

С. М. МХИТАРЯН, К. Г. ГУЛЯН

К РЕШЕНИЮ ДВУХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КЛИНА С УПРУГИМИ КРЕПЛЕНИЯМИ

Многие известные результаты по контактными задачам для клина содержатся в работах [1—6], а также в коллективной монографии [7].

В настоящей работе рассматриваются две плоские контактные задачи о передаче нагрузки от упругого крепления в виде стрингера малой толщины к пластине клиновидной формы с произвольным углом раствора.

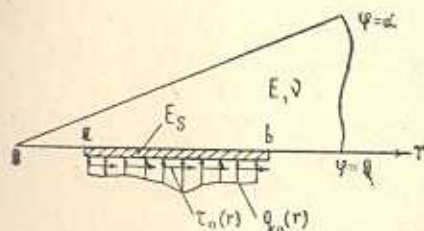
В рамках известных физических предположений указанные задачи математически формулируются в виде системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений при определенных граничных условиях.

На основе аппарата ортогональных многочленов Якоби эта система сводится к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений. Для первой задачи получены числовые результаты и на их основе построены графики тангенциальных и нормальных контактных напряжений.

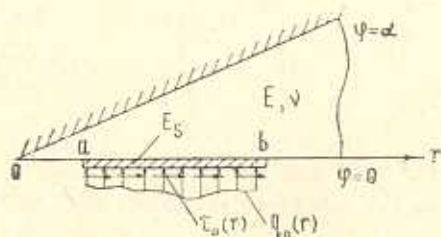
§ 1. Постановка задачи и вывод основных уравнений

Пусть клин на некоторой конечной части своей границы $\varphi = 0$ усилен приваренным к ней упругим стрингером постоянной, достаточно малой толщины d .

В первой задаче предполагается, что другая грань $\varphi = \alpha$ клина свободна от внешних напряжений (фиг. 1), а во второй задаче — что она заземлена (фиг. 2). Требуется определить закон распределения контактных напряжений вдоль линии крепления упругого стрингера с клином, когда стрингер одновременно нагружен горизонтальными и вертикальными силами соответственно интенсивностей $\tau_0(r)$ и $q_0(r)$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Отметим, что главный вектор и главный момент последних сил в разбираемом случае могут быть произвольными конечными величинами, что обычно имеет место в граничных задачах теории упругости для бесконечных областей [8, § 91].

Стрингеры трактуются в рамках классической теории тонких пластин, согласно которой их изгиб в вертикальном направлении, как обычных балок, сочетается с их растяжением или сжатием в горизонтальном направлении, как обычных стержней.

Относительно же клиньев считается, что они находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии.

При указанных предположениях выведем определяющие уравнения поставленных контактных задач.

На участке $[a, b]$ контакта упругого стрингера с клином как в первой, так и во второй задаче должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{du_r^{(2)}}{dr} &= \varepsilon_r^{(1)} \\ D \frac{d^4 u_\varphi^{(2)}}{dr^4} &= q_0(r) - hq(r) \end{aligned} \quad (a < r < b) \quad (1.1)$$

Здесь $u_r^{(2)}$ и $u_\varphi^{(2)}$ — соответственно радиальные и тангенциальные перемещения точек отрезка $[a, b]$ границы клина, $\varepsilon_r^{(1)}$ — осевая деформация стрингера, D — жесткость стрингера на изгиб, h — ширина стрингера.

Кроме (1.1) должны выполняться также граничные условия, которые в данном случае, вследствие отсутствия внешних нагрузок на концевых сечениях стрингера, запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} S(r)|_{r=a} = S(r)|_{r=b} &= 0, \quad Q(r)|_{r=a} = Q(r)|_{r=b} = 0 \\ M(r)|_{r=a} = M(r)|_{r=b} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $S(r)$ — продольная сила, $Q(r)$ — поперечная сила, а $M(r)$ — изгибающий момент в сечении r стрингера. Они будут даваться формулами

$$\begin{aligned} S(r) &= \int_a^r [h\tau(r_0) - \tau_0(r_0)] dr_0, \quad Q(r) = \int_a^r [hq(r_0) - q_0(r_0)] dr_0 \\ M(r) &= \int_a^r (r - r_0) [hq(r_0) - q_0(r_0)] dr_0 \quad (a < r < b) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\tau(r)$ и $q(r)$ — соответственно неизвестные тангенциальные и нормальные контактные напряжения, действующие на отрезке соединения стрингера с гранью клина и подлежащие определению.

Из (1.3) легко видеть, что условия (1.2) при $r = b$ попросту эквивалентны обычным статическим условиям равновесия стрингера

$$h \int_a^b \tau(r) dr = \int_a^b \tau_0(r) dr = T_0, \quad h \int_a^b q(r) dr = \int_a^b q_0(r) dr = Q_0$$

$$h \int_a^b r q(r) dr = \int_a^b r q_0(r) dr = M_0 \quad (1.4)$$

Далее, из условия равновесия любой части (a, r) стрингера, учитывая закон Гука, будем иметь

$$\varepsilon_r^{(1)} = \frac{1}{E_s A_s} \left[h \int_a^r \tau(r_0) dr_0 - \int_a^r \tau_0(r_0) dr_0 \right] \quad (1.5)$$

где E_s — модуль упругости материала стрингера, а A_s — площадь прямоугольного поперечного сечения стрингера.

