ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 4, 1978 Механика

Н. О. ГУЛКАНЯН, А. М. МКРТЧЯН

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА БЕЗ УЧЕТА ТРЕНИЯ

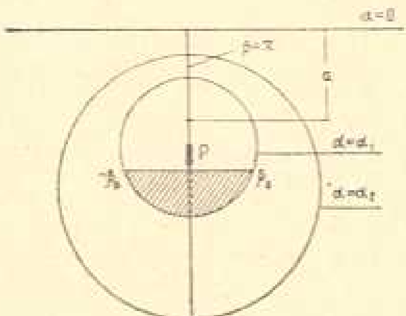
Первая основная задача для эксцентрического кольца в биполярных координатах решалась в [1, 2].

Смешанные задачи решались для частного случая эксцентрического кольца, а именно для полуплоскости с круговым отверстием [3, 4]. В обеих этих работах было принято, что штамп приложен к границе полуплоскости.

В данной статье рассматривается задача о вдавливании штампа в упругое эксцентрическое кольцо, когда между штампом и материалом кольца отсутствует трение. В частном случае получено решение для полуплоскости с круговым отверстием, внутри которого приложен штамп.

1. Задача решается в биполярной координатной системе, в которой эксцентрическое кольцо занимает область $\alpha_2 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, $-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$ (фиг. 1).

Вдоль дуги внутренней окружности $\alpha = \alpha_1$ по участку $|\beta| \leqslant \beta_0$ приложен жесткий гладкий штамп, а на остальной части контура кольца заданы нормальные напряжения. Принято, что касательные напряжения по всему контуру равны нулю.



Фиг. 1.

В силу симметрии будем рассматривать только половину основной области ($\beta \geqslant 0$), требуя при этом выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned}
&\tau_{\alpha\beta}(\alpha_1, \beta) = \tau_{\alpha\beta}(\alpha_2, \beta) = 0 \qquad (0 \leqslant \beta \leqslant \pi) \\
&\tau_{\alpha\beta}(\alpha, 0) = \tau_{\alpha\beta}(\alpha, \pi) = 0 \qquad (\alpha_2 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1) \qquad (1.1) \\
&V(\alpha, 0) = V(\alpha, \pi) = 0 \qquad (\alpha_2 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1)
\end{aligned}$$

$$a\sigma_\alpha(\alpha_2, \beta) = f_2(\beta) \qquad (0 \leqslant \beta \leqslant \pi) \tag{1.2}$$

$$2\mu U(\alpha_1, \beta) = q(\beta) \qquad (0 < \beta < \beta_0) \tag{1.3}$$

$$a\sigma_\alpha(\alpha_1, \beta) = f_1(\beta) \qquad (\beta_0 < \beta < \pi)$$

a — половина расстояния между полюсами системы.

Функцию напряжений $\Phi(\alpha, \beta)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right] g\Phi = 0 \tag{1.4}$$

при $ag = \operatorname{ch}\alpha - \cos\beta$ ищем в виде

$$g\Phi(\alpha, \beta) = A\beta\sin\beta + E_0\operatorname{sh}\alpha + F_0\alpha\operatorname{sh}\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\alpha)\cos k\beta \tag{1.5}$$

На основании (1.5), используя связи напряжений и перемещений с функцией $g\Phi$ [1], находим

$$a\sigma_\alpha = A[2\cos\beta(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta) - \sin^2\beta] - F_0\operatorname{sh}^2\alpha -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}[k^2(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta) - \operatorname{ch}\alpha]\Psi_k(\alpha)\cos k\beta +$$

$$+\sin\beta\sum_{k=1}^{\infty}k\Psi_k(\alpha)\sin k\beta - \operatorname{ch}\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k'(\alpha)\cos k\beta \tag{1.6}$$

$$a\tau_{\alpha\beta} = (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k'(\alpha)\sin k\beta \tag{1.7}$$

$$2\mu U = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left\{A\frac{\beta\operatorname{sh}\alpha\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} + E_0\left(\operatorname{ch}\alpha - \frac{\operatorname{sh}^2\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\right) + \right.$$

