ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

Г. Я. ПОПОВ

К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СРЕД

Излагается подход к решению линейных задач механики и математической физики для слоистых сред, основанный на обобщении известного метода начальных параметров [1] для решения дифференциальных уравнений строительной механики на случай кусочно-постоянных (кусочно-непрерывных) коэффициентов.

1. Рассмотрим линейную краевую задачу механики в области (для определенности — трехмерной), ограниченной координатными поверхностями: $\xi=\alpha_0$, $\xi=\alpha_m$; $\eta=\beta_0$, $\eta=\beta_1$; $\zeta=\gamma_0$, $\zeta=\gamma_1$. Пусть область координатными поверхностями $\xi=\alpha_j$ $(j=1, 2,..., m-1)$ делится на m слоев, в каждом из которых, вообще говоря, различны физические и механические параметры.

Допустим, что существуют интегральные преобразования дифференциальных уравнений в частных производных рассматриваемой краевой задачи по переменным η и ζ на интервалах (β_0, β_1) и (γ_0, γ_1) соответственно, позволяющие удовлетворить краевым условиям по граничным поверхностям $\eta=\beta_j$, $\zeta=\gamma_j$ $(j=0, 1)$ и свести упомянутые уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям по переменной ξ.

Дальнейший путь решения подобного рода задач заключается в построении общих решений этих обыкновенных дифференциальных уравнений в пределах каждого слоя. Содержащиеся в общих решениях произвольные постоянные (точнее, функции параметров интегральных преобразований), количество которых пропорционально порядку уравнений и количеству слоев, находятся из граничных условий на поверхностях $\xi=\alpha_0$, $\xi=\alpha_m$ и условий сопряжения между слоями. При этом для некоторых случаев удалось [2], на основе рекуррентных соотношений для упомянутых постоянных, снизить порядок алгебраических уравнений для их определения до порядка дифференциальных уравнений и ниже.

В настоящей работе предлагается общий способ подобного снижения, базирующийся на формулировке рассматриваемой задачи механики или математической физики в виде замкнутой системы N уравнений в частных производных, содержащих производные не выше первого порядка. Эта система записывается относительно функций $u_j(\xi, \eta, \zeta)$ $(j=0, 1, ..., N-1)$, входящих в наиболее общие краевые условия по граням, совпадающим с координатными поверхностями ξ, η, $\zeta=\text{const}$. Например, если рассматриваются продольные колебания стержня, то в формулировку краевых условий (здесь только одна координатная поверхность $x=\text{const}$) будет входить продольное перемещение $u(x, t)$ и продольная сила $N(x, t)$, то есть здесь $N=2$ ($u_0=u$, $u_1=N$) и уравнение колебаний стержня надлежит записать так:

$$\frac{\partial u}{\partial x}-eN=0, \quad \frac{\partial N}{\partial x}-c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \quad (e^{-1}=EF, \ c=\rho F) \tag{1.1}$$

(ρ, E, F — плотность, модуль упругости, площадь сечения).

Если же рассматривается задача теплопроводности в декартовой системе координат (x, y, z), то в формулировку общих краевых условий по граням x, y, $z=\text{const}$ будет входить температура θ, тепловой поток q через поверхность $x=\text{const}$ и тепловые потоки p и r через две другие поверхности y, $z=\text{const}$. Следовательно, здесь $N=4$ ($u_0=\theta$, $u_1=q$, $u_2=p$, $u_3=r$) и дифференциальное уравнение теплопроводности следует записать в виде

$$\begin{gathered} k_1\frac{\partial\theta}{\partial x}+q=0, \quad k_2\frac{\partial\theta}{\partial y}+p=0, \quad k_3\frac{\partial\theta}{\partial z}+r=0 \\ \frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}+\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}=f(x, y, z, t) \end{gathered} \tag{1.2}$$

где k_j — коэффициенты теплопроводности, c — коэффициент теплоемкости, ρ — плотность, f — функция, описывающая источники тепла.

В случае осесимметричной задачи теории упругости в общие краевые условия на поверхности $r=\text{const}$ войдут вертикальное w и радиальное u перемещения, касательное τ_{rz} и нормальное σ_r напряжения. На плоскостях же $z=\text{const}$ краевые условия формируются из тех же перемещений и того же касательного напряжения, а роль σ_r выполняет нормальное напряжение σ_z. Таким образом, для этой задачи $N=5$ ($u_0=w$, $u_1=u$, $u_2=\tau_{rz}$, $u_3=\sigma_z$, $u_4=\theta_2$) и аналог систем (1.1) и (1.2) здесь имеет вид*

$$\begin{gathered} \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r}+r\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}-2\mu\frac{u}{r}-\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru\right)=0 \\ \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r}+r\frac{d\sigma_z}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\tau_{rz}}{\mu}=0 \\ 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru\right)-\sigma_z=0 \\ 2\mu\frac{\partial u}{\partial r}+\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{dr}ru\right)-\sigma_r=0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

(λ, μ — параметры Ламе).