Обращаясь теперь к перемещениям $u_r^{(1)}$ и $u_r^{(2)}$ граничных точек клина, заметим, что они на основе принципа суперпозиции будут даваться известными интегралами от соответствующих функций влияния бесконечного клина, построенных от единичных тангенциальных и нормальных сосредоточенных сил. Последние строятся при помощи интегрального преобразования Меллина при обычном [9] предположении, что напряжения при $r \rightarrow 0$ имеют порядок $O(r^{-\varepsilon})$ ($\varepsilon < 1$), а при $r \rightarrow \infty$ напряжения и вращение имеют порядок $O(1/r)$. Указанными условиями определяется полоса регулярности $\varepsilon - 1 < \text{Re} p < 0$ соответствующих интегралов Меллина, в которых линия интегрирования затем переносится на мнимую ось и конечные интегралы понимаются, вообще говоря, в смысле теории обобщенных функций. Опуская эти промежуточные выкладки и представляя функции влияния в виде суммы своих особых и регулярных частей, получим, что условия (1.1) задачу определения неизвестных контактных напряжений $\tau(r)$ и $q(r)$ сводят к решению следующих интегро-дифференциальных уравнений, относящихся соответственно к первой и второй задачам:

$$\begin{aligned} \int_a^b K_{11}^{(k)}(t) \varphi'(r_0) dr_0 + \int_a^b K_{12}^{(k)}(t) \psi'(r_0) dr_0 &= \lambda_1 r [h\varphi(r) - \varphi_0(r)] + A^{(k)}(x) \\ \int_a^b K_{21}^{(k)}(t) \varphi'(r_0) dr_0 + \int_a^b K_{22}^{(k)}(t) \psi'(r_0) dr_0 &= \\ = \lambda_2 r \int_a^r (r_0 - r)^2 [\psi_0'(r_0) - h\psi'(r_0)] dr_0 + r c_k^* + B^{(k)}(x) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $k = 1, 2$ соответственно первой и второй задачам, а

$$K_{11}^{(k)}(t) = \frac{1}{t} - L_{11}^{(k)}(t) - L_{22}^{(k)}(t)$$

$$K_{12}^{(k)}(t) = -\pi \frac{1-\nu}{2} \delta(t) - L_{12}^{(k)}(t) - L_{21}^{(k)}(t)$$

$$K_{21}^{(k)}(t) = \pi \frac{1-\nu}{2} \delta(t) + L_{12}^{(k)}(t) - L_{21}^{(k)}(t)$$

$$K_{22}^{(k)}(t) = \frac{1}{t} - L_{11}^{(k)}(t) + L_{22}^{(k)}(t)$$

$$A^{(k)}(\alpha) = \begin{cases} \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \frac{\pi T_0}{4h} - \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \frac{\pi Q_0}{2h}, & k=1 \\ 0, & k=2 \end{cases} \quad (1.7)$$

$$B^{(k)}(\alpha) = \begin{cases} -\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \frac{\pi T_0}{2h} + \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \frac{\pi Q_0}{4h}, & k=1 \\ 0, & k=2 \end{cases}$$

$$L_{11}^{(1)}(t) = \int_0^\infty \left[1 - \frac{\text{sh } 2\alpha z}{2\Delta_1} \right] \sin ztdz, \quad L_{12}^{(1)}(t) = \sin^2 \alpha \int_0^\infty \frac{z^2}{\Delta_1} \cos ztdz$$

$$L_{21}^{(1)}(t) = \sin^2 \alpha \int_0^\infty \frac{z}{\Delta_1} \sin ztdz, \quad L_{22}^{(1)}(t) = \frac{\sin 2\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{z}{\Delta_1} \sin ztdz$$

$$L_{11}^{(2)}(t) = \int_0^\infty \left[1 - \frac{x \text{sh } 2\alpha z}{2\Delta_2} \right] \sin ztdz$$

$$L_{12}^{(2)}(t) = -\frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{4z^2 \sin^2 \alpha + z^2 - 1}{\Delta_2} \cos ztdz$$

$$L_{21}^{(2)}(t) = -\sin^2 \alpha \int_0^\infty \frac{z}{\Delta_2} \sin ztdz, \quad L_{22}^{(2)}(t) = -\frac{\sin 2\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{z}{\Delta_2} \sin ztdz$$

$$\Delta_1 = \text{sh}^2 \alpha z - z^2 \sin^2 \alpha, \quad \Delta_2 = x \text{sh}^2 \alpha z + z^2 \sin^2 \alpha + \left(\frac{1+x}{2} \right)^2, \quad t = \ln \frac{r_0}{r}$$

$$\varphi(r) = \int_a^r \tau(r_0) dr_0, \quad \psi(r) = \int_a^r q(r_0) dr_0, \quad \varphi_0(r) = \int_a^r \tau_0(r_0) dr_0$$

$$\psi_0(r) = \int_a^r q_0(r_0) dr_0, \quad \lambda_1 = \pi E / 2E_s A_s, \quad \lambda_2 = \pi E / 4D$$

$$c_k^* = \frac{\pi E}{2} c_k = \frac{\pi E}{2} \frac{du_r^{(2)}}{dr} \Big|_{r=a}$$

где c_k — постоянная интегрирования, равная углу поворота стрингера в сечении $r = a$ и подлежащая определению. Отметим, что при выводе (1.6) были существенно использованы условия (1.2).