$$\left. + F_0\left(\operatorname{sh}\alpha + \alpha\operatorname{ch}\alpha - \frac{\alpha\operatorname{sh}^2\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\right)\right\} -$$

$$-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left[A\left(\frac{\alpha\sin^2\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} - \alpha\cos\beta\right) + F_0\left(\operatorname{sh}\alpha - \frac{\beta\operatorname{sh}\alpha\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\right)\right] +$$

$$+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Psi_k'(\alpha) - \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\Psi_k(\alpha)\right]\cos k\beta -$$

$$-\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Psi_k'(\alpha) + (k^2-1)\int^{\alpha}\Psi_k(x)\,dx\right]\cos k\beta - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Psi_k'(\alpha) + (k^2-1)\int^{\alpha}\Psi_k(x)\,dx\right]\frac{\sin k\beta}{k}\right\} \tag{1.8}$$

$$2\mu V = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\left(\sin\beta - \frac{\beta\sin^2\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} + \beta\cos\beta\right)A - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh}\alpha\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}(F_0 + \alpha E_0)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left[A\left(\frac{\alpha\operatorname{sh}\alpha\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta} - \sin\beta\right) + F_0\left(\beta\operatorname{ch}\alpha - \frac{\beta\operatorname{sh}^2\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}\right)\right] -$$

$$- \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\Psi_k(\alpha)\sin k\beta + \frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\alpha)\cos k\beta\right] +$$

$$+ \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\Psi_k'(\alpha) + \frac{k^2-1}{k}\Psi_k(\alpha) - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}\left[\Psi_k'(\alpha) + \frac{k^2-1}{k}\int^{\alpha}\Psi_k(x)\,dx\right]\right\}\frac{\sin k\beta}{k} \tag{1.9}$$

λ, μ — постоянные Ламе.

Функцию $\Psi_k(\alpha)$ удобно представить в виде

$$\Psi_k'(\alpha) = E_k\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha)\operatorname{sh}k(\alpha_1-\alpha) + G_k\operatorname{sh}k(\alpha_1-\alpha)\operatorname{sh}(\alpha-\alpha_2) +$$

$$+ F_k\operatorname{sh}k(\alpha-\alpha_2)\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha) + H_k\operatorname{sh}k(\alpha-\alpha_2)\operatorname{sh}(\alpha-\alpha_2) \quad k\geqslant 2 \tag{1.10}$$

$$\Psi_1(\alpha) = E_1\operatorname{sh}2(\alpha-\alpha_2) + G_1\operatorname{ch}2(\alpha-\alpha_2) + F_1(\alpha-\alpha_2) + H_1$$

Выбор функции $\Psi_k(\alpha)$ в таком виде обеспечивает автоматическое удовлетворение трех условий (1.1). Из остальных условий (1.1) имеем:

$$\Psi_k'(\alpha_1) = 0, \quad \Psi_k'(\alpha_2) = 0, \quad F_0 = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}A \tag{1.11}$$

что равносильно

$$H_k = E_k = 0 \quad \text{при} \quad k\geqslant 2$$
$$2E_1 = -F_1, \quad F_1 = G_1\operatorname{cth}(\alpha_1-\alpha_2) \tag{1.12}$$

С учетом (1.11) условие (1.2) принимает вид

$$-(\operatorname{ch}\alpha_2 - \cos\beta)\sum_{k=1}^{\infty}k^2\Psi_k(\alpha_2)\cos k\beta + \sin\beta\sum_{k=1}^{\infty}k\Psi_k(\alpha_2)\sin k\beta +$$

$$+ \operatorname{ch}\alpha_2\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\alpha_2)\cos k\beta = f_2(\beta) - Q_2(\beta) \quad (0\leqslant\beta\leqslant\pi) \tag{1.13}$$

где

$$Q_2(\beta) = A\left[2\cos\beta(\operatorname{ch}\alpha_2-\cos\beta) - \sin^2\beta - \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{sh}^2\alpha_2\right] \tag{1.14}$$

Рассматривая (1.13) как интегральное уравнение относительно

$$\varphi(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k(\alpha_2) \cos k\beta$$

