкеля, преобразуем ядро системы к виду

$$k(r, \rho) = \int_0^\infty S(\alpha r)\, L(\alpha)\, S(\alpha\rho)\, \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \int_\Gamma \begin{pmatrix} H(tr) \\ S(tr) \end{pmatrix} L(t) \begin{pmatrix} S(t\rho) \\ H(t\rho) \end{pmatrix} t dt \quad \begin{matrix} r > \rho \\ r < \rho \end{matrix} \tag{2.5}$$

где $H(z) = \{H_n^{(2)}(z)\, \delta_{nk}\}_{n,k=-\infty}^{\infty}$, $H_n^{(2)}(z)$ — функция Ханкеля 2-го ро[да].
Контур Γ располагается в нижней полуплоскости в области регул[ярности]

ности s^* элементов матрицы $L(t)$. Далее построим общее представление решения системы (2.2). Для этого доопределим правую часть (1.4) функцией $g(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \overline{\in} \Omega$. Применим затем к обеим частям (1.4) преобразование Фурье по x_1, x_2 и, обратив его, разложим все функции в ряды согласно (2.1). Вводя затем вектор $Z(t)$ с компонентами, аналитически продолжимыми в нижнюю полуплоскость и убывающими там, как e^{-ita}

$$Z(t) = \frac{t}{2}[L_-(t)]^{-1}\int_a^\infty H(tr)\,g(r)\,r\,dr, \quad Z(t) = \{Z_n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

$$g(x_1, x_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(r)^{in\psi}, \quad g(r) = \{i^n g_n(r)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

получим окончательно

$$q(\rho) = \int_0^\infty S(\tau\rho)[L(\tau)]^{-1}F(\tau)\,\tau d\tau + \int_{\Gamma_1} S(t\rho)[L_+(t)]^{-1}Z(t)\,dt$$

$$F(\tau) = \int_0^a S(\tau r) f(r)\,r\,dr \tag{2.6}$$

где $L_+(t)$, $L_-(t)$ — результат факторизации матрицы $L(t)$ относительно контура Г. Контур Γ_1 расположен в s^* ниже Г.

Внося (2.5) и (2.6) в (2.4), интегрируя и используя обращение преобразования Мейера [7], придем к системе

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\Theta(t_2, t_1, a)}{t_2^2 - t_1^2}[L_+(t_1)]^{-1}Z(t_1)\,dt_1 + E(t_2, a) = 0 \tag{2.7}$$

t_2 — выше контура Γ_1,

$$E(t_2, a) = \int_0^\infty \frac{\Theta(t_2, \eta, a)}{t_2^2 - \eta^2}[L(\eta)]^{-1}F(\eta)\,\eta d\eta$$

$$\Theta(t, \tau, a) = \{\Theta(t, \tau, a, n)\,\delta_{nk}\}_{n,k=-N}^{N}$$

$$\Theta(t, \tau, a, n) = a\,[tH_{n+1}^{(2)}(ta)\,J_n(\tau a) - \tau H_n^{(2)}(ta)\,J_{n+1}(\tau a)]$$

Введем в рассмотрение диагональные матрицы $\varkappa_1(\tau, a)$, $\varkappa_2(\tau, a)$ с элементами, регулярными и не обращающимися в нуль в нижней полуплоскости и обладающими там следующим асимптотическим поведением:

$$\begin{aligned} &\sqrt{a}\,\varkappa_2(\tau, a, n)\,J_0(\tau a) \to 1 \\ &i\sqrt{a}\,\varkappa_1(\tau, a, n)\,H_0^{(2)}(\tau a) \to 1 \end{aligned} \qquad \operatorname{Im}\tau \to -\infty \tag{2.8}$$

для всех $|n| \leqslant N$. Полагая $Z(t_1) = \varkappa_2(t_1, \alpha) X(t_1)$, умножая (2.7) слева на $L_+(t_2) \varkappa_1(t_2, \alpha)$ и проектируя на $\Gamma_2 > \Gamma_1$ (Γ_2 выше Γ_1), получим

$$\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_2} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{L_+(t_2) \varkappa_1(t_2, \alpha) \Theta(t_2, t_1, \alpha) [L_+(t_1)]^{-1} \varkappa_2(t_1, \alpha) X(t_1)}{(t_2 - z)(t_2^2 - t_1^2)} dt_1 dt_2 +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{L_+(t_2) \varkappa_1(t_2, \alpha) E(t_2, \alpha)}{t_2 - z} dt_2 = 0, \quad z > \Gamma_2 \tag{2.9}$$