Следует еще отметить, что функции $L_{ij}^{(k)}(t)$ ($i, j, k = 1, 2$) представляют собой непрерывные части соответствующих ядер, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, E и ν — упругие постоянные клина, α — угол раствора клина.

Система определяющих уравнений (1.6) должна рассматриваться вместе с граничными условиями (1.4), которые при помощи только что введенных функций запишутся в виде

$$\begin{aligned} h\varphi(a) = 0, \quad h\varphi(b) = T_0; \quad h\psi(a) = 0, \quad h\psi(b) = Q_0 \\ h \int_a^b r \psi'(r) dr = \int_a^b r \psi_0'(r) dr = M_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Далее перейдем к новым переменным, положив

$$\begin{aligned} r = e^{\gamma x + \delta}, \quad r_0 = e^{\gamma s + \delta}, \quad \delta = \frac{1}{2} \ln ab, \quad \gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} \\ \varphi(e^{\gamma x + \delta}) = \Phi(x), \quad \psi(e^{\gamma x + \delta}) = \Psi(x) \quad t = \gamma(s - x) \\ \varphi_0(e^{\gamma x + \delta}) = \Phi_0(x), \quad \psi_0(e^{\gamma x + \delta}) = \Psi_0(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

После элементарных выкладок система (1.6) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{s-x} - \gamma L_{11}^{(k)}[\gamma(s-x)] - \gamma L_{22}^{(k)}[\gamma(s-x)] \right\} \Phi'(s) ds - \\ & - \frac{\pi(1-\nu)}{2} \Psi'(x) - \int_{-1}^1 \{ \gamma L_{12}^{(k)}[\gamma(s-x)] + \gamma L_{21}^{(k)}[\gamma(s-x)] \} \Psi'(s) ds = \\ & = \lambda_1 \gamma e^{\gamma x + \delta} [h\Phi(x) - \Phi_0(x)] + \gamma A^{(k)}(x) \\ & \frac{\pi(1-\nu)}{2} \Phi'(x) + \int_{-1}^1 \{ \gamma L_{12}^{(k)}[\gamma(s-x)] - \gamma L_{21}^{(k)}[\gamma(s-x)] \} \Phi'(s) ds + \\ & + \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{s-x} - \gamma L_{11}^{(k)}[\gamma(s-x)] + \gamma L_{22}^{(k)}[\gamma(s-x)] \right\} \Psi'(s) ds = \\ & = \lambda_2 \gamma e^{\gamma x + \delta} \int_{-1}^x (e^{\gamma x + \delta} - e^{\gamma s + \delta})^2 [\Psi_0'(s) - h\Psi'(s)] ds + \gamma e^{\gamma x + \delta} c_k + \gamma B^{(k)}(x) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Входящие сюда интегралы от ядра Коши следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Граничные же условия (1.8) примут вид

$$h\Phi(-1) = 0, \quad h\Phi(1) = T_0; \quad h\Psi(-1) = 0, \quad h\Psi(1) = Q_0 \quad (1.11)$$

$$h \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \Psi'(x) dx = \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \Psi'_0(x) dx = M_0$$

Таким образом, решения поставленных задач сводятся к решению систем сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.10) при граничных условиях (1.11).

Умножая первое из уравнений (1.10) на мнимую единицу i и складывая со вторым, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & -i\pi \operatorname{th} \mu\pi \chi(x) + \int_{-1}^1 \frac{\chi(s)}{s-x} ds - \gamma \int_{-1}^1 L_{11}^{(k)}[\gamma(s-x)] \chi(s) ds + \\ & + \gamma \int_{-1}^1 L_{22}^{(k)}[\gamma(s-x)] \bar{\chi}(s) ds - i\gamma \int_{-1}^1 L_{12}^{(k)}[\gamma(s-x)] \chi(s) ds - \\ & - i\gamma \int_{-1}^1 L_{21}^{(k)}[\gamma(s-x)] \bar{\chi}(s) ds = \frac{\lambda_1 \gamma}{2} e^{\gamma x + \delta} \int_{-1}^x h[\chi(s) - \bar{\chi}(s)] ds - \\ & - i\lambda_1 \gamma e^{\gamma x + \delta} \Phi_0(x) + \frac{\lambda_2 \gamma}{2} e^{\gamma x + \delta} \int_{-1}^x (e^{\gamma s + \delta} - e^{\gamma s + \delta})^2 [2\Psi'_0(s) - \\ & - h(\chi(s) + \bar{\chi}(s))] ds + \gamma e^{\gamma x + \delta} c_k^* + Q^{(k)}(x) \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \Psi'(x) + i\Phi'(x), \quad \operatorname{th} \mu\pi = \frac{1-\nu}{2} \\ Q^{(k)}(x) &= \gamma [B^{(k)}(x) + iA^{(k)}(x)] \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Граничные же условия преобразуются к виду

$$\begin{aligned} h \int_{-1}^1 [\chi(x) - \bar{\chi}(x)] dx &= 2iT_0, \quad h \int_{-1}^1 [\chi(x) + \bar{\chi}(x)] dx = 2Q_0 \\ h \int_{-1}^1 e^{\gamma x} [\chi(x) + \bar{\chi}(x)] dx &= 2 \int_{-1}^1 e^{\gamma x} \Psi'_0(x) dx = \frac{2}{Vab} M_0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

В дальнейшем будем исходить из интегро-дифференциальных уравнений (1.12) при граничных условиях (1.14).