находим решение этого уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k(\alpha_2) \cos k\beta = \frac{\cos\beta \operatorname{ch}\alpha_2}{\operatorname{ch}\alpha_2 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha_2) - \frac{R(\beta)}{\operatorname{ch}\alpha_2 - \cos\beta} -$$

$$- \int_0^{\beta} \frac{R(y)\,dy}{(\operatorname{ch}\alpha_2 - \cos y)^2} [\sin y \operatorname{ch}\alpha_2 \cos\beta + \sin\beta(1 - \operatorname{ch}\alpha_2 \cos y)] \tag{1.15}$$

$$(0 < \beta < \pi)$$

где

$$R(y) = f_2(y) - Q_2(\beta) \tag{1.16}$$

Из (1.15) с учетом (1.16) получим

$$A = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f_2(y)(1 - \operatorname{ch}\alpha_2 \cos y)\,dy}{(\operatorname{ch}\alpha_2 - \cos y)^2} \tag{1.17}$$

$$\Psi_k(\alpha_2) = -\frac{2}{\pi k(k^2 - 1)} \int_0^{\pi} \frac{f_2(\beta)[k(\operatorname{ch}\alpha_2 - \cos\beta)\cos k\beta - \sin\beta \sin k\beta]\,d\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_2 - \cos\beta)^2}$$

$$(k \geqslant 2)$$

$$\Psi_2(\alpha_2) = \frac{1 - \operatorname{ch}\alpha_2}{2} A + \frac{\operatorname{ch}\alpha_2 - 1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f_2(\beta) Z(\beta)\,d\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_2 - \cos\beta)^2} \tag{1.18}$$

$$Z(\beta) = (\pi - \beta)\operatorname{ch}\alpha_2 \sin\beta + \frac{\mu(1 + \operatorname{ch}\alpha_2)}{\lambda + 2\mu} (\operatorname{ch}\alpha_2 - \cos\beta)$$

Постоянные G_1, H_1, F_k и G_k выражаем через функции $\Psi_k(\alpha_1)$ и $\Psi_k(\alpha_2)$

$$G_1 = \frac{\Psi_1(\alpha_1) - \Psi_1(\alpha_2)}{\Delta_1}, \quad H_1 = \frac{\Psi_1(\alpha_2)[1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)\operatorname{cth}(\alpha_1 - \alpha_2)] - \Psi_1(\alpha_1)}{\Delta_1}$$

$$G_k = \frac{k^2 - 1}{\Delta_k} [-\Psi_k(\alpha_2) \operatorname{sh} k(\alpha_1 - \alpha_2) + \Psi_k(\alpha_1) k \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2)] \tag{1.19}$$

$$F_k = \frac{k^2 - 1}{\Delta_k} [\Psi_k(\alpha_1) \operatorname{sh} k(\alpha_1 - \alpha_2) - \Psi_k(\alpha_2) k \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

где

$$\Delta_1 = 2[(\alpha_1 - \alpha_2)\operatorname{cth}(\alpha_1 - \alpha_2) - 1], \quad \Delta_k = \operatorname{sh}^2 k(\alpha_1 - \alpha_2) - k^2 \operatorname{sh}^2(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$(k \geqslant 2)$$

Смешанные условия (1.13) приводят к парным уравнениям ($k \geqslant 0$)

$$-\frac{\mu}{\lambda+2\mu} E_0 \operatorname{ch} \alpha_1 + \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k(\alpha_1) \cos k\beta = G(\beta) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} q(\beta) \quad (0 < \beta < \beta_0)$$

$$2A \operatorname{ch} \alpha_1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k(\alpha_1) \cos k\beta = \frac{T(\beta)}{\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos\beta} - \frac{f_1(\beta)}{\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos\beta} \quad (\beta_0 < \beta < \pi) \tag{1.20}$$

где $q(\beta)$ и $f_1(\beta)$ — заданные граничные функции, а $G(\beta)$, $T(\beta)$ — регулярные части в выражениях перемещения $U(\alpha, \beta)$ и напряжения $\sigma_1(\alpha_1, \beta)$.