* Отметим, что осесимметричные и плоские (в том числе анизотропные) задачи теории упругости для слоистой среды были предметом исследований многих авторов (на основе других подходов), например [2—6].

Общим для получаемых таким путем систем является то, что те из функций u_j ($j=0, 1, \ldots, N-1$), которые формируют общие краевые условия только на одной из поверхностей (например, $\eta=\mathrm{const}$), могут находиться только под знаком производной вдоль нормали к этой поверхности (то есть $\partial/\partial\eta$).

Отмеченное обстоятельство позволяет из систем, составленных на основе изложенных соображений, исключить функции u_j (ξ, η, ζ), не входящие в формирование краевых условий по поверхностям $\xi=\mathrm{const}$. Это делается либо непосредственно в системах, либо после применения интегральных преобразований по всем переменным, кроме ξ. Если обозначить трансформанты функций u_j (ξ, η, ζ) по переменным η и ζ через $u_\alpha^{(j)}(\xi)$ и считать функции $u_j(\xi, \eta, \zeta)$ $j=0, 1, \ldots, n-1$ $(n<N)$ ответственными за формирование краевых условий по поверхностям $\xi=\mathrm{const}$, то мы придем к системе из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую запишем в матричном виде

$$P_0\frac{dz}{d\xi}+P_1 z=f \tag{1.4}$$

Здесь P_j ($j=0, 1$)—квадратные матрицы n-ого порядка $\det P_0\neq 0$, а $z(\xi)$ и $f(\xi)$ — вектор-функции (матрицы-столбцы) того же порядка, и компонентами которых являются соответственно трансформанты функций u_j ($j=0, 1, \ldots, n-1$) и правых частей систем типа (1.1) и (1.2). Например, применительно к задаче теплопроводности для слоя $(a_0\leqslant x\leqslant a_1, -\infty<y, z<\infty)$ следует к системе (1.1) применить преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по переменным y и z (соответствующие трансформанты будем помечать индексом α). Последующее исключение трансформант $p_\alpha(x)$ и $r_\alpha(x)$ приводит систему к уравнению (1.4), в котором следует положить

$$P_0=I, \quad P_1=\begin{pmatrix}0 & k_1^{-1}\\ k_p & 0\end{pmatrix}, \quad z=\begin{pmatrix}\theta_\alpha\\ q_\alpha\end{pmatrix}, \quad f=\begin{pmatrix}0\\ f_\alpha\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

где $k_p=\rho c p+k_2\beta^2+k_3\gamma^2$; p, β, γ — параметры упомянутых интегральных преобразований соответственно по t, y, z.

Для получения такой же системы применительно к осесимметричной задаче для упругого слоя $(h_0\leqslant z\leqslant h_1, 0\leqslant r<\infty)$ следует из системы (1.3) сперва исключить напряжение σ_r, как не участвующее в формировании краевых условий по плоскостям $z=\mathrm{const}$, для чего следует воспользоваться пятым уравнением из (1.3). Затем последовательное применение к первым четырем уравнениям преобразования Ханкеля (с параметром преобразования α, с пометкой трансформант значком α) с индексами у функций Бесселя: 1, 0, 1, 0 приведет к системе

$$\begin{gathered}\frac{d\tau_\alpha}{dz}-\alpha^2(2\mu+\lambda)u_\alpha-\alpha\lambda\frac{dw_\alpha}{dz}=0, \quad \frac{d\sigma_\alpha}{dz}+\alpha\tau_\alpha=0\\ \sigma_\alpha-(2\mu+\lambda)\frac{dw_\alpha}{dz}-\lambda\alpha u_\alpha=0, \qquad \tau_\alpha+\mu\alpha w_\alpha-\mu\frac{du_\alpha}{dz}=0\end{gathered} \tag{1.6}$$

Заменяя первое уравнение в (1.6) линейной комбинацией первого и третьего, вновь приходим к системе (1.4), в которой следует положить

$$P_0 = I; \; f = 0; \; P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\lambda\lambda^* & 0 & -\alpha\mu^*\lambda^* \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^* & 0 & \alpha\lambda\lambda^* \\ -\mu^{-1} & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}; \quad z = \begin{pmatrix} \tau_\alpha \\ \sigma_\alpha \\ w_\alpha \\ u_\alpha \end{pmatrix}$$

$$(\lambda^* = (2\mu + \lambda)^{-1}; \quad \mu^* = 4\mu(\lambda + \mu))$$

Таким образом, сформулированная вначале задача для слоистой среды в общем случае сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных на участках $\alpha_k < \xi < \alpha_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$, число которых m совпадает с количеством слоев. На каждом из этих участков уравнение (1.4) имеет, вообще говоря, свои матрицы $P_j^{(k)}$ и вектора $f^{(k)}$, то есть имеет вид

$$P_0^{(k)} \frac{dz^{(k)}}{d\xi} + P_1^{(k)} z^{(k)} = f^{(k)} \quad \begin{matrix} \alpha_k < \xi < \alpha_{k+1} \\ k = 0, 1, \ldots, m-1 \end{matrix} \tag{1.7}$$

