ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա XXXI, № 3, 1978 Механика

А. С. ЗИЛЬБЕРГЛЕЙТ, И. Н. ЗЛАТИНА

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Динамические контактные задачи для упругого полупространства при отсутствии сцепления между штампом и основанием рассматривались ранее в работах Н. М. Бородачева, В. Г. Буряка, A. O. Awojobi and P. Grootenhuis; Karasudhi et al. [1—5]. Для решения этих задач использовались, как правило, два метода: сведение поставленной задачи к интегральному уравнению Фредгольма I рода [1, 2] или к парным интегральным уравнениям [3—5].

В работе [2], где решается плоская задача, было построено приближенное решение, основанное на аппроксимации ядра уравнения Фредгольма. В статье [1] то же интегральное уравнение Фредгольма I рода исследовалось методом, восходящим к Зоммерфельду [6]. Полученная при помощи этого метода двучленная низкочастотная асимптотика не может быть, по-видимому, улучшена при помощи регулярной процедуры.

В работах [1, 4, 5] поставленные динамические задачи для полупространства сводились к парным интегральным уравнениям, решение которых строилось с помощью известного метода [7, 8], развитого применительно к статическим проблемам. В работе [4] авторы используют низкочастотное разложение весовой функции, входящей в парные уравнения задачи, и строят два первых члена разложения. Этот метод вряд ли корректен, так как используемые приближения не являются равномерными, о чем свидетельствует, например, тот факт, что слагаемые, содержащие логарифмы частоты, в плоском случае отсутствуют. Кроме того, заметим, что интегральные уравнения Фредгольма II рода, к которым сводятся парные интегральные уравнения в [3, 5], не допускают эффективного асимптотического решения для низких частот.

В связи с этим представляется интересным рассмотрение решения плоской и осесимметричной контактной задачи, которое основано на сведении парных интегральных уравнений к интегральному уравнению Фредгольма II рода. Последнее, в свою очередь, решается для случая малого параметра ka (k — одно из волновых чисел, a — характерный параметр штампа в плане).

Ряд родственных задач о динамическом контакте полуплоскости с упругими накладками изучен в работах [9, 10].

1. Рассмотрим сначала случай, когда на упругом полупространстве расположен жесткий ленточный штамп под действием силы $Pe^{i\omega t}$, направленной вдоль оси z. В предположении, что трение между штампом и основа-

нием отсутствует, для амплитудных значений вектора перемещений и тензора напряжений имеем следующие граничные условия:

$$w\big|_{z=0} = \delta, \qquad 0 < x < a \tag{1.1}$$

$$\sigma_z\big|_{z=0} = 0, \qquad a < x < \infty \tag{1.2}$$

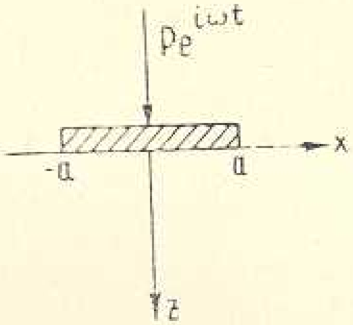
$$\tau_{xz}\big|_{z=0} = 0, \qquad 0 < x < \infty \tag{1.3}$$

Здесь δ—неизвестная амплитуда колебаний штампа.

Решение динамических уравнений будем искать согласно [11] в потенциалах Гельмгольца—Ламэ F и Φ, которые связаны с u и w с помощью соотношений

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{1.4}$$

$$w = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{1.5}$$



Фиг. 1.

и удовлетворяют уравнениям Гельмгольца с волновыми числами k_1 и k_2:

$$\Delta F + k_1^2 F = 0 \tag{1.6}$$

$$\Delta \Phi + k_2^2 \Phi = 0 \tag{1.7}$$

Здесь $k_1^2 = \dfrac{\omega^2 d}{G}\dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$; $k_2^2 = \dfrac{\omega^2 d}{G}$; ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, d — плотность.