§ 2. Сведение основных уравнений к бесконечной системе линейных уравнений при помощи аппарата многочленов Якоби

Исходя из известных результатов теории сингулярных интегральных уравнений [10], решение разрешающего уравнения (1.12) ищем в классе функций, представимых в виде

$$\chi(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \chi^*(x) \quad (-1 < x < 1) \\ [-1 < \operatorname{Re}(\alpha, \beta) < 0] \quad (2.1)$$

где $\chi^*(x)$ — ограниченная на отрезке $[-1, 1]$ функция, принадлежащая классу H в окрестностях точек $x = \pm 1$.

Учитывая (2.1), решение (1.12) представим в виде ряда

$$\chi(x) = \omega^{-1}(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad \omega(x) = (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \\ \alpha = -\frac{1}{2} - i\mu, \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\mu, \quad \mu = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad (-1 < x < 1) \quad (2.2)$$

Здесь $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, а a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) — неизвестные комплексные коэффициенты, подлежащие определению.

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения [11—13]:

$$-i\pi \operatorname{th} \mu\pi \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{\omega(x)} + \int_{-1}^1 \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(s)}{\omega(s)(s-x)} ds = \pi (2 \operatorname{ch} \mu\pi)^{-1} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) \\ \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \omega^{-1}(x) dx = \quad (2.3)$$

$$= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, & m = n \end{cases}$$

Теперь, из граничных условий (1.14) при помощи (2.2) и (2.3) находим

$$a_0 = \frac{2}{\pi h \sqrt{(1+\nu)(3-\nu)}} (Q_0 + iT_0) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n G_n) = \frac{M_0}{h \sqrt{ab}} - \operatorname{Re} \left[a_0 \int_{-1}^1 e^{i\pi \omega^{-1}(x)} dx \right] \quad (2.4)$$

где

$$G_n = \int_{-1}^1 e^{\gamma x} \omega^{-1}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Используя свойства ортогональности функций Якоби и учитывая соотношения (2.2) и (2.3), по известной процедуре [14] после некоторых элементарных выкладок относительно коэффициентов $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ и c_k^* получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, эквивалентную разрешающему уравнению (1.12) при граничных условиях (1.14):

$$\begin{aligned} a_m = A_m \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n [R_{m,n}^{(1)} + R_{m,n}^{(2)} - R_{m,n}^{(3)} - R_{m,n}^{(4)}] - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n [R_{m,n}^{(5)} - \right. \\ \left. - R_{m,n}^{(6)} - R_{m,n}^{(7)} + R_{m,n}^{(8)}] + a_0 [H_m^{(1)} + H_m^{(2)} + H_m^{(3)} - H_m^{(4)}] - \right. \\ \left. - \bar{a}_0 [H_m^{(5)} - H_m^{(6)} + H_m^{(7)} + H_m^{(8)}] - H_m^{(9)} + H_m^{(10)} + c_k^* H_m^{(11)} + H_m^{(12)} \right\} \\ (m = 1, 2, 3, \dots) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n G_n) = N \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ядра $R_{m,n}^{(e)}$ ($e = 1, 2, \dots, 8$) и свободные члены $H_m^{(l)}$ ($l = 1, 2, \dots, 12$) бесконечной системы выражаются формулами

$$R_{m,n}^{(1)} = \gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^1 L_{11}^{(k)}[\gamma(s-x)] \omega^{-1}(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(2)} = i\gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^1 L_{12}^{(k)}[\gamma(s-x)] \omega^{-1}(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(3)} = \frac{h\lambda_1 \gamma}{4n} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} (1-x^2) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) dx$$

$$R_{m,n}^{(4)} = \frac{h\lambda_2 \gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \times$$

$$\times \left[\int_{-1}^x (e^{\gamma s + \delta} - e^{\gamma s + \delta})^2 \omega^{-1}(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(5)} = \gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^1 L_{22}^{(k)} [\gamma(s-x)] \overline{\omega^{-1}}(s) P_n^{(\beta, \alpha)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(6)} = i\gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^1 L_{21}^{(k)} [\gamma(s-x)] \overline{\omega^{-1}}(s) P_n^{(\beta, \alpha)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(7)} = \frac{h\lambda_1\gamma}{4n} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega^2(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) dx$$

$$R_{m,n}^{(8)} = \frac{h\lambda_2\gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \times$$

$$\times \left[\int_{-1}^x (e^{\gamma x + \delta} - e^{\gamma s + \delta})^2 \overline{\omega^{-1}}(s) P_n^{(\beta, \alpha)}(s) ds \right] dx \quad (2.6)$$