Помимо решения этих m уравнений необходимо удовлетворить граничному условию

$$Az^{(0)}(\alpha_0) + Bz^{(m-1)}(\alpha_m) = \gamma \tag{1.8}$$

Здесь A, B — квадратные матрицы n-ого порядка, а γ — матрица-столбец того же порядка. Например, для задачи теплопроводности, если на одной из граней $(x = a_0)$ задана температура θ_0, а на другой $(x = a_m)$ — θ_m, то в (1.8) следует положить

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \theta_0^{\pi} \\ \theta_m^{\pi} \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Наконец, еще следует удовлетворить условиям сопряжения

$$z^{(k)}(\alpha_k) = A^{(k)} z^{(k-1)}(\alpha_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.10}$$

Здесь $A^{(k)}$ — тоже квадратная матрица n-ого порядка. В частности, если $A^{(k)} = I$, то (1.10) соответствует непрерывности вектор-функции $z(\xi)$ при переходе от одного слоя к другому. Это случай наиболее распространенный. Например, применительно к задаче теплопроводности (1.2) это соответствует случаю, когда между слоями имеет место идеальный контакт (в случае же теплообмена по Ньютону $A^{(k)} \neq I$), а для задачи упругости (1.3) — случаю, когда между слоями реализовано полное сцепление.

2. Займемся решением одномерной краевой задачи (1.7), (1.8) с условиями сопряжения (1.10). Если построен матрицант [6] уравнения (1.7), то есть матрица $Z^{(k)}$ n-ого порядка, удовлетворяющая уравнению

$$P_0^{(k)}\frac{dZ^{(k)}}{d\xi}+P_1^{(k)}Z^{(k)}=0 \tag{2.1}$$

и обладающая свойством

$$Z^{(k)}(\alpha_k)=I \tag{2.2}$$

то общее решение уравнения (1.7) можно [6] записать в виде

$$z^{(k)}(\xi)=Z^{(k)}(\xi)\,z^{(k)}(\alpha_k)+\int\limits_{\alpha_k}^{\xi}K^{(k)}(\xi,\ \eta)\,f^{(k)}(\eta)\,d\eta$$

$$(K^{(k)}(\xi,\ \eta)=Z^{(k)}(\xi)\,[P_0^{(k)}(\eta)\,Z^{(k)}(\eta)]^{-1}) \tag{2.3}$$

Отсюда находим

$$z^{(k)}(\alpha_k)=Z^{(k)}(\alpha_{k+1})\,z^{(k)}(\alpha_k)+f_*^{(k)}$$

$$f_*^{(k)}=\int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}K^{(k)}(\alpha_{k+1},\ \eta)\,f^{(k)}(\eta)\,d\eta \tag{2.4}$$

Подставляя полученное выражение в условие сопряжения (1.10), получим

$$z^{(k)}(\alpha_k)=A^{(k)}Z^{(k-1)}(\alpha_k)\,z^{(k-1)}(\alpha_{k-1})+A^{(k)}f_*^{(k-1)} \tag{2.5}$$

Таким образом, получена рекуррентная связь между векторами $z^{(k)}(\alpha_k)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, которая позволяет получить формулу

$$z^{(k)}(\alpha_k)=B_{k-1}^{(k)}\,z^{(0)}(\alpha_0)+g_*^{(k)}$$

$$B_l^{(k)}=\prod_{j=0}^{l}A^{(k-j)}Z^{(k-j-1)}(\alpha_{k-j}),\quad l=0,\ 1,\ldots,\ k-1 \tag{2.6}$$

$$g_*^{(k)}=A^{(k)}f_*^{(k-1)}+\sum_{j=0}^{k-2}B_j^{(k)}A^{(k-j-1)}f_*^{(k-j-2)}$$

(при $k=1$ сумму следует считать равной нулю).

