

И. Е. ПРОКОПОВИЧ, Е. У. ЕНЬКОВ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО
 СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА С ТРЕЩИНАМИ
 ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ

К настоящему времени теория расчета анизотропных оболочек развита достаточно полно [1]. Недавно было показано, что методы этой теории, в определенной степени, могут быть обобщены на случай, когда анизотропия создается вследствие появления и развития трещин, например, как это имеет место в железобетонных тонкостенных элементах [2, 3].

Разработанная теория кратковременного деформирования железобетона [3] учитывает влияние процесса образования и развития трещин, а также характера их расположения. Согласно этой теории железобетон с трещинами является анизотропным материалом, причем эта анизотропия зависит от величины действующих усилий. Поэтому, в общем случае, анизотропия связана как с уровнем загрузки, так и с геометрическими координатами.

На базе теории [2, 3] создан метод расчета железобетонных плит с трещинами, учитывающий влияние на анизотропию уровня и продолжительности действия нагрузки, а также места расположения сечения [4].

Настоящая статья посвящена выводу основных уравнений для расчета железобетонных конструкций с трещинами, работающих в условиях плоского напряженного состояния при длительном действии нагрузки. Полученные результаты базируются на работах [2, 3] и линейном варианте наследственной теории старения [5, 6, 7].

Последнее связано с рассмотрением эксплуатационной стадии, то есть стадии, в которой сжимающие напряжения в бетоне обычно не превышают $0.5 R_{ср}$, но возможно появление трещин.

При низком уровне нагрузки, не вызывающем трещин, железобетонная конструкция приближенно может рассматриваться как изотропная. Это относится и к зонам (элементам) конструкций, где трещины не образуются. Для плоского напряженного состояния изотропного и однородного тела, обладающего линейной ползучестью, получено интегро-дифференциальное уравнение [6, 7]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F^*(t) - E(t) \int_0^t \nabla^2 \nabla^2 F^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ = - E(t) \left[\frac{\partial^2 \epsilon_x^0(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y^0(t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0(t)}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\delta(t, \tau)$ — полная относительная деформация:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (1.2)$$

$E(\tau)$ — модуль упруго-мгновенных деформаций; $C(t, \tau)$ — мера простой ползучести при сжатии — растяжении.

При отсутствии вынужденных деформаций [$\varepsilon_x^0(t) = \varepsilon_y^0(t) = \gamma_{xy}^0(t) = 0$] (1.1) вырождается в однородное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра 2-го рода. В этом случае, если граничные условия не зависят от ползучести (контур свободен от связей; или на контур наложены абсолютно жесткие связи и можно считать, что коэффициенты поперечной деформации ползучести и упруго-мгновенной деформации $\nu_2^*(t, \tau) = \nu_1(\tau) = \nu(\tau_1) = \text{const}$), при действии внешних сил напряжения не зависят от ползучести и определяются путем решения соответствующей упруго-мгновенной задачи [5, 7].

Для описания плоской задачи теории железобетона с трещинами при длительном действии нагрузки, кроме обычно применяемых в теории упругости гипотез, характеризующих статическую и геометрическую сторону задачи, привлечены дополнительные предположения, обоснованные в работах [2, 3, 5, 7]:

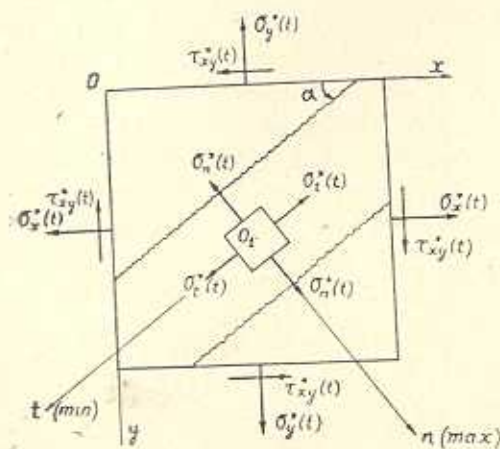
а) применим принцип наложения воздействий к определению средних деформаций железобетонного элемента с трещинами;

б) трещины образуются по площадкам главных растягивающих напряжений. Рассматривается схема непересекающихся трещин (фиг. 1), как наиболее распространенная [3];