Представим

$$\frac{\varkappa_1(t_2, \alpha, n) \Theta(t_2, t_1, \alpha, n) \varkappa_2(t_1, \alpha, n)}{t_2^2 - t_1^2} = -\frac{1}{t_1 - t_2} - \frac{M(t_2, t_1, \alpha, n)}{t_2^2 - t_1^2}$$

причем $M(t_2, t_1, \alpha, n) = c + O(|t_2^{-1}|, |t_1^{-1}|)$ при $|t_j| \to \infty$, $t_j \in \Gamma_j$, $j = 1, 2$ для всех $|n| \leqslant N$.

Аналогично [6], обращая бисингулярный оператор

$$\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_2} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{L_+(t_2) [L_+(t_1)]^{-1}}{(t_2 - z)(t_1 - t_2)} X(t_1) dt_1 dt_2 \tag{2.10}$$

приведем (2.9) к операторному уравнению 2-го рода

$$X(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_2} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{L_+(t_2) M(t_2, t_1, \alpha) [L_+(t_1)]^{-1}}{(t_2 - z)(t_2^2 - t_1^2)} X(t_1) dt_1 dt_2 -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{L_+(t_2) \varkappa_1(t_2, \alpha) E(t_2, \alpha)}{t_2 - z} dt_2 \tag{2.11}$$

которое несложным приемом приводится к уравнению с вполне непрерывным оператором в пространстве $c_n(\lambda)$ векторных функций с компонентами непрерывными и убывающими на контуре Γ_1 с весом z^λ $(0 < \lambda < 1)$. В силу полной непрерывности оператор расщепляется на конечномерный и малый, и решение (2.11) сводится к решению конечной алгебраической системы. Практическая реализация вышеизложенного базируется на аппроксимации

$$h_k(\alpha) = (\alpha^2 + b^2)^{-0.5} h_k^*(\alpha), \quad k = 0, 1, \ldots N$$

где $h_k^*(\alpha)$ — четные по α рациональные функции, $h_k^*(\alpha) = O(1)$, $\alpha \to \infty$, которые могут быть построены, например, при помощи полиномов С. Н. Бернштейна. Далее факторизация матрицы $L^*(\alpha)$ осуществляется на основе факторизации полиномиальной матрицы $R(\alpha)$ и полинома $P(\alpha)$, которая выполняется точно

$$\begin{gathered} L(\alpha) \simeq L^*(\alpha) = (\alpha^2 + b^2)^{-0.5} P^{-1}(\alpha) R(\alpha) \\ L_\pm^*(\alpha) = (b \mp i\alpha)^{-0.5} P_\pm^{-1}(\alpha) R_\pm(\alpha) \end{gathered} \tag{2.12}$$

Совершенно аналогично

$$[L_{+}(\alpha)]^{-1} \simeq (b \mp i\alpha)^{+0.5}\, [P_{\pm}^{(1)}(\alpha)]^{-1} R_{\pm}^{(1)}(\alpha) \qquad (2.13)$$

Пусть $-z_k$, $k=1, 2,\dots, l$ — нули полинома $P^{(1)}(\alpha)$, лежащие ниже контура Γ_1. Деформируя в (2.11) контура Γ_2, Γ_1 в нижнюю полуплоскость, пренебрегая интегральными членами порядка $O([ba]^{-2})$, которые могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора параметра аппроксимации „b" достаточно большим, и полагая $z = -z_s$, получим конечную алгебраическую систему

$$X(-z_s) = \sum_{k=1}^{l} B_{ks} X(-z_k) + C_s, \quad s = 1, 2,\dots, l$$

$$B_{ks} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{1}{t_2 + z_s} \operatorname*{res}_{t_1=-z_k} \left(\frac{L_{+}(t_2)\, M(t_2, t_1, a)\, [L_{+}(t_1)]^{-1}}{t_2^2 - t_1^2} \right) dt_2 \qquad (2.14)$$

$$C_s = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{L_{+}(t_2)\, \varkappa_1(t_2, a)\, E(t_2, a)}{t_2 + z_s}\, dt_2$$