Используя формулу (2.6), решение уравнения (1.7) с учетом (2.3) можем выразить непосредственно через начальный вектор $z^{(0)}(\alpha_0)$, то есть

$$z^{(k)}(\xi)=Z^{(k)}(\xi)\,B_{k-1}^{(k)}\,z^{(0)}(\alpha_0)+Z^{(k)}(\xi)\,g_*^{(k)}+\int\limits_{\alpha_k}^{\xi}K^{(k)}(\xi,\ \eta)\,f^{(k)}(\eta)\,d\eta \tag{2.7}$$

$$(k=0,\ 1,\ldots,\ m-1)$$

Воспользовавшись далее формулой (2.4), а затем (2.6), получим

$$z^{(m-1)}(\alpha_m) = Z^{(m-1)}(\alpha_m) B_{m-2}^{(m-1)} z^{(0)}(\alpha_0) + g_m$$
$$g_m = Z^{(m-1)}(\alpha_m) g_*^{(m-1)} + f_*^{(m-1)} \tag{2.8}$$

Подставляя это выражение в граничное условие (1.8), приходим к алгебраической системе (относительно компонент начального вектора $z^{(0)}(\alpha_0)$)

$$[A + BC_m] z^{(0)}(\alpha_0) = \gamma - g_m$$
$$C_m = Z^{(m-1)}(\alpha_m) \prod_{j=0}^{m-2} A^{(m-j-1)} Z^{(m-j-2)}(\alpha_{m-j-1}) \tag{2.9}$$

такого же порядка n, что и система дифференциальных уравнений (1.4), что и требовалось (фактически порядок еще ниже, так как часть компонентов начального вектора заранее бывает известной).

Результирующие формулы (2.7) и (2.9) существенно упрощаются ($K^{(k)}$, $g_*^{(k)}$, $g_m = 0$), если уравнение (1.7) однородно ($f^{(k)} = 0$). Чаще всего в условиях сопряжения $A^{(k)} = I$, что тоже приводит к упрощению. Например, в формуле (2.9) в этом случае

$$C_m = \prod_{j=0}^{m-1} Z^{(m-j-1)}(\alpha_{m-j}) \tag{2.10}$$

С другой стороны, условия сопряжения нельзя записать в форме (1.9), если одна из компонент $z_j^{(k)}(\xi)$ ($j = 0, 1, \ldots, n-1$) вектора $z^{(k)}(\xi)$ на поверхностях, разделяющих слои, обращается в нуль. Например, применительно к уравнениям упругости (1.3), (1.6) для слоистой среды ($h_k < z < h_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$) это будет тогда, когда между упругими слоями реализован гладкий контакт, то есть равны нулю касательные напряжения: $\tau_\alpha(h_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Обращение в нуль какой-либо компоненты $z^{(k)}(\xi)$ на границе слоев, как правило, влечет за собой отсутствие в условии сопряжения (1.10) другой какой-нибудь компоненты (например, применительно к слоистой упругой среде с гладким контактом, в условиях сопряжения между слоями будет отсутствовать горизонтальное смещение, то есть компонента u_α). Если обращается в нуль несколько компонент, то такое же их количество будет отсутствовать и в условиях сопряжения.

В подобных ситуациях (для определенности считаем, что $z_0^{(k)}(\alpha_0) = 0$ $k = 0, 1, \ldots, m-1$ и что компонента $z_{n-1}^{(k)}$ не входит в условия сопряжения) следует поступать так. Пользуясь представлением (2.3) для вектора $z^{(k)}(\xi)$ (при этом ради простоты полагаем $f^{(k)} = 0$) реализуем условие

$$z_0^{(k)}(\alpha_{k+1}) = \sum_{j=0}^{n-1} Z_{0j}^{(k)}(\alpha_{k+1})\, z_j^{(k)}(\alpha_k) = 0$$

(через $Z_{l,j}^{(k)}$ обозначены компоненты матриципта $Z^{(k)}$), которое позволяет, очевидно, выразить компоненту $z_{n-1}^{(k)}(\xi)$ через оставшиеся компоненты $z_j^{(k)}(\alpha_k)$, $j = 0, 1, \ldots, n-2$.

Если теперь ввести новый вектор $(n-1)$-го порядка $z_*^{(k)}(\xi)$, отличающийся от прежнего отсутствием компоненты $z_{n-1}^{(k)}(\xi)$, то можно получить для него такое представление

$$z_*^{(k)}(z) = Z_*^{(k)}(\xi)\, z_*^{(k)}(\alpha_k) \tag{2.11}$$

где $Z_*^{(k)}$ — матрица $(n-1)$-го порядка, компоненты которой достаточно просто выражаются через компоненты матрицанта $Z^{(k)}$.