$$H_m^{(1)} = \gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^1 L_{11}^{(k)} [\gamma(s-x)] \omega^{-1}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(2)} = i\gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^1 L_{12}^{(k)} [\gamma(s-x)] \omega^{-1}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(3)} = \frac{h\lambda_1\gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x \omega^{-1}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(4)} = \frac{h\lambda_2\gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x (e^{\gamma x + \delta} - e^{\gamma s + \delta})^2 \omega^{-1}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(5)} = \gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^1 L_{22}^{(k)} [\gamma(s-x)] \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(6)} = i\gamma \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^1 L_{21}^{(k)} [\gamma(s-x)] \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(7)} = \frac{h\lambda_1\gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(8)} = \frac{h\lambda_2\gamma}{2} \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x (e^{\gamma x + \delta} - e^{\gamma s + \delta})^2 \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(9)} = i\lambda_1 \gamma \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \Phi_0(x) \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) dx$$

$$H_m^{(10)} = \lambda_2 \gamma \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x (e^{\gamma s + \delta} - e^{\gamma x + \delta})^2 \Psi_0(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(11)} = \gamma \int_{-1}^1 e^{\gamma x + \delta} \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) dx$$

$$H_m^{(12)} = \begin{cases} \frac{\pi(1+4\mu^2)}{2 \operatorname{ch} \mu\pi} Q^{(k)}(x), & m=1 \\ 0, & m \neq 1 \end{cases}$$

$$A_m = \frac{2^{2(2m+1)} [m!]^4}{\pi^2(1+\nu)(3-\nu)[(2m)!]^2 \prod_{k=1}^m \left[1 + \frac{4\mu^2}{(2k-1)^2} \right]}$$

$$N = M_0/h\sqrt{ab} - \operatorname{Re} \left[a_0 \int_{-1}^1 e^{\gamma x} \omega^{-1}(x) dx \right]$$

§ 3. Исследование бесконечной системы

Перейдя к исследованию бесконечных систем линейных уравнений (2.5), положим

$$a_m = m^{1-\varepsilon_0} b_m \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

где ε_0 — фиксированное число, притом $0 < \varepsilon_0 < 1/2$.

Представим систему линейных уравнений (2.5) в виде

$$\begin{aligned} b_m = \frac{A_m}{m} m^{\varepsilon_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\varepsilon_0}} n [R_{m,n}^{(1)} + R_{m,n}^{(2)} - R_{m,n}^{(3)} - R_{m,n}^{(4)}] - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{n^{\varepsilon_0}} n [R_{m,n}^{(5)} - R_{m,n}^{(6)} - R_{m,n}^{(7)} + R_{m,n}^{(8)}] + a_0 [H_m^{(1)} + H_m^{(2)} + H_m^{(3)} - \right. \\ \left. - H_m^{(4)}] - \bar{a}_0 [H_m^{(5)} - H_m^{(6)} + H_m^{(7)} + H_m^{(8)}] - H_m^{(9)} + H_m^{(10)} + c_k H_m^{(11)} + H_m^{(12)} \right\} \\ (m=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пользуясь известным асимптотическим представлением для многочленов Якоби [15]

$$\begin{aligned}
 P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = & \frac{\cos \{ [n + (\alpha + \beta + 1)/2] \theta - (2\alpha + 1) \pi/4 \}}{\sqrt{\pi n} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha + \frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{\beta + \frac{1}{2}}} + \\
 & + 0 \left(n^{-\frac{3}{2}} \right) \text{ при } n \rightarrow \infty
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

пригодным также для комплексных α и β [$\text{Re}(\alpha, \beta) > -1$], известным способом [14, 16, 17] докажем, что

$$\begin{aligned}
 m^{\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|R_{m, n}^{(\varepsilon)}|}{n^{\varepsilon_0-1}} = 0 \left(m^{-\frac{1}{2} + \varepsilon_0} \right), \quad (\varepsilon = 1, 2, \dots, 8) \\
 m^{\varepsilon_0} H_m^{(l)} = 0 \left(m^{-\frac{1}{2} + \varepsilon_0} \right), \quad (l = 1, 2, \dots, 11)
 \end{aligned} \quad m \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что полученная бесконечная система (3.2) квази-полне регулярна для любых значений геометрических и физических параметров, а свободные члены этой системы довольно быстро стремятся к нулю.

Отметим, что приведенное доказательство квазиполной регулярности бесконечной системы (2.5) означает, что в полном метрическом пространстве ограниченных числовых последовательностей соответствующий оператор является сжимающим оператором [18]. Согласно принципу сжатых отображений Банаха [19] отсюда следует, что этот оператор в указанном пространстве имеет единственную неподвижную точку, то есть система (2.5) имеет единственное решение. Последнее, в свою очередь, означает, что исходное разрешающее уравнение (1.12) при граничных условиях (1.14) имеет единственное решение.

§ 4. Некоторые числовые результаты

Несколько подробно рассмотрим первую задачу в частном случае $\alpha = \pi$, когда упругий клин превращается в полуплоскость. Эта задача в рамках известных предположений Мелана [20] рассмотрена во многих работах, в том числе в работе [21].