Для дальнейшего удобно пользоваться разложениями

$$G(\beta) = \frac{\overline{G}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{G}_k \cos k\beta, \qquad \frac{T(\beta)}{\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos\beta} = \frac{T_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} T_k \cos k\beta \tag{1.21}$$

$\overline{G}_k$ и T_k легко вычисляются при помощи интегралов [1]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\beta d\beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos\beta} = \frac{2\pi}{\operatorname{sh} \alpha} e^{-n\alpha} \tag{1.22}$$

и имеют вид

$$G_0 = -2\varkappa\left[\delta \operatorname{sh} \alpha_1 E_0 + \frac{\mu \operatorname{sh} \alpha_1}{\lambda+2\mu} A + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha_1) e^{-k\alpha_1}\right] +$$

$$+ 2\sum_{k=2}^{\infty} [(1-N_k)\Psi_k(\alpha_1) - M_k \Psi_k(\alpha_2)] e^{-k\alpha_1}$$

$$\overline{G}_1 = \Psi_1(\alpha_1) - 2\varkappa\left[\delta \operatorname{sh} \alpha_1 e^{-\alpha_1} E_0 - \frac{\alpha_1(\lambda+3\mu)e^{-\alpha_1} \operatorname{sh} \alpha_1}{\lambda+2\mu} A +\right.$$

$$\left.+ \delta \operatorname{ch} \alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(\alpha_1) e^{-k\alpha_1}\right] + 2 \operatorname{ch} \alpha_1 \sum_{k=2}^{\infty} [(1-N_k)\Psi_k(\alpha_1) - M_k \Psi_k(\alpha_2)] e^{-k\alpha_1}$$

$$\overline{G}_n = -2\varkappa\delta \operatorname{sh} \alpha_1 e^{-n\alpha_1} E_0 + \frac{2\alpha\varkappa(\lambda+3\mu)}{\lambda+2\mu} \operatorname{sh} \alpha_1 e^{-n\alpha_1} A +$$

$$+ \delta\varkappa \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \Psi_k(\alpha_1) + n[\Psi_n(\alpha_1) N_n + M_n \Psi_n(\alpha_2)] + [(1-N_n)\Psi_n(\alpha_1) -$$

$$- M_n \Psi_n(\alpha_2)] e^{-2n\alpha_1} + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq n}}^{\infty} [(1-N_k)\Psi_k(\alpha_1) - M_k \Psi_k(\alpha_2)] b_{nk} \tag{1.23}$$

$$(n \geqslant 2)$$

$$T_0 = 2\left[e^{-\alpha_1} + \left(2 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right)\operatorname{sh}\alpha_1\right]A +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(k + \operatorname{cth}\alpha_1)\Psi_k(\alpha_1)e^{-k\alpha_1}$$

$$T_1 = \left[e^{-2\alpha_1} + 2\left(2 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right)\operatorname{sh}\alpha_1 e^{-\alpha_1}\right]A +$$

$$+ 2\operatorname{ch}\alpha_1 \sum_{k=2}^{\infty} k\Psi_k(\alpha_1)e^{-k\alpha_1} + \Psi_1(\alpha_1)e^{-2\alpha_1} + \operatorname{cth}\alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\alpha_1)b_{k1} \qquad (1.24)$$

$$T_n = 2\left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right)\operatorname{sh}\alpha_1 e^{-n\alpha_1}A + n\Psi_n(\alpha_1)e^{-2n\alpha_1} +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty} k\Psi_k(\alpha_1)b_{kn} + \operatorname{cth}\alpha_1 \sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\alpha_1)b_{kn} \qquad (n \geqslant 2)$$

где

$$2\Delta_k N_k = -2k^2\operatorname{sh}^2\alpha + 2k\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha - 1 + e^{-2k\alpha}$$

$$b_{kn} = e^{-(n+k)\alpha_1} + e^{-|k-n|\alpha_1}, \quad \varkappa = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \qquad (1.25)$$

$$\gamma = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \qquad \Delta_k M_k = \operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}k\alpha + k\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}k\alpha$$