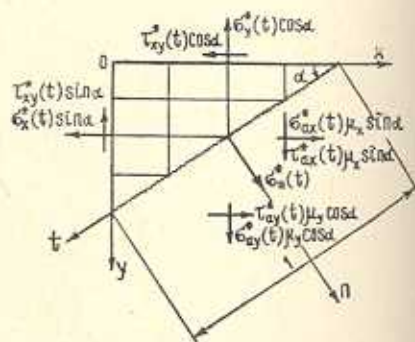
в) арматура в виде ортогональной сетки считается «размазанной» по длине сечения с интенсивностью f_{ax} и f_{ay} ; коэффициенты армирования равны

$$\mu_x = \frac{f_{ax}}{h}, \quad \mu_y = \frac{f_{ay}}{h}$$

где h — толщина рассматриваемого элемента;



Фиг. 1. Схема трещин и напряжений в железобетонном элементе



Фиг. 2. Распределение напряжений в сечении с трещиной

г) арматура в наклонных к ней трещинах воспринимает, помимо растягивающих, также и сдвигающие усилия (фиг. 2);

д) в направлении осей x и y деформации железобетонного элемента с трещинами складываются из проекций средних деформаций арматуры и деформаций полос бетона между трещинами

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^*(t) &= \varepsilon_{ax}^*(t) + \varepsilon_{6x}^*(t) \\ \varepsilon_y^*(t) &= \varepsilon_{ay}^*(t) + \varepsilon_{6y}^*(t)\end{aligned}\quad (1.3)$$

е) при определении деформаций полос бетона вдоль трещин влияние арматуры и поперечных деформаций бетона не учитывается;

ж) в сжатом и растянутом бетоне между трещинами развиваются деформации упругие, пластические и ползучести. Связь деформаций с напряжениями принимаем в виде [7]

$$\varepsilon_6^*(t) = \frac{\sigma_6^*(t)}{E(t)} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\sigma_6(\tau_1)}{E(\tau_1)} - \int_0^t \sigma_6^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1.4)$$

где ν учитывает быстроснатекающие деформации ползучести, развивающиеся при нагружении;

з) влияние усадки бетона может быть учтено отдельно.

В теории [3], построенной применительно к кратковременному действию нагрузки, сложный характер работы арматуры в трещинах учитывается с помощью коэффициентов λ_x и λ_y , которые определяются из специальных экспериментов, а усреднение деформаций арматуры производится с помощью коэффициентов типа Мурашева В. И. ψ_{ax} и ψ_{ay} .

Естественно, что при длительном действии нагрузки следует положить:

$$\lambda_i = \lambda_i^*(t); \quad \psi_{ai} = \psi_{ai}^*(t), \quad (i = x, y).$$

Средние деформации арматуры на участке между трещинами равны

$$\varepsilon_{ai}^*(t) = \frac{\sigma_{ai}^*(t)}{E_{ai}} \psi_{ai}^*(t) \quad (1.5)$$

$\sigma_{ai}^*(t)$ — напряжение в арматуре i -го направления в трещине. Из условий равновесия (фиг. 2) и совместности осевых и тангенциальных перемещений арматурного стержня в зоне трещины [3] с учетом (1.5) получены зависимости [3, 2]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ax}^*(t) &= \frac{\sigma_x^*(t) + \tau_{xy}^*(t) \operatorname{ctg} \alpha}{E_{ax} \mu_x} \lambda_x^*(t) \psi_{ax}^*(t) \\ \varepsilon_{ay}^*(t) &= \frac{\sigma_y^*(t) + \tau_{xy}^*(t) \operatorname{tg} \alpha}{E_{ay} \mu_y} \lambda_y^*(t) \psi_{ay}^*(t)\end{aligned}\quad (1.6)$$

где $\sigma_x^*(t)$, $\sigma_y^*(t)$ и $\tau_{xy}^*(t)$ — напряжения с учетом ползучести в железобетонном элементе с трещиной; α — угол, образуемый трещиной и осью x ; E_{ai} — модуль упругости арматуры i -го направления ($i = x, y$).