Тогда из (1.7) можем записать

$$\begin{aligned}
 L_{11}^{(1)}(t) = & \int_0^{\infty} [1 - \text{cth } \pi z] \sin z t dz = \int_0^{\infty} \sin z t dz - \\
 & - \int_0^{\infty} \text{cth } \pi z \sin z t dz = \frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$L_{12}^{(1)}(t) = L_{21}^{(1)}(t) = L_{22}^{(1)}(t) = 0; \quad A^{(1)}(\pi) = T_0/2h, \quad B^{(1)}(\pi) = Q_0/2h$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K_{11}^{(1)}(t) &= \frac{1}{e^t - 1}, & K_{12}^{(1)}(t) &= -\frac{\pi(1-\nu)}{2} \delta(t) \\ K_{21}^{(1)}(t) &= \frac{\pi(1-\nu)}{2} \delta(t), & K_{22}^{(1)}(t) &= \frac{1}{e^t - 1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подставляя значения ядер $K_{ij}^{(1)}(t)$ ($i, j = 1, 2$) из (4.1) в (1.6), получим следующую систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\int_a^b \frac{1}{r_0 - r} \varphi'(r_0) dr_0 - \frac{\pi(1-\nu)}{2} \psi'(r) = \lambda_1 [h\varphi(r) - \varphi_0(r)] \quad (4.2)$$

$$\frac{\pi(1-\nu)}{2} \varphi'(r) + \int_a^b \frac{1}{r_0 - r} \psi'(r_0) dr_0 = \lambda_2 \int_a^r (r_0 - r)^2 [\psi_0'(r_0) - h\psi'(r_0)] dr_0 + c_1^*$$

После замены переменных

$$r = \frac{b-a}{2}(1+x) + a, \quad r_0 = \frac{b-a}{2}(1+s) + a$$

$$\varphi \left[\frac{b-a}{2}(1+x) + a \right] = \Phi(x), \quad \psi \left[\frac{b-a}{2}(1+x) + a \right] = \Psi(x) \quad (4.3)$$

$$\varphi_0 \left[\frac{b-a}{2}(1+x) + a \right] = \Phi_0(x), \quad \psi_0 \left[\frac{b-a}{2}(1+x) + a \right] = \Psi_0(x)$$

система (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\Phi'(s)}{s-x} ds - \frac{\pi(1-\nu)}{2} \Psi'(x) &= \lambda_1^* [h\Phi(x) - \Phi_0(x)] \\ \frac{\pi(1-\nu)}{2} \Phi'(x) + \int_{-1}^1 \frac{\Psi'(s)}{s-x} ds &= \lambda_2^* \int_{-1}^x (s-x)^2 [\Psi_0'(s) - \\ &- h\Psi'(s)] ds + \frac{b-a}{2} c_1^* \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\lambda_1^* = \frac{b-a}{2} \lambda_1, \quad \lambda_2^* = \left(\frac{b-a}{2} \right)^3 \lambda_2$$

Граничные условия для (4.4) будут

$$h\Phi(-1) = 0, \quad h\Phi(1) = T_0; \quad h\Psi(-1) = 0, \quad h\Psi(1) = Q_0 \quad (4.5)$$

$$h \int_{-1}^1 x\Psi'(x) dx = \int_{-1}^1 x\Psi_0'(x) dx = \frac{2M_0 - (a+b)Q_0}{b-a}$$

Система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (4.4) при граничных условиях (4.5) совершенно аналогичным способом, что и выше, сводится к следующей квазивполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений:

$$\alpha_m = -A_m \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n [R_{m,n}^{(1)} + R_{m,n}^{(2)}] + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n [R_{m,n}^{(3)} - R_{m,n}^{(4)}] + \right. \quad (4.6)$$

$$\left. + a_0 [H_m^{(1)} - H_m^{(2)}] - \bar{a}_0 [H_m^{(3)} + H_m^{(4)}] - H_m^{(5)} - H_m^{(6)} + c_1 H_m^{(7)} \right\}$$

$$(m = 1, 2, \dots)$$

где

$$R_{m,n}^{(1)} = \frac{\lambda_1^* h}{4n} \int_{-1}^1 (1-x^2) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) P_{n-1}^{(-\beta, -\alpha)}(x) dx$$

$$R_{m,n}^{(2)} = \frac{\lambda_2^* h}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x (s-x)^2 \omega^{-1}(s) P_n^{(\alpha, \beta)}(s) ds \right] dx$$

$$R_{m,n}^{(3)} = \frac{\lambda_1^* h}{4n} \int_{-1}^1 \omega^2(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) dx$$

$$R_{m,n}^{(4)} = \frac{\lambda_2^* h}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x (s-x)^2 \overline{\omega^{-1}}(s) P_n^{(\beta, \alpha)}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(1)} = \frac{\lambda_1^* h}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x \omega^{-1}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(2)} = \frac{\lambda_2^* h}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x (s-x)^2 \omega^{-1}(s) ds \right] dx \quad (4.7)$$

$$H_m^{(3)} = \frac{\lambda_1^* h}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(4)} = \frac{i_2 \dot{h}}{2} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha; -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x (s-x)^2 \overline{\omega^{-1}}(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(5)} = i_1 \dot{h} \int_{-1}^1 \Phi_0(x) \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha; -\beta)}(x) dx$$

$$H_m^{(6)} = 2i_2 \dot{h} \int_{-1}^1 \omega(x) P_{m-1}^{(-\alpha; -\beta)}(x) \left[\int_{-1}^x (s-x) \Psi_0(s) ds \right] dx$$

$$H_m^{(7)} = \begin{cases} \frac{\pi(b-a)(1+4\mu^2)}{4 \operatorname{ch} \mu\pi}, & m=1 \\ 0, & m \neq 1 \end{cases}$$