при достаточно больших l эта система оказывается однозначно разрешимой. Разрешив ее, получим приближенные формулы для контактных напряжений в виде

$$q(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \simeq \sum_{m=-N}^{N} q_m(\rho)\, e^{im\theta} = \sum_{m=-N}^{N} e^{im\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \times$$

$$\times \Bigg[\sum_{s=-N}^{N} \left\langle \int\limits_0^{\infty} J_m(\tau\rho)\, d_{m-s}(\tau)\, F_s(\tau)\, \tau d\tau - 2\pi i \sum_{k=1}^{l} J_m(-z_k\rho) \times \right. \qquad (2.15)$$

$$\left. \times \operatorname*{res}_{\tau=-z_k} d_{m-s}^{+}(\tau)\, \varkappa_2(-z_k, a, s)\, X_s(-z_k) \right\rangle \Bigg]$$

где

$$[L(\alpha)]^{-1} = \{d_{k-n}(\alpha)\}_{n,\, k=-N}^{N}, \qquad [L_{+}(\alpha)]^{-1} = \{d_{k-n}^{+}(\alpha)\}_{n,\, k=-N}^{N}$$

Используя асимптотики для функций Бесселя, нетрудно показать, что при $\rho \to a$

$$q(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \sim \frac{C(\theta)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$$

§ 3. *Оценка погрешности приближенного решения*

Для простоты ограничимся доказательством при $f(x_1, x_2) \equiv f(r)$. Введем обозначение $K^{**}q^{**} = f$, что соответствует (2.4) с заменой матрицы $L(\alpha)$ на $L^{*}(\alpha)$.

Теорема 3. *Если ряд из* $h_k(\alpha)$ *сходится абсолютно и* $\left| h_k(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+b^2}} \dot{h}_k(\alpha) \right| |h_k^{-1}(\alpha)| < \varepsilon$ *для всех* $k=0, 1, \ldots, N$ $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$, *то справедлива оценка*

$$\| q - q^{**} \|_{\mathring{H}(K, \Omega)} < \delta \| q \|_{\mathring{H}(K, \Omega)} \tag{3.1}$$

причем $\delta \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$.

Докажем первую часть теоремы, то есть покажем, что

$$\| q - q^* \|_{\mathring{H}(K, \Omega)} < \delta_1 \| q \|_{\mathring{H}(K, \Omega)} \text{ и } \delta_1 \to 0 \text{ при } N \to \infty$$

Предварительно преобразуем (1.9) к виду

$$\| q \|^2_{\mathring{H}(K, \Omega)} = \int\limits_0^\infty \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{s-n}(\alpha) Q_n(\alpha) \overline{Q}_s(\alpha) \alpha d\alpha$$

$$Q_m(\alpha) = i^m \int\limits_0^a q_m(\rho) J_m(\alpha\rho) \rho d\rho \tag{3.2}$$

Из равенства $Kq = K^* q^*$ (3.2) и неравенства Шварца получим

$$\| q - q^* \|_{\mathring{H}(K, \Omega)} \leqslant \| (K^* - K) q^* \|_{\mathring{H}(K, \Omega)} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \sum_{m,\, p=-N}^{N} a_{mp}(\alpha) Q_m(\alpha) \overline{Q}_p(\alpha) \alpha d\alpha \tag{3.3}$$

$$a_{mp}(\alpha) = \sum_{|s|,\, |n| > N} h_{s-n}(\alpha) h_{n-m}(\alpha) h_{s-p}(\alpha)$$

Введем в рассмотрение регулярный пучок эрмитовых форм

$$A_1(Q, \overline{Q}) + \nu A_2(Q, \overline{Q}) \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$$

$$A_1(Q, \overline{Q}) = \sum_{m,\, p=-N}^{N} a_{mp}(\alpha) Q_m(\alpha) \overline{Q}_p(\alpha) \tag{3.4}$$

$$A_2(Q, \overline{Q}) = \sum_{m,\, p=-N}^{N} h_{m-p}(\alpha) Q_m(\alpha) \overline{Q}_p(\alpha)$$