Проекции на оси x и y деформаций полос бетона между трещинами записываются так:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\sigma x}^*(t) &= \varepsilon_{\sigma t}^*(t) \cos^2 \alpha \\ \varepsilon_{\sigma y}^*(t) &= \varepsilon_{\sigma t}^*(t) \sin^2 \alpha\end{aligned}\quad (1.7)$$

Так как армирование полос бетона не учитывается (гипотеза ϵ), то можно считать, что

$$\varepsilon_{\sigma t}^*(t) = \varepsilon_t^*(t); \quad \sigma_{\sigma t}^*(t) = \sigma_t^*(t) \quad (1.8)$$

Используя известные из курса сопротивления материалов соотношения

$$\sigma_t^*(t) = \sigma_x^*(t) - \tau_{xy}^*(t) \operatorname{tg} \alpha = \sigma_y^*(t) - \tau_{xy}^*(t) \operatorname{ctg} \alpha \quad (1.9)$$

деформации $\varepsilon_x^*(t)$ и $\varepsilon_y^*(t)$ с помощью (1.3), (1.4), (1.6), (1.7), (1.8) и (1.9) можно связать с напряжениями

$$\varepsilon_x^*(t) = \frac{1}{E(t)} \{ [\sigma_x^*(t) + \tau_{xy}^*(t) \operatorname{ctg} \alpha] a_x^*(t) + \Phi_x^*(t) \cos^2 \alpha - \Phi_{xy}^*(t) \sin \alpha \cos \alpha \} \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_y^*(t) = \frac{1}{E(t)} \{ [\sigma_y^*(t) + \tau_{xy}^*(t) \operatorname{tg} \alpha] a_y^*(t) + \Phi_y^*(t) \sin^2 \alpha - \Phi_{xy}^*(t, \tau) \sin \alpha \cos \alpha \}$$

где

$$a_i^*(t) = \frac{m_i(t)}{\mu_i} \lambda_i^*(t) \psi_{ai}^*(t) \quad (1.11)$$

$$m_i(t) = \frac{E(t)}{E_{ai}} \quad (i = x, y) \quad (1.12)$$

$$\Phi_x^*(t) = \sigma_x^*(t) + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{E(t)}{E(\tau_1)} \sigma_x(\tau_1) - E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma_x(\tau) \frac{\partial \lambda(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1.13)$$

$\Phi_y^*(t)$ и $\Phi_{xy}^*(t)$ определяются по формуле (1.13), если в ней заменить σ_x соответственно на σ_y и τ_{xy} .

Углы сдвига определяются по теории малых деформаций, то есть по формуле [3]

$$\gamma_{xy}^*(t) = \varepsilon_x^*(t) \operatorname{ctg} \alpha + \varepsilon_y^*(t) \operatorname{tg} \alpha - \sigma_t^*(t) \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \quad (1.14)$$

Деформация $\varepsilon_t^*(t)$ выражается через (1.8), где $\sigma_t^*(t)$ следует заменить на [3]

$$\sigma_t^*(t) = \sigma_x^*(t) \cos^2 \alpha + \sigma_y^*(t) \sin^2 \alpha - 2\tau_{xy}^*(t) \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.15)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^*(t) = & \frac{1}{E(t)} \left\{ \sigma_x^*(t) \alpha_x^*(t) \operatorname{ctg} \alpha + \sigma_y^*(t) \alpha_y^*(t) \operatorname{tg} \alpha + \tau_{xy}^*(t) [\alpha_x^*(t) \operatorname{ctg}^2 \alpha + \right. \\ & \left. + \alpha_y^*(t) \operatorname{tg}^2 \alpha] - [\Phi_x^*(t) + \Phi_y^*(t)] \sin \alpha \cos \alpha + \Phi_{xy}^*(t) \right\} \quad (1.16) \end{aligned}$$

Физические зависимости (1.10) и (1.16) позволяют учитывать нелинейность деформирования железобетона, вызванную трещинообразованием и ползучестью бетона при обобщенном плоском напряженном состоянии. При $t = \tau$, они совпадают с соответствующими выражениями для случая кратковременного действия нагрузки [2].

Если известны a_{ij}^* , то есть λ_{ij}^* , $\psi_{a_{ij}}^*$ (1.11), то уравнения равновесия, уравнение совместности деформаций и формулы (1.10) и (1.16) образуют полную систему уравнений, описывающую напряженное состояние.

