

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ, В. М. СМОЛЬСКИЙ

К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ МНОГОСЛОЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

Задачу об оптимальном проектировании конструкций рассматривали многие исследователи. В обзорных статьях [1, 2] подробно изложено состояние вопроса вплоть до 1968 г. (в основном, по иностранным источникам). Хорошим обзором работ отечественных исследователей является доклад [3]. Исследования последних лет отражены в работах [4, 5].

В работе [6] была применена механика разрушения при оптимальном конструировании многослойных панелей. Было показано, что оптимальные по критерию удельной вязкости разрушения панели отличаются от панелей, оптимальных по критерию удельной прочности. Используя критерии механики разрушения, удается полнее учесть способность поверхности раздела удерживать развитие трещины в отдельном слое многослойной конструкции.

В данной работе решена задача оптимального проектирования многослойной панели по критерию вязкости разрушения. Существенным отличием этой задачи от задач оптимизации по другим критериям прочности является зависимость вязкости разрушения каждого листа многослойной панели от его толщины.

В настоящей работе считаются заданными набор материалов и толщина панели; с помощью принципа равнопрочности задача сводится к нелинейной задаче оптимизации с одним ограничением. Записывая необходимые условия экстремума в форме Лагранжа и разрешая численно систему полученных уравнений, получаем зависимость всех характеристик оптимальной панели (вязкости разрушения и толщины панели, толщины каждого слоя панели) от множителя Лагранжа λ , введенного ограничением. Ввиду монотонности всех этих характеристик по λ нетрудно при фиксированном значении одной из них определить оптимальные значения других.

Основой постановки задачи оптимального проектирования конструкции по критерию вязкости разрушения является решение задачи об определении коэффициента интенсивности напряжений в окрестности кончика трещины, наиболее опасной для данной конструкции. Для многослойной панели такой трещиной является поперечная сквозная трещина, пересекающая все слои панели.

В наиболее общей постановке расчет многослойной пластины с поперечной трещиной проведен Бадалянсом и Си [7]. Вычисленный ими коэффициент интенсивности напряжений можно использовать в рамках механики разрушения [8].

Однако, этот прямой расчет трудно применить для оптимального проектирования многослойных панелей по следующим причинам:

а) в момент начала неустойчивого развития фронт трещины является криволинейным, в то время как в указанном расчете решается задача срагивания прямолинейного фронта трещины;

б) результаты расчета представлены в виде графических зависимостей коэффициента интенсивности напряжений от упругих постоянных и толщины отдельного слоя пластины, которые практически невозможно использовать при оптимальном проектировании.

В работе [6] для симметричной панели с непроскальзывающими слоями на основе принципа равнопрочности была выведена формула

$$K_C = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n K_C^{(i)} h_i \quad \left(h = \sum_{i=1}^n h_i \right) \quad (1)$$

где $K_C^{(i)}$, h_i , K_C , h — вязкость разрушения и толщина i -ого слоя и всей панели соответственно. Как уже отмечалось, для каждого слоя вязкость разрушения $K_C^{(i)}$ зависит от его толщины h_i . Эту зависимость можно определить из эксперимента на отдельном слое, ее можно достаточно точно аппроксимировать выражением [9]

$$K_C^{(i)} = \left[c_i + d_i \frac{1}{1 + 2 \left(\frac{h_i}{h_{i0}} - 1 \right)^2} \right]^{1/2}, \quad h_i \geq h_{i0} \\ (c_i = [K_{IC}^{(i)}]^2, \quad d_i = [K_{C0}^{(i)}]^2 - c_i) \quad (2)$$

$$K_{IC}^{(i)} = \lim_{h_i \rightarrow \infty} K_C^{(i)}(h_i), \quad K_{C0}^{(i)} = K_C^{(i)}(h_{i0}) = \max_{h_i} K_C^{(i)}(h_i)$$

Заметим, что аналитическое выражение (2) недостаточно точно приближает реальную кривую при $h \leq h_{i0}$ (в этой области не имеется достаточного количества экспериментов для ее аналитического описания); однако, это для нас несущественно, поскольку мы будем считать, что

$h \geq \sum_{i=1}^n h_{i0}$. Важно лишь, чтобы это выражение было возрастающим в области $h_i < h_{i0}$.