Решение уравнений (1.6), (1.7) представим в виде интегралов

$$F = \int_{\Gamma_+} \gamma_1^{-1} A_1(\lambda)\, e^{-\gamma_1 z} \cos\lambda x\, d\lambda \tag{1.8}$$

$$\Phi = \int_{\Gamma_+} A_2(\lambda)\, e^{-\gamma_2 z} \sin\lambda x\, d\lambda \tag{1.9}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$$

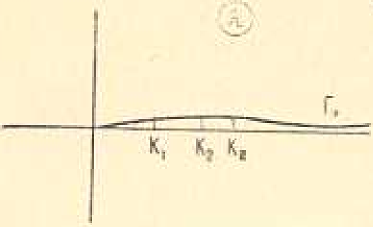
$A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$ — неизвестные функции, имеющие особенности: точки ветвления при $\lambda = k_1$, k_2 и рэлеевский полюс $\lambda = k_R$; контур Γ_+ (фиг. 2) выбран с учетом этих особенностей и условия Зоммерфельда [6].

Подставляя (1.8) и (1.9) в граничные условия (1.1)—(1.3), приходим к следующим парным уравнениям:

$$\int_{\Gamma_+} C(\lambda)\,[1 + \rho(\lambda)] \cos\lambda x\, d\lambda = -\theta^{-1}\delta, \qquad 0 < x < a \tag{1.10}$$

$$\int\limits_{\Gamma_+} \gamma_1(\lambda)\, C(\lambda) \cos \lambda x d\lambda = 0, \qquad a < x < \infty \tag{1.11}$$

где $\rho(\lambda) = \dfrac{2k_2^2 \gamma_1^2 - \theta\left[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 - 4\lambda^2 \gamma_1 \gamma_2\right]}{\theta\left[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 - 4\lambda^2 \gamma_1 \gamma_2\right]}$, причем $\rho = O(\lambda^{-2})$ при $\lambda \to \infty$.



Фиг. 2.

Кроме того,

$$\theta = -2(1 - \nu) \tag{1.12}$$

$$A_1(\lambda) = -\frac{2\lambda^2 - k_2^2}{k_2^2} \theta \left[1 + \rho(\lambda)\right] C(\lambda)$$
$$A_2(\lambda) = \frac{2\lambda}{k_2^2} \theta \left[1 + \rho(\lambda)\right] C(\lambda) \tag{1.13}$$

Здесь важно отметить одну существенную особенность плоской динамической задачи: при построении решения парных интегральных уравнений необходимо учитывать, что в плоской статической задаче перемещения, возникающие в полуплоскости под действием неуравновешенной нагрузки на границе, имеют логарифмическую особенность на бесконечности [12]. Эту логарифмическую часть следует выделить особо в решении динамической задачи, если частоты колебаний невелики.

Согласно методу, развитому для аналогичного электродинамического случая в работе [13], будем искать решение уравнений (1.10), (1.11) в виде

$$C(\lambda) = \varkappa \gamma_1^{-1} J_0(a\gamma_1) + ik_1 \int\limits_0^a t \varphi(t)\, J_1(t\gamma_1)\, dt \tag{1.14}$$

Здесь $\varkappa$ — неизвестная пока постоянная, $J_0(z)$, $J_1(z)$ — функции Бесселя.

Не останавливаясь на подробностях решения парных уравнений, которые хорошо известны [13, 14], отметим лишь разрывные интегралы, лежащие в основе решения:

$$\int\limits_0^\infty J_0\left(t\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right) \cos \lambda x d\lambda = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2 - x^2}}{\sqrt{t^2 - x^2}}, & x < t \\ 0, & x > t \end{cases} \tag{1.15}$$

$$t \int\limits_k^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_1\left(t\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right) \cos \lambda x d\lambda =$$
$$= \begin{cases} \cos kx, & x < t \\ \cos kx - \dfrac{x \cos k\sqrt{x^2 - t^2}}{\sqrt{x^2 - t^2}}, & x > t \end{cases} \tag{1.16}$$

Эти формулы позволяют свести парные уравнения к двум интегральным уравнениям Фредгольма II рода для $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, с которыми $\varphi(t)$ связана соотношением

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varkappa\varphi_2(t) \tag{1.17}$$