Как и выше, здесь положено

$$\Psi'(x) + i\Phi'(x) = \omega^{-1}(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha; \beta)}(x), \quad (-1 < x < 1) \quad (4.8)$$

Из условия (4.5) непосредственно следует, что

$$a_0 = \frac{2}{\pi h \sqrt{(1+\nu)(3-\nu)}} (Q_0 + iT_0)$$

$$\operatorname{Re} a_1 = \frac{8\mu}{1+4\mu^2} \operatorname{Im} a_0 + \frac{8 \operatorname{ch} \mu\pi}{\pi h (1+4\mu^2)} \frac{2M_0 - (a+b)Q_0}{b-a}$$

Следовательно, по формулам (1.7) и (4.3) теперь можем найти выражения тангенциальных и нормальных контактных напряжений

$$\tau(r) = \frac{2}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ a_n \omega^{-1} \left(\frac{2r-a-b}{b-a} \right) P_n^{(\alpha; \beta)} \left(\frac{2r-a-b}{b-a} \right) \right\} \quad (a < r < b) \quad (4.9)$$

$$q(r) = \frac{2}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ a_n \omega^{-1} \left(\frac{2r-a-b}{b-a} \right) P_n^{(\alpha; \beta)} \left(\frac{2r-a-b}{b-a} \right) \right\}$$

Для получения числовых результатов, осуществленных на ЭВМ «Наир-2», было рассмотрено два варианта нагружения стрингера при трех различных случаях компоновки стрингера с полуплоскостью.

В первом варианте принимается, что к стрингеру приложена равномерно распределенная горизонтальная нагрузка интенсивности τ_0 , а во втором варианте — равномерно распределенная вертикальная нагрузка интенсивности q_0 .

В качестве материала стрингера взята легированная сталь с упругими константами $E_s = 2.1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\nu_s = 0.30$, а для полуплоскости — прокатанная медь, прокатанный цинк и свинец с упругими константами со-

ответственно $E=1.1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $0.84 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $0.17 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\nu=0.34$; 0.27 ; 0.42 . Случаи сочетания материалов стрингера с полуплоскостью в указанной последовательности будем именовать случаями I, II, III.

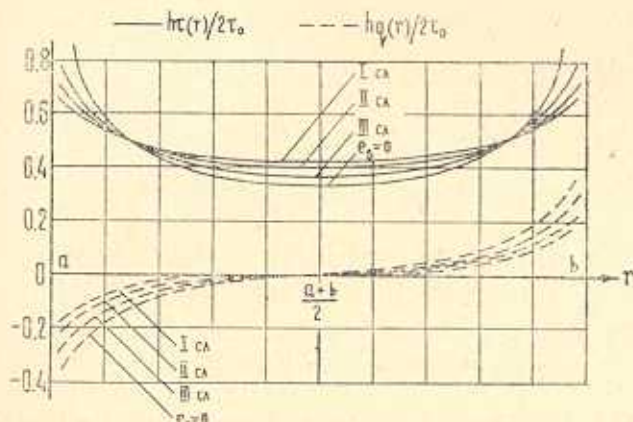
Соответственно этим случаям $e_s = \frac{E}{E_s} = 0.52$; 0.4 ; 0.08 . Для сравнения результатов рассмотрен также случай абсолютно жесткого стрингера, когда $e_s = 0$ ($E_s = \infty$).

Кроме того, во всех рассмотренных случаях принято, что $\frac{b-a}{d} = 6$.

В этих вариантах и случаях были решены соответствующие бесконечные системы и по формулам (4.9) были построены графики тангенциальных и нормальных контактных напряжений под стрингером (фиг. 3, 4), показывающие закономерности их изменения. На фиг. 3 приведены графики напряжений $\tau(r)$ и $q(r)$ при первом варианте. В результате сравнения этих графиков можно сделать следующие выводы:

а) с уменьшением e_s ($\tau_0 = \text{const}$, $q_0 \equiv 0$) коэффициенты интенсивности контактных напряжений в концах стрингера увеличиваются;

б) в каждом из случаев I, II, III значения нормальных напряжений $q(r)$ значительно меньше соответствующих значений тангенциальных напряжений $\tau(r)$.