Требуется максимизировать выражение (1) по переменным h_i и n ($i = 1, 2, \dots, n$). Однако среди всех многослойных панелей решением этой задачи является однослойная панель из материала, у которого величина $K_{C0}^{(i)}$ наибольшая и оптимальной ее толщиной является h_{i0} [6]. Задача оптимального проектирования возникает тогда, когда один параметр задан или ограничен. Наиболее простым представляется ввести ограничение типа равенства на толщину панели. Чтобы выделить задачу по непрерывным переменным (которая нас в дальнейшем и будет интересовать, так как дискретная задача решена в [6]), будем дополнительно считать, что для каждого слоя $h_i < 2h_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Эти ограничения не будем вводить в список ограничений задачи с целью ее упрощения; их нетрудно проверить после определения решения. Общее решение задачи можно получить

объединением дискретного решения и локального непрерывного решения, построенного ниже. В результате приходим к следующей задаче:

$$\max_{h_i} \sum_{i=1}^n K_C^{(i)}(h_i) h_i, \quad \sum_{i=1}^n h_i = h > \sum_{i=1}^n h_{i0} \quad (3)$$

Составим функцию Лагранжа

$$F(h_i, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left[\left(c_i + d_i \frac{1}{1 + 2 \left(\frac{h_i}{h_{i0}} - 1 \right)^2} \right)^{1/2} - \lambda \right] h_i$$

$$(\lambda \geq 0)$$

и, переходя к новым безразмерным переменным

$$x_i = \frac{h_i}{h_{i0}} - 1 \quad (x_i \geq 0)$$

запишем систему необходимых условий для определения x_i и λ

$$c_i + \frac{d_i(1 - 2x_i)}{(1 + 2x_i^2)^2} = \lambda \left(c_i + \frac{d_i}{1 + 2x_i^2} \right)^{1/2} \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n h_{i0}(1 + x_i) = h \quad (5)$$

Рассмотрим уравнение относительно x при постоянных c, d, λ

$$c + \frac{d(1 - 2x)}{(1 + 2x^2)^2} = \lambda \left(c + \frac{d}{1 + 2x^2} \right)^{1/2} \quad (6)$$

Поскольку производная левой части при $x = 0$ отрицательна, а правой — равна нулю, то для существования близкого к нулю положительного корня левая часть уравнения (6) должна быть больше правой при $x = 0$, то есть при $\lambda < \sqrt{c + d}$. При $x = 1$ правая часть уравнения (6) больше левой, если выполняется следующее неравенство:

$$\lambda \sqrt{c + \frac{d}{3}} > c - \frac{d}{9}$$

Применяя эти рассуждения к системе (4), получаем следующую оценку:

$$\lambda_0 = \max_{1 \leq i < n} \frac{c_i - \frac{d_i}{9}}{\sqrt{c_i + \frac{d_i}{3}}} \leq \lambda \leq \min_{1 \leq i < n} \sqrt{c_i + d_i} = \lambda_1 \quad (7)$$

Заметим, что при λ , приближающемся к λ_0 , в оптимальной панели начинает резко расти толщина того слоя, у которого величина $K_{IC}^{(i)}$ наибольшая, а толщины остальных слоев примерно не меняются. Поэтому оптимальное решение для $\lambda \leq \lambda_0$ можно построить по решению для $\lambda = \lambda_0$.

Все x_i и h являются монотонными функциями λ , поэтому поиск набора неизвестных x_i , соответствующих заданному λ , можно проводить итерациями, начиная с оптимального набора значений x_i , полученных по предыдущему λ . Общая схема получения зависимостей $x_i(\lambda)$, $h(\lambda)$, $K_C(\lambda)$ такова:

1. Уменьшаем λ на постоянную величину $\Delta\lambda$, начиная со значения $\lambda = \lambda_0$;

2. Для всех i , начиная со значения x_i , соответствующего предыдущему значению λ (перед началом расчета все $x_i = 0$), определяем такое значение x_i , при котором меняет знак следующее выражение:

$$f(x_i) = c_i + \frac{d_i(1-2x_i)}{(1+2x_i)^2} - \lambda \left(c_i + \frac{d_i}{1+2x_i^2} \right)^{1/2}$$

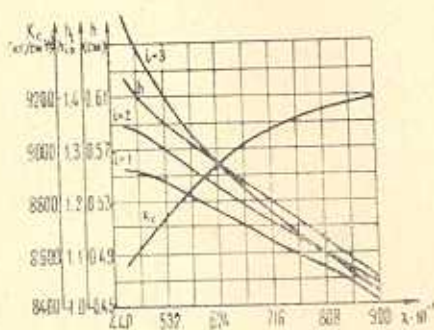
3. По формуле (5) и видоизмененной формуле (3)

$$K_C = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \left(c_i + \frac{d_i}{1+2x_i^2} \right)^{1/2} h_{i0} (1+x_i)$$

определяем K_C и h для заданного λ ; затем вся процедура повторяется до тех пор, пока величина λ не станет равной λ_0 .