Итак,

$$\varphi_n(t) = f_n(t) - \int\limits_0^a K(s, t)\, s\varphi_n(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \quad n = 1, 2 \tag{1.18}$$

$$f_1(t) = -G^{-1}\delta J_1(ik_1 t), \quad f_2(t) = -\frac{1}{ik_1}\int\limits_{\Gamma_+}[1 + \rho(\lambda)]\, J_0(a\gamma_1)\, J_1(t\gamma_1)\, d\lambda \tag{1.19}$$

$$K(s, t) = \int\limits_0^{k_1}\gamma_1 J_1(s\gamma_1)\, J_1(t\gamma_1)\, d\lambda + \int\limits_{k_1}^{\infty}(\gamma_1 - \lambda)\, J_1(s\gamma_1)\, J_1(t\gamma_1)\, d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_+}\gamma_1\rho(\lambda)\, J_1(s\gamma_1)\, J_1(t\gamma_1)\, d\lambda \tag{1.20}$$

Для окончательного определения $\varphi(t)$ остается найти постоянную $\varkappa$. Полагая $z = 0$ в уравнении (1.10) и подставляя туда выражение для $C(\lambda)$, получим

$$\varkappa = -\frac{G^{-1}\delta + ik_1\int\limits_0^a \varphi_1(t)\, X dt}{Z + ik_1\int\limits_0^a \varphi_2(t)\, X dt} \tag{1.21}$$

$$Z = \int\limits_{\Gamma_+}[1 + \rho(\lambda)]\, \gamma_1^{-1} J_0(a\gamma_1)\, d\lambda \tag{1.22}$$

$$X = \int\limits_{\Gamma_+}[1 + \rho(\lambda)]\, J_1(t\gamma_1)\, d\lambda \tag{1.23}$$

Ряд величин, представляющих особый интерес, можно выразить непосредственно через функцию $\varphi(t)$. Так, из (1.8), (1.9), (1.3), (1.4) при помощи (1.15) получаем формулу для контактного напряжения

$$\sigma_z(x, 0) = -2G\left\{[\varkappa - ik_1 a\varphi(a)]\frac{\operatorname{ch} k_1\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \right.$$

$$\left. + k_1\int\limits_x^a [t\varphi(t)]'\frac{\operatorname{ch} k_1\sqrt{t^2 - x^2}}{\sqrt{t^2 - x^2}}\, dt\right\}, \quad 0 < x < a \tag{1.24}$$

откуда следует выражение для коэффициента интенсивности напряжений

$$K_I = \lim_{x \to a-0} \sqrt{2(a-x)}\,\sigma_z(x,\,0) = \frac{2G\,[ik_1 a\varphi(a) - \varkappa]}{\sqrt{a}} \tag{1.25}$$

Выражение (1.24) позволяет также замкнуть решение, исключив неизвестное смещение штампа δ, для которого из уравнения движения штампа получаем следующее выражение:

$$Q - \omega^2 M\delta = P$$

$$Q = -2\pi G\left\{[\varkappa - ik_1 a\varphi(a)]\,I_0(k_1 a) + k_1\int_0^a [t\varphi(t)]'\,I_1(k_1 t)\,dt\right\} \tag{1.26}$$

где M — масса штампа, приходящаяся на единицу его длины, Q — реакция полуплоскости, $I_0(z)$, $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

2. Полученное решение позволяет эффективно построить асимптотические разложения искомых величин в случае низких частот ($k_1 a \to 0$). Интегралы, входящие в (1.18)—(1.21) и имеющие бесконечный предел интегрирования, необходимо преобразовать к конечному промежутку интегрирования, чтобы найти их асимптотику. Эта трудность преодолевается использованием методики [13], модифицированной подходящим для нашего случая образом.