Из свойств $K(\alpha_1, \alpha_2)$ вытекает что $A_2(Q, \overline{Q})$ — положительно определенная этмитова форма

$$(0 \leqslant \alpha \leqslant \infty)$$

Поэтому [8]

$$A_1(Q, \overline{Q}) \leqslant \nu_{\max}(\alpha) A_2(Q, \overline{Q})$$

где $\nu_{\max}(\alpha)$ — наибольшее характеристическое число пучка (3.4). Покажем, что

$$\sup_{\alpha} |\nu_{\max}(\alpha)| = \delta_1 \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty$$

В самом деле,

$$\left| \sum_{s,\, n=-\infty}^{\infty} h_{s-n}(\alpha)\, h_{n-m}(\alpha)\, h_{s-p}(\alpha) \right| \leqslant h_0(\alpha) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} |h_l(\alpha)| \right)^2$$

для всех m, p, $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$ и в силу абсолютной сходимости ряда из $h_l(\alpha)$ следует сходимость ряда слева.

Следовательно, $a_{mp}(\alpha) \to 0$ при $N \to \infty$, а отсюда вытекает, что все характеристические числа пучка (3.4) стремятся к нулю при $N \to \infty$.

Таким образом, учитывая, что $\sum\limits_{s,\, n=-\infty}^{\infty} h_{s-n}(\alpha)\, Q_n(\alpha)\, \overline{Q}_s(\alpha) > 0$ для всех ненулевых векторов Q, имеем

$$\| q - q^* \|_{\overset{\circ}{H}(K,\, \varphi)} < \delta_1 \| q \|_{\overset{\circ}{H}(K,\, \varphi)} \tag{3.5}$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы

$$\| q^* - q^{**} \|_{\overset{\circ}{H}(K,\, \varphi)} < \delta_2 \| q \|_{\overset{\circ}{H}(K,\, \varphi)} \tag{3.6}$$

причем $\delta_2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.
Из (3.5) и (3.6) и следует (3.1).

§ 4. *Численный пример*

Построим приближенное решение уравнения (1.4) для задачи сжатия, используя следующую аппроксимацию его символа:

$$\frac{L(u \cos\varphi,\ u \sin\varphi)}{u} \simeq h_0^*(u) + 2h_2^*(u) \cos 2\varphi \tag{4.1}$$

где

$$h_{2n}^*(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}\,(u^2 + A^2)} (k_{2n} u^2 + bA^2 z_{2n})$$

$$k_{2n} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \lim_{u \to \infty} L(u \cos\varphi,\ u \sin\varphi) \cos 2n\varphi\, d\varphi$$

$$z_{2n} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \lim_{u \to 0} u^{-1} L(u \cos\varphi,\ u \sin\varphi) \cos 2n\varphi\, d\varphi \qquad n = 0,\ 1 \tag{4.2}$$

а «b», «A» — параметры аппроксимации.

Аппроксимация вида (4.1) и последующая редукция порождает матрицу

$$L^*(u) = \begin{Vmatrix} \overset{*}{h_0}(u) & \overset{*}{h_2}(u) \\ \overset{*}{h_2}(u) & \overset{*}{h_0}(u) \end{Vmatrix} \tag{4.3}$$

факторизация которой легко строится

$$\overset{*}{L_\pm}(u) = \frac{1}{\sqrt{b \pm iu}} \frac{1}{u \pm iA} \begin{Vmatrix} \delta_+ (u \pm \alpha_+) & \pm \delta_- (u \pm \alpha_+) \\ \mp \delta_\pm (u \pm \alpha_\pm) & \delta_- (u \pm \alpha_-) \end{Vmatrix}$$

$$\delta_\pm = \sqrt{\frac{k_0 \pm k_2}{2}}; \quad \alpha^2_\pm = - bA^2 \frac{z_0 \pm z_2}{k_0 \pm k_2}, \quad L^*(u) = \overset{*}{L_-}(u) \overset{*}{L_+}(u) \tag{4.4}$$

Конкретные численные расчеты проводились для следующих значений упругих постоянных [9]:

$c_{11} = 2.55, \quad c_{22} = 3.81, \quad c_{33} = 3.71, \quad c_{44} = 1.34, \quad c_{55} = 0.321, \quad c_{66} = 0.979,$