На фиг. 1 представлены графики расчета оптимальных размеров симметричной шестислойной панели (по два одинаковых слоя одного материала; все величины приводятся для половины панели) из материалов:

алюминиевый сплав 7075 Т6 ($h_0 = 0.26$ см, $K_{IC} = 4200$ кг/см^{3/2}, $K_{CV} = 9165$ кг/см^{3/2}); титановый сплав ВТ14 ($h_0 = 0.1$ см, $K_{IC} = 5495$ кг/см^{3/2}, $K_{CV} = 9420$ кг/см^{3/2}); сталь ВКС-1 ($h_0 = 0.1$ см, $K_{IC} = 6300$ кг/см^{3/2}, $K_{CV} = 9030$ кг/см^{3/2}). Из графиков видно, что при $\lambda < \lambda_0$ действительно растет толщина только слоя из третьего материала.



Фиг. 1.

Чтобы определить оптимальные толщины каждого слоя при заданной общей толщине, по графику $h(\lambda)$ определяем соответствующее λ , затем толщины каждого слоя и K_C .

Полученное решение является хорошим приближением к решению задачи проектирования многослойной панели заданного веса максимальной вязкости разрушения. Для этого в перечисленные характеристики надо включить функцию

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^n \rho_i h_{i0} (1 + x_i)$$

и определять λ по заданному P .

Заметим, что преимущество многослойных панелей перед однослойными, прежде всего, сказывается в достижении большой величины вязкости разрушения по отношению к внутренним трещинам даже при относительно хрупких составляющих. Различие между поверхностной и сквозной трещиной в многослойных материалах весьма существенно, что подтверждается в частности, экспериментами Тэйлора [10].

Московский авиационный
институт

Поступила 27 IV 1977

Գ. Պ. ՉԵՐԵՊԱՆՈՎ, Վ. Մ. ՍՄՈԼՍԿԻ

ԲԱԶՄԱՆԵՐՏ ՊԱՆԵԼՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՆԱԳՑՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ն փ ու մ

Քայքայման մաթուցիկության կրիտերիայով լուծվել է բազմաշերտ պանելի օպտիմալ նախագծման խնդիրը: Համարվում են տրված նյութերի հազարաժույց և պանելի հաստությունը: Հավասար ամրության սկզբունքի օգնությամբ խնդիրը բերվել է մի սահմանափակումով օպտիմիզացիայի ու գծային խնդրին:

Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմաններից ստացվել են օպտիմալ պանելի հաստությունից առանձին շերտերի հաստությունների կապակցությունները:

ON OPTIMAL DESIGN OF A MULTILAYERED PANEL

G. P. CHEREPANOV, V. M. SMOLSKY

S u m m a r y

In this paper, on the basis of the uniform strength principle, the problem of optimal design of a multilayered panel is reduced to that of a conventional extremum; the latter being solved by the method of Lagrange's multiplier.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Wasiutynski Z., Brandt A. The present State of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures. Applied Mechanics Reviews, 1963, vol. 10, No. 5, pp. 341—350. *
2. Sheu C. Y., Prager W. Recent Developments in Optimal Structural Design. Applied Mechanics Reviews, 1968, vol. 21, No. 10, pp. 985—992.

3. Васильев В. В. Оптимальное проектирование пластинок и оболочек. Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск. М., «Наука», 1970.
4. Second National Symposium on Computerized Structural Analysis and Design. Washington, G. Washington Univ., 1976.
5. Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М., «Наука», 1976, 267 с.
6. Черепанов Г. П., Смольский В. М., Таги-Заде А. Г. Об оптимальном проектировании некоторых инженерных материалов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, XXIX, № 3, 51—62.
7. Badaliane R., Sih G. C. An Approximate Three-Dimensional Theory of Layered Plates Containing Through Thickness Cracks. Engineering Fracture Mechanics, 1975, vol. 7, No. 1, pp. 1—22.
8. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974, 640 с.
9. Черепанов Г. П., Смольский В. М. К расчету толщины панели максимальной долговечности. Изв. ВУЗов. Авиационная техника, 1977, № 4.
10. Taylor L. G., Ryder D. A. The Fatigue and Fracture Toughness of Laminated Composites Based on 7075-T6 Aluminium Alloy. Composites, 1976, vol. 7, No. 1, pp. 27—33.