Так, например,

$$\int_{\Gamma_+} \rho(\lambda)\,\gamma_1\,J_1(s\gamma_1)\,J_1(t\gamma_1)\,d\lambda =$$

$$= \int_0^{k_1} \overline{\gamma}_1\,\frac{2\overline{\gamma}_1^2 k_2^2 - \theta[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 + 4\lambda^2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2]}{\theta[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 + 4\lambda^2\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2]}\,J_1(is\overline{\gamma}_1)\,Y_1(it\overline{\gamma}_1)\,d\lambda +$$

$$+ 8i\int_{k_1}^{k_2} \frac{k_2^2\lambda^2\gamma_1^4\overline{\gamma}_2\,J_1(s\gamma_1)\,J_1(t\gamma_1)\,d\lambda}{\theta[(2\lambda^2 - k_2^2)^4 + 16\lambda^2\gamma_1^2\overline{\gamma}_2^2]} + 8\int_{k_1}^{k_2} \frac{k_2^2\lambda^2\gamma_2\gamma_1^4\,J_1(s\gamma_1)\,Y_1(t\gamma_1)}{\theta[(2\lambda^2 - k_1^2)^4 + 16\lambda^2\gamma_1^2\overline{\gamma}_2^2]}\,d\lambda -$$

$$- \pi i\,\mathrm{Res}[\gamma_1\rho(\lambda)\,J_1(s\gamma_1)\,J_1(t\gamma_1)]\big|_{\lambda = k_R}$$

$$0 \leqslant s < t \leqslant a; \quad \overline{\gamma}_n = \sqrt{k_n^2 - \lambda^2}, \quad n = 1,\,2$$

k_R - решение уравнения Релея и определяется по формуле [16]

$$k_R = \frac{1+\nu}{0.862 + 1.14\nu}\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}\,k_1$$

В дальнейшем для удобства перейдем к безразмерным переменным

$$\lambda = k_1 u, \quad s = a\sigma, \quad t = a\tau, \quad \varphi(t) = \tilde{\varphi}(\tau)$$
$$\varphi_n(t) = \tilde{\varphi}_n(\tau), \quad n = 1, 2; \quad \varepsilon = k_1 a \tag{2.1}$$

Необходимые разложения цилиндрических функций получаются при помощи интегрального представления

$$J_1(i\varepsilon\sigma\eta)\, Y_1(i\varepsilon\tau\eta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} Y_0\left[i\varepsilon\eta(\sigma^2 + \tau^2 - 2\sigma\tau\cos\xi)^{1/2}\right]\cos\xi\, d\xi$$

и разложения в ряд $Y_0(z)$.

В результате ядро интегральных уравнений (1.18) представляется рядом:

$$K(s, t) = \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(\sigma, \tau) + b_n(\sigma, \tau)\,\varepsilon^2 \ln\varepsilon\right]\varepsilon^{2n} \tag{2.2}$$

где коэффициенты определяются непосредственно из (1.19).

Опуская, ввиду громоздкости, их общие выражения, приведем значения первых трех:

$$a_0(\sigma, \tau) = -\alpha_0\sigma\tau^{-1}; \quad a_1(\sigma, \tau) = \sigma\tau\left[\alpha_1 + \alpha_2\ln\tau\right] + \alpha_3\sigma^3\tau$$
$$b_0(\sigma, \tau) = \beta_0\sigma\tau; \quad 0 \leqslant \sigma < \tau \leqslant 1; \quad a_n,\ b_n(\sigma, \tau) = b_n,\ b_n(\tau, \sigma) \tag{2.3}$$

причем постоянные α_n, β_n являются квадратурами от весовой функции $\rho(\lambda)$ (1.12) и зависят лишь от коэффициента Пуассона ν. Для случая $\nu = 0.3$ имеем:

$$\alpha_0 = 0.0519; \quad \beta_0 = -1.3510; \quad \alpha_1 = 0.0162 + i\,0.7273;$$
$$\alpha_2 = -0.0658; \quad \alpha_3 = 0.1061 \tag{2.4}$$

причем и далее все числовые выражения относятся к случаю $\nu = 0.3$.