Для введенного таким образом вектора условия сопряжения можно записать в прежней форме, то есть

$$z_*^{(k)}(\alpha_k) = A_*^{(k)} z^{(k-1)}(\alpha_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{2.12}$$

Краевые условия тоже можно записать относительно введенного вектора $z_*^{(k)}$, то есть

$$A_* z_*^{(0)}(\alpha_0) + B_* z_*^{(m-1)}(\alpha_m) = \gamma_* \tag{2.13}$$

Применительно к рассмотренной выше слоистой упругой среде, на грани которой $z = h_0$ заданы напряжения $\tau_\alpha^{(0)}(h_0) = 0$, $\sigma_\alpha^{(0)}(h_0) = \sigma_0$, а на грани $z = h_m$ выполнено условие гладкого контакта $\tau_\alpha^{(m-1)}(h_m) = 0$, $w_\alpha^{(m-1)}(h_m) = 0$, причем между слоями (то есть при $z = h_k$; $k = 1, 2, \ldots, m-1$) находятся упругие гладкие пластинки с жесткостями D_k, в (2.12) и (2.13) следует положить

$$A_*^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & D_k\alpha^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_* = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Если же пластинки между слоями отсутствуют, а слои между собой находятся в условиях гладкого контакта, то $A_*^{(k)} = I$.

Располагая соотношениями (2.11) и (2.13) и поступая точно так же, как и выше, придем к формулам (2.7) и (2.9), в которых следует положить $f^{(k)}$, $g_*^{(k)}$, $g_m = 0$ и заменить $Z^{(k)}$ и $z^{(k)}$ на $Z_*^{(k)}$ и $z_*^{(k)}$.

Мы рассмотрели случай, когда одна компонента вектора $z^{(k)}$ обращается в нуль на границе слоев. Точно также можно поступить, когда обращается в нуль несколько его компонент.

3. Наиболее трудным этапом в реализации изложенного метода является построение матрицанта. Исследуем этот вопрос для дифференциаль-

ных уравнений с постоянными коэффициентами. В этом случае уравнение (2.1) для матрицанта $Z^{(k)}(\xi)$ можно записать в таком виде:

$$\frac{dZ^{(k)}}{d\xi}+P^{(k)}Z^{(k)}=0, \quad (\alpha_k\leqslant\xi\leqslant\alpha_{k+1},\ Z(\alpha_k)=I, \quad P^{(k)}=\text{const}) \quad (3.1)$$

Согласно [6] в этом случае матрицант можно взять в виде

$$Z^{(k)}(\xi)=\exp[-P^{(k)}(\xi-\alpha_k)] \quad (3.2)$$

Использование такой формы матрицанта для решения краевой задачи (1.7), (1.8) и (1.10) (при $P_0^{(k)}=I,\ P_1^{(k)}=P^{(k)}$) особенно удобно, если

$$P^{(k)}=\lambda_kP+\mu_kQ, \quad PQ=QP \quad (k=0, 1,\ldots, m-1) \quad (3.3)$$

Действительно, в этом случае благодаря справедливости матричного соотношения $\exp P\cdot\exp Q=\exp(P+Q)$ формулы (2.7), (2.9) и (2.10) при $f^{(k)}=0,\ A^{(k)}=I$ принимают вид

$$z^{(k)}(\xi)=\exp[-P(\lambda_k\xi-\lambda_k\alpha_k+\lambda_{k-1}^{(k)})-Q(\mu_k\xi-\mu_k\alpha_k+\mu_{k-1}^{(k)})]z^{(0)}(\alpha_0) \quad (3.4)$$

$$(\alpha_k\leqslant\xi\leqslant\alpha_{k+1},\ k=0, 1,\ldots, m-1)$$

$$(A+BC_m)z^{(0)}(\alpha_0)=\gamma; \quad C_m=\exp[-P\lambda_{m-1}^{(m)}-Q\mu_{m-1}^{(m)}]$$

$$[\lambda_l^{(k)},\ \mu_l^{(k)}]=\sum_{j=0}^{l}[\lambda_{k-j-1},\ \mu_{k-j-1}](\alpha_{k-j}-\alpha_{k-j-1})$$

Однако, случаи представления (3.3), в основном, из-за требования перестановочности ($PQ=QP$) достаточно редки. Поэтому укажем еще один способ построения матрицанта, представляющего собой некоторую модификацию метода Коши [7].

Введем в рассмотрение матрицу

$$M(\zeta)=I\zeta+P^{(k)} \quad (3.5)$$

определитель которой, очевидно, будет многочленом степени n, то есть

$$|M(\zeta)|=Q_n(\zeta)=\prod_{j=0}^{n-1}(\zeta-\zeta_j) \quad (3.6)$$

Если ζ не совпадает ни с одним из корней этого многочлена, то будет существовать

$$M^{-1}(\zeta)=\Delta^*(\zeta)\,Q_n^{-1}(\zeta) \quad (3.7)$$

где $\Delta^*(\zeta)$ — матрица, транспонированная к матрице алгебраических дополнений для элементов матрицы (3.5).