Используя результаты [5], решение уравнений (1.20), с учетом разложений (1.21), получим в виде

$$p\Psi_p(\alpha_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\overline{G}_k J_{pk}(\cos\beta_0) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} T_k I_{pk}(\cos\beta_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\beta_0}^{\pi} F(\cos\theta)\, z_p(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\beta_0} Q(\cos\theta)\, z_p(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2p}(4\operatorname{ch}\alpha_1 A - T_0)\, y_p(\cos\beta_0) \qquad (1.26)$$

Здесь

$$J_{pk}(\cos\beta_0) = \int_0^{\beta_0} z_p(\cos\theta)\, z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$F(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{f(\beta)\sin\frac{\beta}{2}\,d\beta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\beta}},\qquad Q(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{\theta}\frac{g'(\beta)\sin\frac{\beta}{2}\,d\beta}{\sqrt{\cos\beta-\cos\theta}}$$

$$I_{pk}(\cos\beta_0)=\int_{\beta_0}^{\pi}z_p(\cos\theta)\,z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta,\qquad f(\beta)=\frac{f_1(\beta)}{\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta}\qquad(1.27)$$

$$z_p(x)=P_{k-1}(x)-P_k(x),\quad y_k(x)=P_{k-1}(x)+P_k(x)$$

а $P_k(x)$ — полиномы Лежандра.

Подставляя (1.26) в первое уравнение (1.20), определим постоянную E_0

$$\frac{\mu\operatorname{ch}\alpha_1}{\lambda+2\mu}E_0=(T_0-4A\operatorname{ch}\alpha_1)\ln\sin\frac{\beta_0}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\overline{G}_k-\frac{T_k}{k}\right)y_k(\cos\beta_0)-$$

$$-\frac{G_0}{2}+g(0)+\frac{1}{2}\int_{\beta_0}^{\pi}F(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{0}^{\beta_0}Q(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\qquad(1.28)$$

Как видно из (1.23—1.25), $\overline{G}_k$ и T_k выражаются через $\Psi_p(\alpha_1)$, следовательно, (1.26) и (1.28) можно рассматривать как бесконечную систему относительно $p^2\Psi_p(\alpha_1)$ и E_0. Сумма модулей коэффициентов при $p^2\Psi_p(\alpha_1)$ в (1.26) стремится к нулю, как $\frac{\ln p}{\sqrt{p}}$, а свободные члены бесконечной системы ограничены и стремятся к нулю как $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Следовательно, система (1.26) квазивполне регулярна.

Подставляя (1.26) в (1.6) при $\alpha=\alpha_1$ с использованием значения ряда

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}y_k(\cos\theta)\cos k\beta=\begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}(\cos\beta-\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} & (\varphi>\beta)\\ 0 & (\varphi<\beta)\end{cases}\qquad(1.29)$$

получим

$$a\sigma_\alpha(\alpha_1,\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\beta}{2}(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)\left[\frac{R}{\sqrt{\cos\beta-\cos\beta_0}}-\right.$$

$$-\int_{\beta}^{\beta_0}\frac{Q'(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\beta-\cos\theta}}+\sum_{k=1}^{\infty}k[k\overline{G}_k-T_k]\int_{\beta}^{\beta_0}\frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\beta-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}-$$

$$\left.-\int_{\beta_0}^{\pi}\frac{F'(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\beta-\cos\theta}}\right]+\frac{F(-1)}{2}(\operatorname{ch}\alpha_1-\cos\beta)\qquad(0<\beta<\beta_0)\quad(1.30)$$

R — постоянная, входящая в коэффициент особенности контактного напряжения при $\beta = \beta_0$, которая определяется формулой

$$R = 4A \operatorname{ch} \alpha_1 - T_0 + F(\cos\beta_0) - Q(\cos\beta_0) - \sum_{k=1}^{\infty} [k\overline{G}_k - T_k]\, z_k(\cos\beta_0) \quad (1.31)$$

2. Численный пример.

Рассматривается случай, когда фиксированы параметры:

$$\alpha_1 = 1.009, \quad a = 1, \quad f_1(\beta) = 0, \quad \nu = 0.35, \quad E = 2\cdot 10^6 \; кг/см^2, \quad g(\beta) = 0$$

$$f_2(\beta) = \begin{cases} -q_0 & 0 < \beta < \beta_2 \\ 0 & \beta_2 < \beta < \pi \end{cases}$$

и варьируются геометрические параметры: внешний радиус α_2, область задания равномерно распределенной нагрузки на внешнем контуре β_2, область приложения гладкого штампа на внутреннем контуре β_0.