Если ввести функцию напряжений $F^*(t) = F^*(x, y, t)$, причем

$$\sigma_x^*(t) = \frac{\partial^2 F^*(t)}{\partial y^2}; \quad \sigma_y^*(t) = \frac{\partial^2 F^*(t)}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy}^*(t) = - \frac{\partial^2 F^*(t)}{\partial x \partial y} \quad (1.17)$$

то система уравнений состояния может быть сведена к такому интегродифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \Delta_a^4 [F^*(t)] + \Delta_b^4 \left[F^*(t) + \frac{1 - \nu}{\nu} \frac{E(t)}{E(\tau_1)} F(\tau_1) - \right. \\ \left. - E(t) \int_{\tau_1}^t F^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] = 0 \quad (1.18) \end{aligned}$$

Δ_a^4 — дифференциальный оператор следующей структуры:

$$\begin{aligned} \Delta_a^4 = & a_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2 \left(a_{13} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + a_{23} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} \right) + a_{33} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \\ & + \left(2 \frac{\partial a_{11}}{\partial y} - \frac{\partial a_{13}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3}{\partial y^3} + \left(2 \frac{\partial a_{22}}{\partial x} - \frac{\partial a_{23}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial a_{33}}{\partial y} - 3 \frac{\partial a_{23}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \\ & + \left(\frac{\partial a_{33}}{\partial x} - 3 \frac{\partial a_{13}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_{13}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \\ & + \left(\frac{\partial^2 a_{33}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_{13}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (1.19) \end{aligned}$$

в котором обозначено

$$\begin{aligned} a_{11} = a_x^*(t); \quad a_{22} = a_y^*(t); \quad a_{33} = a_x^*(t) \operatorname{ctg}^2 \alpha + a_y^*(t) \operatorname{tg}^2 \alpha \\ a_{13} = a_x^*(t) \operatorname{ctg} \alpha; \quad a_{23} = a_y^*(t) \operatorname{tg} \alpha \quad (1.20) \end{aligned}$$

Δ_b^4 — то же, что и (1.19), но с заменой a_{ij} на b_{ij} , причем

расчет принципиально не отличается от решений, основанных на использовании метода Н. М. Крылова—Н. Н. Боголюбова. Таким образом, решение сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных 4-го порядка с переменными коэффициентами относительно функции напряжений F^* для моментов времени $t = \tau_1, t_1, t_2, \dots, t_n$.

При этом влияние ползучести учитывается коэффициентами этих уравнений. При записи уравнения (1.18) и построения схемы его решения предполагалось, что функции a_{ij} заданы. Фактически эти функции связаны с напряженным состоянием, то есть являются неизвестными. Описанный выше шаговый способ решения позволяет использовать для определения этих функций величины напряжений, подсчитанные на предыдущем шаге во времени. В случае необходимости соответствующие итерации могут производиться внутри каждого шага.

Зоны (элементы) без трещин могут быть рассчитаны по уравнению (1.1), которое также представляется в дискретном по времени виде.

Дискретизация по координатам с помощью одного из численных методов дает возможность для решения конкретных задач применить ЭВМ.

Как уже указывалось, коэффициенты a_{ij} (1.11) зависят от λ_i^* и ψ_{ai}^* . Методика определения величин λ_i^* требует дополнительного экспериментального обоснования; соответствующие опыты применительно к методике [3] для случая кратковременного нагружения проводятся в настоящее время в Одесском инженерно-строительном институте.

Коэффициенты ψ_{ai} могут определяться по формуле, полученной на основе решения, приведенного в [7] для случая изгиба (обозначения сохранены)

$$\psi_{ai}^*(t) = 1 - \sigma \frac{\sigma_{ai, \tau} - n_p' R_p \left[1 + \frac{1 - \lambda_i(\tau_1) H_{6i}^*(t, \tau_1)}{\lambda_i n_p'} \right]}{\sigma_{ai}(t)} \quad (i = x, y) \quad (1.26)$$

Для создания определенного представления о характере и величинах коэффициентов λ_i^* , ψ_{ai}^* и влиянии трещинообразования на деформации ε_x^* , ε_y^* , γ_{xy}^* ниже рассмотрены два простейших случая.

Растяжение в направлении n ($\sigma_n > R_p$). Стержни ортогональной арматурной сетки расположены под углом $\alpha = 45^\circ$ к образовавшейся трещине ($E_{n, \mu} = E_{n, y} = E_n$). В этом случае можно считать [2]

$$\lambda_i^*(t) = \lambda_i(\tau_1) = \lambda = \text{const}; \quad \psi_{ai}^*(t) = \psi_n^*(t), \quad (i = x, y)$$

Исходные данные: $\sigma_n = \sigma = 2.4$ МПа, $E_n = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0.01$; бетон из опытов ОИСИ (I серия) [7], $\tau_1 = 20$ сут.