Покажем, что

$$Z^{(k)}(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\Delta^*(\zeta)}{Q_n(\zeta)}\,l^{(\xi-\alpha_k)\zeta}\,d\zeta \quad (3.8)$$

(C — любой замкнутый контур, охватывающий все нули многочлена Q_n). Для этого подставим (3.8) в уравнение (3.1), примем во внимание, что матрица (3.7) является обратной к матрице (3.5) и воспользуемся теоремой Коши. В результате придем к требуемому тождеству. Остается еще показать, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{\Delta^*(\zeta)\,d\zeta}{Q_n(\zeta)} = I \tag{3.9}$$

Для этого достаточно подсчитать вычет подынтегрального выражения в (3.8) при $\zeta=\infty$, учтя при этом, что для алгебраических дополнений элементов матрицы (3.5) имеют место следующие асимптотические представления:

$$\Delta_{jk}(\zeta) = \begin{cases} O(\zeta^{n-2}), & j \neq k \\ \zeta^{n-1} + O(\zeta^{n-2}), & j = k \end{cases}$$

Полученное выражение (3.8) для матрицанта можно, очевидно, записать и в таком виде

$$Z^{(k)}(\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left[\frac{\Delta^*(\zeta)\, l^{(\xi-\alpha_k)\zeta}}{Q_n(\zeta)}\right]_{\zeta=\zeta_j} \tag{3.10}$$

В силу единственности решения уравнения (3.1) при $Z^{(k)}(\alpha_k) = I$ полученная формула (3.10) может одновременно служить и для подсчета показательной функции (3.2) от матричного аргумента.

4. В качестве простого, но типичного примера, иллюстрирующего существо предлагаемого подхода, рассмотрим задачу о продольных колебаниях (1.1) ступенчатого стержня: $a_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}$, $e_k^{-1} = E_k F_k$, $c_k = \rho_k F_k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Предполагая нулевые начальные условия, но произвольные граничные условия (при отсутствии загрузки и сосредоточенных масс в промежуточных сечениях), применяем к уравнениям (1.1) преобразование Фурье (с параметром α) по времени на интервале $(0, \infty)$. В результате придем к краевой задаче (1.7), (1.8) и (1.10), в которой следует принять ($\xi = x$, $\alpha_k = a_k$)

$$z^{(k)} = \begin{pmatrix} u_\alpha^{(k)} \\ N_\alpha^{(k)} \end{pmatrix}, \quad P_1^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & -e_k \\ c_k\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_0^{(k)} = A^{(k)} = I, \quad f^{(k)} = 0 \tag{4.1}$$

Для ее решения представим

$$P_1^{(k)} = P^{(k)} = c_k\alpha^2 C - e_k D, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

и возьмем матрицант в виде (3.2), то есть

$$Z^{(k)}(x) = \exp\left[-(x-a_k)(c_k\alpha^2 C - e_k D)\right] \tag{4.3}$$

В разбираемом случае от показательной функции можно избавиться и не прибегая к формуле (3.10). Вместо нее следует воспользоваться формулой

$$\exp(aA+bB)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(aA+bB)^n}{n!}=I\,\mathrm{ch}\sqrt{ab}+(aA+bB)\frac{\mathrm{sh}\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \tag{4.4}$$

Здесь a, b — произвольные числа, A, B — произвольные матрицы, обладающие свойствами

$$A^m=0,\quad B^m=0,\quad m\geqslant 2,\quad AB+BA=I \tag{4.5}$$

Вывод формулы (4.4) прост. Достаточно разбить суммирование в (4.4) по четным и нечетным степеням и воспользоваться (4.5).

Очевидно, матрицы C и D, содержащиеся в (4.2), обладают свойством (4.5), а потому на основании (4.4) будем иметь вместо (4.3) следующее выражение для матрицанта:

$$\begin{gathered}Z^{(k)}(x)=I\cos x_k+(De_k\varepsilon_k^{-1}-C\alpha^2c_k)\sin x_k\\ x_k=|\alpha|\varepsilon_k(x-a_k),\quad \varepsilon_k^2=c_ke_k=E_k\varphi_k^{-1}\end{gathered} \tag{4.6}$$

что позволяет записать решение разбираемой краевой задачи в виде

$$\begin{pmatrix}u_\alpha^{(k)}\\ N_\alpha^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x_k & e_k\varepsilon_k^{-1}\sin x_k\\ -c_k\varepsilon_k^{-1}\alpha^2\sin x_k & \cos x_k\end{pmatrix}B_kz^{(0)}(a_0) \tag{4.7}$$

$$k=0,1,\ldots,m-1$$

$$B_k=\Omega_{k-1}\Omega_{k-2},\ldots,\Omega_0$$

$$\Omega_k=\begin{pmatrix}\cos\omega_k & e_k\varepsilon_k^{-1}\sin\omega_k\\ -c_k\varepsilon_k^{-1}\alpha^2\sin\omega_k & \cos\omega_k\end{pmatrix},\quad \omega_k=(a_{k+1}-a_k)\varepsilon_k|\alpha|$$