В табл. 1—3 приведены значения коэффициента при особенности $(\cos\beta - \cos\beta_0)^{-1/2}$

$$R^*/q_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\frac{\beta_0}{2} (\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta_0)\, R$$

причем в табл. 1 и 2 фиксировано α_2, а в табл. 3 фиксировано β_0.

Таблица 1

$\alpha_2 = 0.25$

β_0 \ β_2	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/10$
$\pi/10$	1.2394	0.3325	0.2974
$6\pi/10$	−1.3521	0.7203	−0.2107

Таблица 2

$\alpha_2 = 0.5$

β_0 \ β_2	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/10$
$\pi/20$	1.3961	0.3631	0.2632
$2\pi/20$	1.04762	0.7044	0.5737
$3\pi/20$	1.7916	1.4957	1.3639

Таблица 3

$\beta_0 = \pi/10$

α_2 \ β_2	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/10$
0.5	1.0475	0.7043	0.5737
0.8	−0.8491	−0.3679	−0.2997

3. Частные случаи.

а) Подставляя в решение задачи $\alpha_2 = 0$, получим решение контактной задачи для полуплоскости, ослабленной круговым отверстием, на границе которой действует гладкий жесткий штамп. При этом $f_2(\beta)$ при $\beta \to 0$ должно стремиться к нулю как β. Иными словами, граница полуплоскости ($\alpha_2 = 0$) на бесконечности должна быть свободна от нагрузок.

6) Из решения данной задачи можно получить решение задачи, когда штамп приложен к внешнему контуру кольца. Для этого достаточно в соответствующих формулах поменять местами α_1 и α_2. Если, кроме этого, принять радиус внешней окружности равным бесконечности (то есть принять $\alpha_1 = 0$), то получаем решение для полуплоскости с круговой полостью, когда на границе полуплоскости приложено два симметрично расположенных полубесконечных штампа. Решение такой задачи ранее было получено в работе [4].

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 17 III 1978

Ն. Օ. ԳՈՒԼՔԱՆՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԱՐՏԱԿԵՆՏՐՈՆ ՕՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ԱՌԱՆՑ ՇՓՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է արտակենտրոն օղակի համար հարթ կոնտակտային խընդիր, երբ ներքին (արտաքին) եզրագծի վրա ազդում է կոշտ ողորկ դրոշմ։

Երկբևեռ կոորդինատային սիստեմում, Ֆուրյեի շարքերի օգնությամբ, խնդրի լուծումը բերվում է նախ զույգ շարքեր հավասարումների, այնուհետև քվազի լիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների սիստեմի։

Մասնավոր դեպքում ստացվում է կլոր անցքով թուլացված կիսահարթության համար կոնտակտային խնդրի լուծումը, երբ անցքի ներսում ազդում է դրոշմ։

Դիտարկված է թվային օրինակ։

A PLANE CONTACT PROBLEM FOR AN ECCENTRIC RING TAKING NO ACCOUNT OF FRICTION

N. O. GULKANIAN, A. M. MKRTCHIAN

Summary

A problem on pressing a punch into an elastic eccentric ring with no friction between the punch and the ring's material is considered. In the particular case a solution is obtained for a semi-plane with a circular hole to which the punch is applied. The problem is reduced to dual series-equations which in their turn are reduced to a quasi-quite regular infinite system of linear equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. М.—Л., 1950.
2. *Еганян В. В.* Плоская задача теории упругости для эксцентричного кольца. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., 1964, т. 17, № 1.
3. *Араманович И. Г.* Задача о давлении штампа на упругую полуплоскость с круговым отверстием. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 4.
4. *Александрян М. А.* Контактная задача для полуплоскости, ослабленной круговой полостью. Докл. АН Арм. ССР, 1968, т. XVI, № 5.
5. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, 1967, т. 31, в. 4.