Свободные члены уравнения (1.20) также представляются рядами по параметру ε:

$$f_1(t) = \delta\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\tau)\,\varepsilon^{2n}; \qquad c_n(\tau) = \frac{(-i\tau)^{n+1}}{\delta 2^{n+1}\, n!\,(n+1)!} \tag{2.5}$$

$$f_2(t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left[p_n(\tau) + q_n(\tau)\ln\varepsilon\right]\varepsilon^{2n}$$

$$p_0(\tau) = l_1\tau; \quad q_0(\tau) = l_0\tau; \quad l_0 = -i\,0.1886; \quad l_1 = 0.2316 - i\,1.1980$$
$$p_1(\tau) = l_2\tau^3; \quad q_1(\tau) = l_3\tau^3$$

Разыскивая, наконец, $\bar{\varphi}_n(\tau)$, $n = 1, 2$, в виде разложений

$$\bar{\varphi}_1(\tau) = \delta\varepsilon \left[\Phi_{0,0}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \sum_{m=0}^{n-1} \Phi_{m,n}(\tau) \ln^m \varepsilon \right]$$

$$\bar{\varphi}_m(\tau) = \varepsilon \left[\psi_{1,0}(\tau) \ln \varepsilon + \psi_{0,0}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \sum_{m=1}^{n-1} \psi_{m,n}(\tau) \ln^m \varepsilon \right] \tag{2.6}$$

и подставляя (2.2)—(2.6) в уравнения Фредгольма (1.18), определяем искомые коэффициенты (2.6) через известные величины, входящие в (2.2)—(2.5):

$$\Phi_{0,0}(\tau) = C_0(\tau); \quad \Phi_{0,n}(\tau) = C_n(\tau) - \int_0^1 \sigma d\sigma \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{0,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau)\, d\sigma$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

$$\Phi_{m,n}(\tau) = -\int_0^1 \sigma d\sigma \left[\sum_{k=m+1}^{n-1} \Phi_{m,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=m}^{n-2} \Phi_{m-1,k}(\sigma)\, b_{n-k-2}(\sigma, \tau)\, d\sigma \right]$$

$$n = 1, 2, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\psi_{1,0}(\tau) = q_0(\tau); \quad \psi_{0,0}(\tau) = p_0(\tau) \tag{2.7}$$

$$\psi_{0,n}(\tau) = p_n(\tau) - \int_0^1 \sigma d\sigma \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{0,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau); \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\psi_{1,n}(\tau) = q_n(\tau) - \int_0^1 \sigma d\sigma \left[\psi_{1,0}(\sigma)\, a_{n-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=2}^{n-1} \psi_{1,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-2} \psi_{0,k}(\sigma)\, b_{n-k-2}(\sigma, \tau) \right]; \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\psi_{2,n}(\tau) = -\int_0^1 \sigma d\sigma \left[\sum_{k=3}^{n-1} \psi_{2,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=2}^{n-2} \psi_{1,k}(\sigma)\, b_{n-k-2}(\sigma, \tau) + \right.$$

$$\left. + \psi_{1,0}\, b_{n-2}(\sigma, \tau) \right]; \quad n = 3, 4, \ldots$$

$$\psi_{m,n}(\tau) = -\int_0^1 \sigma d\sigma \left[\sum_{k=m+1}^{n-1} \psi_{m,k}(\sigma)\, a_{n-k-1}(\sigma, \tau) + \sum_{k=m}^{n-2} \psi_{m-1,k}(\sigma)\, b_{n-k-2}(\sigma, \tau) \right]$$

$$n = 4, 5, \ldots; \quad m = 3, 4, \ldots, n-1;$$

причем пустые суммы и величины с отрицательными индексами принимаются равными нулю.

В частности, имеем

$$\bar{\varphi}_1(\tau) = -\frac{i\delta}{2\theta}\varepsilon\tau\left[1 - \frac{1}{4}(\alpha_0\tau^2 + i\tau - 2\alpha_0)\varepsilon^2 - \frac{1}{5}\beta_0\tau^3\varepsilon^4\ln\varepsilon + O(\varepsilon^4)\right]$$

$$\bar{\varphi}_2(\tau) = \varepsilon\tau\Big\{l_0\ln\varepsilon + l_1 + \left(l_2\tau^2 + \frac{1}{4}l_0\beta_0\right)\varepsilon^2\ln\varepsilon +$$

$$+\left[\left(l_1 - \frac{1}{4}\alpha_0 l_1\right)\tau^2 + \frac{1}{2}\alpha_0 l_1\right]\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4\ln\varepsilon)\Big\} \tag{2.8}$$