Начальный вектор $z^{(0)}(a_0)$ определим из граничного условия

$$(A+BB_m)z^{(0)}(a_0)=\gamma \tag{4.8}$$

Если один торец $x=a_m$ ступенчатого стержня закреплен, а другой загружен продольной силой $Q(t)$, то в (4.8) следует положить

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \gamma=\begin{pmatrix}Q_\alpha\\0\end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Формулы (4.7), (4.8) и (4.9) одновременно дают решение задачи об установившихся вынужденных колебаниях разбираемого ступенчатого стержня при действии нагрузки $Q(t)=Q_\alpha e^{i\alpha t}$, причем $u(x,t)=u_\alpha(x)e^{i\alpha t}$ и $N(x,t)=N_\alpha e^{i\alpha t}$. Если же рассматриваются свободные колебания, то частотное уравнение относительно α получим ($\gamma=0$) из (4.8) приравниванием определителя к нулю, то есть

$$|A + BB_m| = 0 \tag{4.10}$$

Формулы (4.7) и (4.8) наглядно показывают, что предлагаемый здесь подход к решению задач для слоистых сред является обобщением метода начальных параметров [1] на случай дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными (кусочно-непрерывными) коэффициентами.

5. Выше предполагалось, что для уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $u_j(\alpha, \xi, \eta)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, описывающих краевую задачу для слоистой среды $\alpha_k \leqslant \xi \leqslant \alpha_{k+1}$ ($k=0, 1, \dots, m-1$), $\beta_0 \leqslant \eta \leqslant \beta_1$, $\gamma_0 \leqslant \zeta \leqslant \gamma_1$, существуют интегральные преобразования по переменным η и ζ. Это и позволило прийти к одномерной краевой задаче (1.7), (1.8) и (1.10). Однако, предлагаемый подход можно реализовать и в случае, когда таких преобразований нет. Для этого следует воспользоваться идеей метода начальных функций В. З. Власова [8] или символического метода А. И. Лурье [7], что позволит краевую задачу для слоистой среды записать по-прежнему в виде указанной одномерной задачи, но при этом в матрицах P_j ($j = 0, 1$) вместо параметров интегральных преобразований по переменным η и ζ будут содержаться операторы дифференцирования по этим переменным. Применяя те же построения, приходим вновь к соотношению (2.7), выражающему решение рассматриваемой проблемы через начальные функции $z_j^{(0)}(\alpha_0) = u_j(\alpha_0, \eta, \zeta)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ и к соотношению (2.9), которое теперь будет представлять собой дифференциальные уравнения бесконечного порядка по переменным η и ζ для упомянутых начальных функций[1].

Проиллюстрируем сказанное на примере стационарной задачи теплопроводности для слоистой среды $a_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$), $b_0 \leqslant y \leqslant b_1$, $c_0 \leqslant z \leqslant c_1$.

Считая в (1.2) операторы дифференцирования по y и z числами $\partial_1 = \partial/\partial y$, $\partial_2 = \partial/\partial z$ и полагая $\partial/\partial x = d/dx$, $\partial/\partial t = 0$, $f(x, y, z) = 0$, посредством исключения из третьего уравнения p и r приходим к следующему аналогу уравнения (1.4):

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \theta \\ q \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 \tag{5.1}$$

Здесь ради упрощения принято, что $k_2 = k_3$ и введены обозначения $\nu = k_1 k_2$, $\lambda = k_1^{-1}$.

Соответствующая система (1.7) в рассматриваемом случае будет второго порядка, и если считать, что ν остается постоянным для всех слоев, а меняется только λ, то

[1] В цитированной выше работе [8] применительно к задаче теории упругости для слоистой среды реализован иной путь получения дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно начальных функций. Отличие его от развиваемого здесь состоит в отсутствии привязки к соответствующей одномерной краевой задаче (1.7), (1.8) с общими условиями сопряжения (1.10), что приводит к потере общности и единообразия (но не исключает в отдельных случаях выигрыша в эффективности).

$$P_0^{(k)}=I,\quad P_1^{(k)}=\lambda_k P,\quad P=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -\nu\Delta & 0\end{pmatrix},\qquad f^{(k)}=0 \tag{5.2}$$

Таким образом, имеет место случай (3.3), причем $\mu_k=0$ и на основании формулы (3.4) имеем следующее выражение температурного поля в k-ом слое:

$$\begin{pmatrix}\theta^{(k)}\\ q^{(k)}\end{pmatrix}=\exp[-P(\lambda_k x-\lambda_k a_k+\lambda_{k-1}^{(k)})]\begin{pmatrix}\theta_0\\ q_0\end{pmatrix} \tag{5.3}$$

через начальные функции $\theta_0=\theta(a_0, y, z)$, $q_0=q(a_0, y, z)$, причем постоянные $\lambda_l^{(k)}$ определяются соответствующей формулой из (3.4) с заменой α_k на a_k.