Коэффициент затухания напряжений в бетоне между трещинами вследствие ползучести $H_{6i}^*(t, \tau_1)$, входящий в (1.26), определяем, воспользовавшись аппаратом наследственной теории старения для случая простого растяжения железобетонного элемента без трещин [7].

По формулам (1.26) (1.10) и (1.16) получаем: $\psi_a(\tau_1) = 0.5694$;
 $\varepsilon_x(\tau_1) = \varepsilon_y(\tau_1) = 65.07 \cdot 10^{-5}$; $\gamma_{xy}(\tau_1) = 130 \cdot 10^{-5}$; $\psi_a^*(900) = 0.6809$;
 $\varepsilon_x^*(900) = \varepsilon_y^*(900) = 77.72 \cdot 10^{-5}$; $\gamma_{xy}^*(900) = 155.52 \cdot 10^{-5}$.

Растяжение со сжатием ($\sigma_n = \sigma > R_p$; $\sigma_t = -\sigma$). Квадрат, выделенный в пределах такого элемента под углом $\alpha = 45^\circ$, находится в условиях чистого сдвига. Исходные данные те же, что и в предыдущем примере.

В силу этого i_i^* и ψ_{ii}^* равны соответствующим величинам из предыдущего примера.

Деформации (1.10) и (1.16): $\varepsilon_x(\tau_1) = \varepsilon_y(\tau_1) = 56.16 \cdot 10^{-5}$; $\gamma_{xy}(\tau_1) = 147.95 \cdot 10^{-5}$; $\varepsilon_x^*(900) = \varepsilon_y^*(900) = 49.91 \cdot 10^{-5}$; $\gamma_{xy}^*(900) = 211.22 \cdot 10^{-5}$.

В первом примере деформации растрескавшегося железобетонного элемента возрастают вследствие ползучести бетона до 20%. Во втором примере деформации ε_x^* и ε_y^* уменьшаются, но углы сдвига увеличиваются на 43%.

Необходимо иметь в виду, что уравнения (1.1), (1.18) и (1.22) описывают весьма сложное напряженное и деформированное состояние. Учитывается характер, расположение, направление и ширина раскрытия трещин, особенности деформаций арматуры как в трещинах, так и между ними, и, наконец, ползучесть бетона. Это открывает возможности для детального описания поведения железобетонных дисков при достаточно широком диапазоне уровней нагрузок.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 17 XI 1976

Ի. Ե. Պրոկոպովիչ, Ե. Ս. Ենյով

ՀԱՔԵՐՈՎ ԵՐԿԱԹԲԵՏՈՆԻ ՀԱՐԹ ԼԱՐՎԱԾ ՎԻՃԱԿԻ
 ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԲԵՌԻ ԵՐԿԱՐԱՏԵՎ
 ԱԶԳԵՅՈՒԹՅԱՆ ԳԵՊԲՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ստացվել է հարթ խնդիրը լուծող ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումը, որը հաշվի է առնում հարերով երկաթբետոնի աշխատանքի անիզոտրոպ բնույթը բեռի երկարատև ազդեցության դեպքում:

THE BASIC EQUATION FOR PLANE STRESS
IN FERRO-CONCRETE WITH CRACKS UNDER
PROLONGED LOAD

I. E. PROKOPOVICH, E. U. ENIKOV

S u m m a r y

The permitting integral-differential equation for the plane problem is obtained, taking into consideration the anisotropic character of work of reinforced concrete with cracks under prolonged load.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974.
2. Гвоздев А. А., Карпенко Н. И. Работа железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии. «Строительная механика и расчет сооружений», 1965, № 2.
3. Карпенко Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами. М., Стройиздат, 1976.
4. Прокопович И. Е., Яременко А. Ф. Исследование работы железобетонных плит с учетом трещинообразования и ползучести. Сб. «Проблемы ползучести и усадки бетона», ЦНИИ Минтрансстроя, вып. 77, М., 1974.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1952.
6. Александровский С. В. Температурные напряжения в массивных бетонных блоках от экзотермии цемента. «Исследования. Массивные и стержневые конструкции». Тр. НИИ по строительству. Госстройиздат, 1952.
7. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. М., Госстройиздат, 1963.
8. Прокопович И. Е., Рекша В. В. О напряженно-деформированном состоянии тела, обладающего ползучестью и усиленного связями. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, XXII, № 1.