Найденные формулы позволяют установить вид разложений для всех искомых величин. Так, комплексная амплитуда колебаний штампа представляется разложением

$$\delta = \frac{P\theta}{2\pi G}[d_0\ln\varepsilon + d_1 - C_1 d_0\varepsilon^2\ln^2\varepsilon + (d_2 - C_1 d_1 - C_2 d_0)\varepsilon^2\ln\varepsilon +$$

$$+ d_3\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4\ln\varepsilon)] \tag{2.9}$$

а постоянная $\varkappa$ имеет вид

$$\varkappa = -\frac{P}{2\pi G}\left[1 - d_0 C_1\frac{\varepsilon^2\ln^2\varepsilon}{p} - (d_1 C_1 + d_0 C_2)\frac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{p} + O\left(\frac{\varepsilon^4\ln^2\varepsilon}{p^2}\right)\right] \tag{2.10}$$

$$p = d_0\ln\varepsilon + d_1$$

Коэффициенты d_n находятся из (1.22), а коэффициенты C_n — из (1.26)

$$d_0 = -0.1224; \qquad C_1 = -0.0381 - i\,0.0843 - 0.1224\,T$$

$$d_1 = 0.3678 - i\,0.3377; \qquad C_2 = 1.0990 + i\,0.2990 + (0.3678 - i\,0.3377)\,T$$

$$d_2 = 0.0189; \qquad C_3 = 0.2645 - i\,0.2411 + (0.0234 - i\,0.5057)\,T$$

$$d_3 = 0.0234 + i\,0.5057; \qquad T = \theta\frac{M}{2\pi a^2 d}; \quad \nu = 0.3$$

Окончательно для контактного напряжения имеем

$$\sigma_z(x, 0) = \mathrm{Re}\Big\{-\frac{Pae^{i\omega t}}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}\Big[1 + j_1\varepsilon^2\ln\varepsilon + \left(j_2 + j_3\frac{x^2}{a^2}\right)\varepsilon^2 +$$

$$+ j_4\frac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{p} + O\left(\frac{\varepsilon^4\ln^2\varepsilon}{p}\right)\Big] +$$

$$+ \frac{Pe^{i\omega t}}{\pi}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}[j_1'\varepsilon^2\ln\varepsilon + j_2'\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4\ln^2\varepsilon)]\Big\} \tag{2.11}$$

$j_1 = -0.1886;$ $\quad j_4 = 0.4300 + i\,0.5050 + (0.0450 - i0.0433)\,\theta \dfrac{M}{2\pi a^2 d}$

$j_2 = -0.6980 - i\,0.2316;$ $\quad j_1' = -i\,0.3108$

$j_3 = 0.5$ $\quad j_2' = 0.3377 + i\,0.3678$

3. Рассмотрим теперь осесимметричный случай, когда на полупространство действует жесткий круглый в плане штамп радиуса a, совершающий гармонические колебания с неизвестной комплексной амплитудой δ под вертикальной нагрузкой P.

$$\int\limits_{\Gamma_+} [1 + \varphi(\lambda)]\, C(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = \delta, \qquad 0 < r < a \tag{3.1}$$

$$\int\limits_{\Gamma_+} \gamma_1(\lambda)\, C(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = 0, \qquad a < r < \infty \tag{3.2}$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{2k_2^2\gamma_1^2 - \theta\,[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 - 4\lambda^2\gamma_1\gamma_2]}{\theta\,[(2\lambda^2 - k_2^2)^2 - 4\lambda^2\gamma_1\gamma_2]}, \qquad \theta = -2(1 - \nu) \tag{3.3}$$

Следуя подходу работы [15], положим

$$C(\lambda) = \frac{\lambda}{\gamma_1}\int\limits_0^a \psi(t)\cos t\gamma_1\, dt \tag{3.4}$$