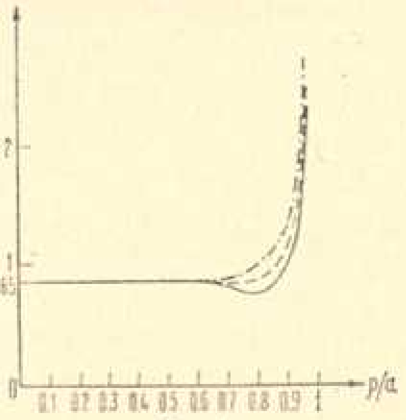
$c_{12} = 1.41, \quad c_{13} = 1.16, \quad c_{23} = 1.46 (\times 10^{11}$ *дн/см*^{2}) (сегнетова соль).

Для этого материала по формулам (4.2) на ЭВМ ОДРА-1204 найдены значения $k_0 = 2.96026$, $k_2 = 0.40658$, $z_0 = 1.1684$; $z_2 = -0.03179$, причем постоянные k_{2n} и z_{2n} быстро убывают ($k_4 = 0.082$, $z_4 = 0.0169$), что позволяет достаточно эффективно использовать аппроксимацию (4.1). Относительная погрешность (4.1) при $b = 7.5$, $A = 3.9$ не превосходит 15% во всей плоскости.

Считая далее $f(x_1, x_2) = \delta$ и полагая $a = 5$, $h = 1$, решаем алгебраическую систему вида (2.14) 4-го порядка и находим контактные напряжения под штампом

$$q(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = q_0(\rho) + 2q_2(\rho) \cos 2\theta$$

На фиг. 1 приведены значения контактных напряжений $\dfrac{q(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{c_{33}\delta}$



Фиг. 1

для различных углов θ, причем штриховая линия соответствует $\theta = \frac{\pi}{4}$, штрих-пунктирная — $\theta = 0$, а сплошная — $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Видно, что несимметрия контактных напряжений возрастает по мере приближения к краю штампа.

Замечание 2. Изложенный выше прием решения системы (2.1) можно перенести и на случай контакта с трением. Однако, факторизация матрицы $L(\alpha)$ в этом случае производится гораздо сложнее.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Бабешко за руководство работой.

НИИ механики и прикладной математики
Ростовского государственного университета

Поступила 21 II 1977

Ա. Օ. ՎԱՏՈՒԼՅԱՆ

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԻ ՎՐԱ ԿՈՇՏ ԴՐՈՇՄԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է օրթոտրոպ շերտի վրա կոշտ և հատակագծով կլոր դրոշմի ազդեցությունը կոնտակտի տիրույթում շփման բացակայության դեպքում։

Եզրային խնդիրը բերվել է տարբերական կորիզով առաջին սեռի երկչափանի ինտեգրալ հավասարման։

Ցույց է տրված, որ այդ հավասարումն ունի միակ լուծում։ Առաջարկվել է հավասարման լուծման մոտավոր եղանակ, որը հիմնված է ֆակտորիզացիայի մեթոդի վրա։

ON THE ACTION OF A PUNCH ON AN ORTHOTROPIC LAYER

A. O. VATULIAN

Summary

A problem on the action of a rigid punch on an orthotropic layer with no friction in the contact area is studied. The boundary problem is reduced to a two-dimensional equation of the first kind with a difference kernel which in its turn is reduced to an infinite system of integral equations. A method of approximate solution for the latter is suggested in terms of the factorisation method. An unambiguous solution for the initial equation in a weighted space as well as the convergence of the approximation methods are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., изд. ГИТТЛ, 1950.
2. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван, изд. Ереванского ун-та, 1976.
3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., изд. «Наука», 1974.
4. *Кахиани О. Н.* О действии штампа на ортотропный слой конечной толщины. Тр. Груз. Политехнического института, 1975, № 3.
5. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. УМН, 1965, т. XX, вып. 1.
6. *Бабешко В. А.* Вибрация двух круглых штампов на слоистой среде. ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. т. 2, М., изд. «Наука», 1974.
8. *Гантмахер Ф. Г.* Теория матриц. М., «Наука», 1967.
9. *Хантингтон Г.* Упругие постоянные кристаллов. УФН, 1961, т. 74, вып. 2, 3.