Если для рассматриваемой задачи теплопроводности принять такие краевые условия

$$\theta\big|_{x=a_0}=\theta_0(y, z)=0;\quad \theta\big|_{x=a_m}=\theta_m(y, z) \tag{5.4}$$

то уравнение для начального вектора, содержащееся в (3.4), приобретает вид

$$(A+Be^{-Pl_m})\begin{pmatrix}0\\ g_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ Q_m\end{pmatrix},\quad l_m=\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j(a_{j+1}-a_j) \tag{5.5}$$

Входящая сюда показательная функция от матрицы легко вычисляется с помощью разложения [6]

$$e^{-Pl}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P^n(-l_m)^n}{n!} \tag{5.6}$$

Действительно, легко проверяется с учетом (5.2), что

$$P^{2j}=(-\nu\Delta)^j I,\qquad P^{2j+1}=(-\nu\Delta)^j P$$

и, следовательно, на основании (5.6) имеем

$$e^{-Pl}=I\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\nu\Delta)^j l_m^{2j}}{(2j)!}-l_m P\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\nu\Delta)^j l_m^{2j}}{(2j+1)!} \tag{5.7}$$

Принимая это во внимание, соотношение (5.5) приводит к следующему дифференциальному уравнению бесконечного порядка:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-k)^j l_m^{2j}}{(2j)!}\left(1-\frac{l_m}{2j+1}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^j q_0(y, z)=\theta_m(y, z) \tag{5.8}$$

относительно начальной функции $q_0(y, z)$, через которую согласно (5.3) выражается искомое температурное поле в исследуемой слоистой среде.

При малых величинах l_m можно ограничиться конечным отрезком ряда в левой части (5.8). К полученному таким образом приближенному уравнению нужно добавить граничные условия по цилиндрической поверхности, если таковой ограничено рассматриваемое слоистое тело: $a_0 < x < a_m$. При этом эти граничные условия следует записать в интегральном (осредненном) по толщине $(a_m - a_0)$ виде.

В заключение заметим, что в целях наибольшей ясности существа развиваемого подхода иллюстрирующие примеры проводились на задачах достаточно простых и хорошо исследованных. Включение же новых или малоисследованных (как правило, достаточно сложных и громоздких) увеличило бы сильно объем статьи. Поэтому такие задачи являются предметом дальнейших исследований.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступила 29 XII 1976

Գ. Յա. ՊՈՊՈՎ

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Շերտավոր միջավայրերի համար շատ խնդիրներ ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ բերվում են որոշ ինտերվալների վրա տրված միաչափ դիֆերենցիալ հավասարումների, որոնց թիվը հավասար է շերտերի թվին։

Նշված հավասարումների լուծումը բերվում է շերտերի թվին համեմատական կամավոր հաստատունների որոշմանը։

Հոդվածում առաջարկվում է նշված կամավոր պարամետրերի թվի, մինչև շերտերի քանակությունից չկախված, այլ դիֆերենցիալ հավասարումների կարգով որոշվող քանակությունը, նվազեցնելու ընդհանուր եղանակ։

Ցույց է տրվում, որ եղանակը կարող է օգտակար լինել նաև այն դեպքում, երբ սկզբնական խնդիրը շերտավոր միջավայրի համար չի կարող ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ բերվել միաչափ խնդրին։

ON SOLUTION OF PROBLEMS IN MECHANICS AND MATHEMATICAL PHYSICS FOR LAMINAR MEDIA

G. Y. POPOV

Summary

Many problems for laminar media are reduced by means of integral transforms to one-dimensional differential equations prescribed

for the regions whose number is equal to that of layers. The solution of the aforesaid equations leads to the definition of arbitrary constants (from conjugate conditions) proportional to the number of layers.

A general method of reduction of the above arbitrary parameters to the number determined by the order of the differential equations, independent of the number of layers, is suggested.

The method is shown to be useful in the case where the initial problem for the laminar medium may not be reduced (by means of integral transforms) to a one-dimensional problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов А. Н.* О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л., Изд. АН СССР, 1930.
2. *Петришин В. И., Приварников А. К., Шевляков Ю. А.* К решению задач для многослойных оснований. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
3. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван, Изд. Ереванского ун-та, 1976.
4. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Задачи теории упругости для многослойных сред. М., «Наука», 1973.
5. *Раппопорт Р. М.* К вопросу о построении решений осесимметричной и плоской задач теории упругости многослойной среды. Изв. Всесоюзн. НИИ гидротехн., т. 73, Л., 1963.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., Гостехтеориздат, 1954.
7. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. М.—Л., Гостехтеориздат, 1950.
8. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М., Физматгиз, 1960.
9. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехтеориздат, 1955.