где $\psi(t)$ подлежит определению, $\psi(t) \in C^1[0, a]$.
Принимая во внимание разрывные интегралы:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\lambda \sin t\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch} k\sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & r < t \\ 0, & r > t \end{cases}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\lambda \cos t\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, J_0(\lambda r)\, d\lambda = -\frac{i \sin k\sqrt{r^2 - t^2}}{\sqrt{r^2 - t^2}} + \tag{3.5}$$

$$+ \begin{cases} 0, & r < t \\ \dfrac{\cos k\sqrt{r^2 - t^2}}{\sqrt{r^2 - t^2}}, & r > t \end{cases}$$

из (3.1)—(3.3) получаем интегральное уравнение Фредгольма II рода относительно $\psi(t)$

$$\psi(t)+\frac{1}{\pi}\int_0^a \psi(s)\left[G(s+t)+G(s-t)+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sh} k_1(s+t)}{i(s+t)}+\frac{\operatorname{sh} k_1(s-t)}{i(s-t)}\right]ds=\frac{2\delta}{\theta\pi}\operatorname{ch} k_1 t, \quad 0\leqslant t\leqslant a \quad (3.6)$$

причем

$$G(u)=\int_{\Gamma_+}\lambda\gamma_1^{-1}\varphi(\lambda)\cos u\gamma_1 d\lambda$$

Выражение для контактного напряжения $\sigma_z(r, 0)$ имеет вид

$$\sigma_z(r, 0)=2G\left[\psi(a)\frac{\operatorname{ch} k_1\sqrt{a^2-r^2}}{\sqrt{a^2-r^2}}-\int_r^a\psi'(t)\frac{\operatorname{ch} k_1\sqrt{t^2-r^2}}{\sqrt{t^2-r^2}}dt\right] \quad (3.7)$$

$$0<r<a$$

откуда для коэффициента интенсивности следует выражение

$$K_I=\frac{2G\psi(a)}{\sqrt{a}}$$

Амплитуда колебаний штампа δ определяется из уравнения движения штампа согласно формулам

$$(Q-M\omega^2\gamma)=P$$

$$Q=-2\pi\int_0^a\sigma_z(r, 0)\,rdr=\frac{4\pi G}{k_1}\left[\psi(a)\operatorname{sh} k_1 a-\right.$$

$$\left.-\int_0^a\psi'(t)\operatorname{sh} k_1 t\,dt\right]=4\pi G\int_0^a\psi(t)\operatorname{ch} k_1 t\,dt \quad (3.8)$$

4. Низкочастотное асимптотическое разложение решения строится в данном случае значительно проще, чем в плоской задаче, ибо не содержит логарифмических членов, так как предельная статическая задача не имеет особенностей.

Переходя к безразмерным переменным (2.1), из (3.7) при помощи контурного интегрирования получаем разложение ядра интегрального уравнения (3.6)

$$K(\sigma, \tau)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\alpha}_n\varepsilon^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\beta}_n\varepsilon^{2n+1}\right] \quad (4.1)$$

$$\hat{\alpha}_n(\sigma, \tau)=\alpha_n\left[(\sigma+\tau)^{2n}+(\sigma-\tau)^{2n}\right];\quad \hat{\beta}_n(\sigma, \tau)=\beta_n\left[(\sigma+\tau)^{2n+1}+(\sigma-\tau)^{2n+1}\right]$$

$$\alpha_n, \beta_n=\mathrm{const}$$

здесь

$$\alpha_0 = -i\,0.8957; \quad \alpha_1 = i\,0.7301; \quad \beta_0 = 0.2991 + i\,0.1609$$

при

$$\nu = 0.3$$

поэтому

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^+(\tau)\,\varepsilon^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^-(\tau)\,\varepsilon^{2n+1}$$