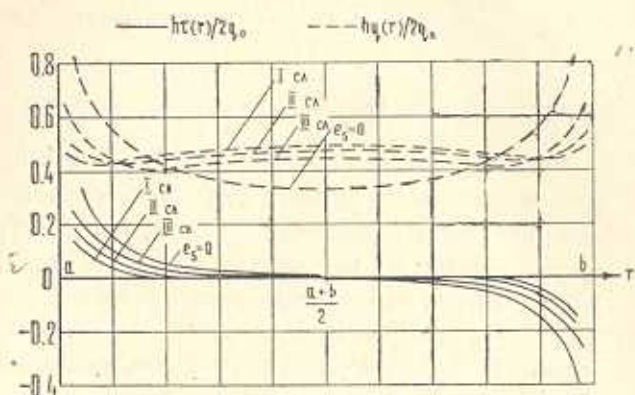
Фиг. 3.

Далее, на фиг. 4 приведены графики контактных напряжений $\tau(r)$ и $q(r)$ для указанных выше e_s при втором варианте. Сопоставление этих графиков показывает, что:

а) с уменьшением e_s ($\tau_0 \equiv 0$, $q_0 = \text{const}$) коэффициенты интенсивности напряжений в концах стрингера опять-таки увеличиваются, притом на середине участка контакта $q(r)$ имеет максимум;

б) в каждом из случаев I, II, III значения тангенциальных напряжений $\tau(r)$ значительно меньше соответствующих значений нормальных напряжений $q(r)$;

в) по мере уменьшения e_s распределение тангенциальных контактных напряжений при первом варианте нагружения и нормальных контактных напряжений при втором варианте нагружения стрингера заметно приближается к равномерному распределению.



Фиг. 4.

Результаты работы доложены на Всесоюзной конференции по смешанным задачам механики деформируемых тел в городе Ростове-на-Дону в 1977 г.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 15 XI 1977

Ս. Մ. ՄԻՒԹԱՐՅԱՆ, Կ. Գ. ԳՈՒԼՅԱՆ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԱՄԲԱՅՈՒՄՆԵՐՈՎ ՍԵՓԻ ՀԱՄԱՐ ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ
ԽՆԳԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒՄՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԱՔԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկված են վերադրի տեսքով վերջավոր ամրացումից կամայական անկյան բացվածքով սեպածև առաձգական սալին բեռի փոխանցման երկու կոնտակտային խնդիրներ: Ենթադրված է, որ առաջին խնդրում սեպի մի ձգրը ապառ է արտաքին լարումներից, իսկ երկրորդում՝ այն ամրացված է: Նշված խնդիրները մաթեմատիկորեն ձևակերպված են որոշակի եզրային պայմաններով ինտեգրո-դիֆֆերենցիալ հավասարումների սխեմաների տեսքով: Այնուհետև Յակոբիի օրթոգոնալ բազմանդամների օգնությամբ այդ սխեմաները բերված են թվադիլիովին ուղղույթի գծային հավասարումների անվերջ սխեմաների: Առաջին խնդրի համար ստացված են թվային արդյունքներ, որոնց հիման վրա կառուցված են շոշափող և նորմալ կոնտակտային լարումների բացատրական գծազրեքեր:

ON THE SOLUTION OF TWO CONTACT PROBLEMS
FOR WEDGE WITH ELASTIC STIFFENERS

S. M. MKHITARIAN, K. G. GULIAN

S u m m a r y

Two contact problems on the transfer of load from an elastic finite stiffener to a wedge-shaped elastic plate with an arbitrary aperture angle are considered.

These problems are mathematically formulated as a system of singular integral-differential equations in definite boundary conditions. Then with the help of the Jacobi orthogonal polynomials this system is reduced to a quasi-regular infinite system of linear equations.

For the first problem numerical results are obtained and on the basis of these results graphs of tangent and normal contact stresses are drawn.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1967, т. 20, № 1.
2. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина. Изв. АН СССР, МТТ, 1967, № 2.
3. Нуллер Б. М. Некоторые контактные задачи для упругого бесконечного клина. ПММ, 1972, т. 36, № 1.
4. Нуллер Б. М. Деформация упругого клина, подкрепленного балкой. ПММ, 1974, т. 38, № 5.
5. Нуллер Б. М. Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменного сечения. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5.
6. Нуллер Б. М. О деформации упругой клиновидной пластинки, подкрепленной стержнем переменной жесткости и об одном методе решения смешанных задач. ПММ, 1976, т. 40, № 2.
7. Развитие теории контактных задач в СССР. М., Изд-во «Наука», 1976.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во «Наука», 1966.
9. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., Изд-во «Наука», 1968.
10. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Изд-во «Наука», 1968.
11. Попов Г. Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, № 3.
12. Карпенко Л. Н. Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби. ПММ, 1966, т. 30, № 3.
13. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
14. Arutunian N. K., Mkhitarian S. M. Some contact problems for a semiplane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity. Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordhoff Publishing, 1971, p. 3-20.
15. Бейтмен Г., Эрлейн А. Высшие трансцендентные функции. ч. 1, М. Изд-во «Наука», 1973.

16. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 2.
17. Гулян К. Г. Передача нагрузки от стрингера конечной длины к двум клиновидным упругим пластинам. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 4.
18. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, № 5.
19. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., Изд-во «Наука», 1965.
20. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ingr.-Arch, 1933, Bd. 3, Heft 2, S. 123.
21. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, № 4.
22. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., изд-во физ.-мат. литературы, 1962.
23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. т. 2. М., Изд-во «Наука», 1970.