и

$$\psi_n^+(\tau) = \frac{2\delta}{\pi\theta}\,\frac{\tau^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 d\sigma \sum_{k=0}^{n-1} \left(i\psi_k^-\hat{\alpha}_{n-k-1} + \psi_k^+\hat{\beta}_{n-k-1}\right)$$

$$\psi_n^-(\tau) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 d\sigma \sum_{k=0}^{n} \left(i\psi_k^+\hat{\alpha}_{n-k} + \psi_k^-\hat{\beta}_{n-k-1}\right) \tag{4.2}$$

$$n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

На основе (4.2) получаются разложения для искомых величин

$$\sigma_z(r,\theta) = \mathrm{Re}\left\{-\frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi\sqrt{a^2-r^2}}\left[1 + \left(j_1 + j_2\frac{r^2}{a^2}\right)\varepsilon^2 + \left(j_3 + j_4\frac{r^2}{a^2}\right)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\right] - \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi}\,\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a}\left[j_1'\varepsilon^2 + j_2'\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\right]\right\} \tag{4.3}$$

$$j_1 = 0.4048 + i\,0.4488; \quad j_3 = -0.2267 - i\,0.8140; \quad j_1' = 1$$

$$j_2 = -0.5; \quad j_4 = -i\,0.2851; \quad j_2' = -i\,1.500$$

Сходимость этих рядов для достаточно малых ε может быть легко обоснована методом мажорант. Подобное обоснование проводится и в плоском случае, хотя и несколько сложнее.

Авторы выражают признательность А. Н. Златину за помощь в вычислениях.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе

Поступила 6 IV 1977

Ա. Ս. ԶԻԼԲԵՐԳԼԵՅՏ, Ի. Ն. ԶԼԱՏԻՆԱ

ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ամփոփում

Զույգ ինտեգրալ հավասարումների մեթոդով կառուցվել է կոշտ դրոշմի ազդեցության տակ գտնվող կիսահարթության և կիսատարածության կայունացված տատանումների խնդրի լուծումը։ Խնդրի լուծումը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման, որը թույլ է տալիս ցածր հաճախականության դեպքում տպավորիչ ասիմպտոտական լուծում։ Ստացվել են կոնտակտային լարման, դրոշմի տատանումների ամպլիտուդայի և լարումների ինտենսիվության գործակցի համար արտահայտություններ։

DYNAMIC CONTACT PROBLEM FOR THE HALF-PLANE AND HALF-SPACE

A. S. SILBERGLEIT, I. N. ZLATINA

Summary

The stationary vibration problem for a rigid stamp placed on the elastic half-plane or half-space is solved by the method of dual integral equations. The problem is reduced to Fredholm integral equation of the second kind, its effective asymptotic low-frequency solution is obtained. The expressions for the contact stress, the amplitude of the stamp vibration and the stress intencity factor are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бородачев Н. М.* Об определении напряжений под колеблющимся фундаментом. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1962, 3.
2. *Буряк В. Г.* Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости. МТТ, Изв. АН СССР, 1972, № 6.
3. *Бородачев Н. М.* О решении динамической контактной задачи для полупространства в случае осевой симметрии. Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и машиностроение 1960, № 4.
4. *Awojobi, Grootenhuis P.* Vibration of rigid bodies on semiinfinite elastic media. Proc. of the Royal Society, Ser. A., Math. and Phys. Scien., 1965, vol. 287, No. 1408.
5. *Karasudhi P., Keer L. M., Lee S. L.* Vibratory motion of a body on an elastic half plane. J. Appl. Mech., 1968, 35, 4.
6. *Зоммерфельд А.* Оптика. М., Изд. «Иностранная литература», 1953.
7. *Cooke J.* A solution of Tranters dual integral equations problem. Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., 1956, 9, 1.
8. *Лебедев Н. Н.* Распределение электричества на тонком параболоидальном сегменте. Докл. АН СССР, 1957, 114, 3.

9. *Григорян Э. Х.* О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. МТТ, Изв. АН СССР, 1975, 5.

10. *Григорян Э. Х.* О динамической задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. ПММ, 1974, 38, 2.

11. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М., ОНТИ, 1937.

12. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., Изд. «Наука», 1968.

13. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Применение парных интегральных уравнений к задаче дифракции электромагнитных волн на тонкой проводящей ленте. ЖТФ, 1972, XLII, 4.

14. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Применение парных интегральных уравнений к электростатическим задачам для полого проводящего цилиндра конечной длины. ЖТФ, 1973, XLIII, 1.

15. *Ахиезер Н. И., Ахиезер А. Н.* К задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране. Докл. АН СССР, 1956, 109, 1.

16. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. North-Holland Publishing Company, 1976.