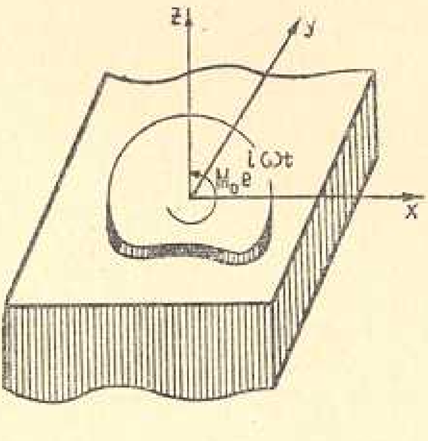
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, В. Г. БУРЯК

НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О КРУЧЕНИИ ШТАМПОМ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе рассматривается задача о совместном колебании упругого изотропного полупространства и жесткой на растяжение пластинки (штампа), к которой приложен крутящий момент (фиг. 1) $M_0 e^{i\omega t}$ (t — время). Изгибную жесткость пластинки предполагаем пренебрежимо малой. Между поверхностями штампа и полупространства в области их контакта Ω осуществлено полное сцепление. В дальнейшем, для краткости, говоря о напряжениях, перемещениях, сдвиге фаз, подразумеваем их амплитудные значения. Истинные значения получаются умножением на $e^{i\omega t}$. С помощью метода Винера-Хопфа получено приближенное решение задачи в достаточно простой форме для полосовой области контакта при больших значениях относительной частоты $\varkappa = \omega a (\rho/G)^{1/2}$ (ρ, G — плотность и модуль сдвига упругого полупространства, a — полуширина штампа). Насколько известно авторам, подобная задача ранее не рассматривалась.



Фиг. 1.

§ 1. Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$
\left.\begin{aligned} u &= f_1(x, y) \\ v &= f_2(x, y) \end{aligned}\right\} \text{ при } (x, y) \in \Omega \text{ и } z = 0
$$

$$
\sigma_z = 0 \text{ при любых } x, y \text{ и } z = 0 \tag{1.1}
$$

$$
\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ вне области } \Omega \text{ при } z = 0
$$

Здесь u и v — упругие перемещения по осям x и y, σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} — напряжения на площадке с нормалью z.

Пользуясь принципом предельного поглощения [1], в правой части системы уравнений Ляме, помимо инерционных членов, будем учитывать член $i\rho\varepsilon\omega^2\overline{u}$, $\varepsilon > 0$, соответствующий наличию вязкого трения. В этом случае нужно считать, что напряжения и перемещения на бесконечности исчезают. Используя двумерное преобразование Фурье, поставленную смешанную задачу сведем к системе двух двумерных интегральных уравнений первого рода

$$\iint_{\Omega} \tau_1(\xi, \eta) K_{11}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta + \iint_{\Omega} \tau_2(\xi, \eta) K_{12}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta =$$

$$= 4\pi^2 G f_1(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \tag{1.2}$$

$$\iint_{\Omega} \tau_1(\xi, \eta) K_{12}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta + \iint_{\Omega} \tau_2(\xi, \eta) K_{22}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi d\eta =$$

$$= 4\pi^2 G f_2(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

Здесь $\tau_1(x, y) = \tau_{xz}(x, y) = \tau_{11}(x, y) + i\tau_{12}(x, y)$, $\tau_2(x, y) = \tau_{yz}(x, y) = \tau_{21}(x, y) + i\tau_{22}(x, y)$ — касательные напряжения в области контакта,

$$K_{11}(p, s) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_1(\beta, \gamma, k) [F(\gamma, k)]^{-1} e^{i(\alpha p + \beta s)}\, d\alpha d\beta$$

$$K_{12}(p, s) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_2(\alpha, \beta, \gamma, k) [F(\gamma, k)]^{-1} e^{i(\alpha p + \beta s)}\, d\alpha d\beta$$

$$K_{22}(p, s) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_1(\alpha, \gamma, k) [F(\gamma, k)]^{-1} e^{i(\alpha p + \beta s)}\, d\alpha d\beta$$

$$F_1(\beta, \gamma, k) = -4\beta^2\gamma^2 + (3\beta^2 + \gamma^2 - k^2) k^2 + 4\beta^2 \sqrt{\gamma^2 - k^2} \sqrt{\gamma^2 - b_0^2 k^2}$$

$$F_2(\alpha, \beta, \gamma, k) = \alpha\beta (4\gamma^2 - 3k^2 - 4\sqrt{\gamma^2 - k^2} \sqrt{\gamma^2 - b_0^2 k^2})$$

$$F(\gamma, k) = \sqrt{\gamma^2 - k^2} [4\gamma^2 \sqrt{\gamma^2 - k^2} \sqrt{\gamma^2 - b_0^2 k^2} - (2\gamma^2 - k^2)^2]$$

$$F_1(\alpha, \gamma, k) = F_1(\beta, \gamma, k)\big|_{\beta=\alpha}, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$k^2 = \rho\omega^2 G^{-1} (1 - i\varepsilon), \qquad b_0^2 = (1-2\nu)/2(1-\nu)$$

ε — коэффициент пропорциональности, характеризующий внутреннее трение, ν — коэффициент Пуассона.

Для больших значений параметра $|k|$ и полосовой области контакта система уравнений (1.2) с точностью до членов порядка $\frac{1}{|k|^2}$ распадается на два независимых уравнения:

$$\int_{-a}^{a} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \tau_j(\xi, \eta)\, d\eta \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - k^2}}\, e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]} d\alpha\, d\beta = 4\pi^2 G f_j(x, y) \tag{1.3}$$

$$(j = 1, 2)$$

Принимая во внимание, что $f_1(x, y) = -\theta y$, $f_2(x, y) = \theta x$ и разыскивая решения уравнений (1.3) соответственно в форме

$$\tau_1(x, y) = -y\tau_1^*(x), \quad \tau_2(x, y) = \tau_2^*(x) \tag{1.4}$$

с учетом равенств

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \eta e^{i\beta(y-\eta)} d\eta\, d\beta = y, \quad \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta(y-\eta)}\, d\eta\, d\beta = 1$$

понимаемых в смысле теории обобщенных функций [2], убедимся, что $\tau_1^*(x)$ и $\tau_2^*(x)$ должны быть найдены из одномерных интегральных уравнений первого рода, которые в безразмерных переменных будут иметь вид

$$\int_{-1}^{1} \tau_j(\xi)\, k_\varepsilon[\varkappa(x - \xi)]\, d\xi = \pi\Delta f_j^*(x), \quad (|x| \leqslant 1,\ j = 1, 2) \tag{1.5}$$

$$k_\varepsilon[\varkappa(x-\xi)] = \int_0^\infty \frac{\cos[\varkappa(x-\xi)m]\, dm}{\sqrt{m^2 - (1 - i\varepsilon)}} \tag{1.6}$$

Здесь $\Delta = Ga^{-1}$, $f_1^*(x) = \theta$, $f_2^*(x) = \theta x$, $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ — амплитуда угла поворота штампа. Используя метод работы [3], получим главный член асимптотики решения уравнений (1.5) для больших $\varkappa$. С учетом обозначений (1.4) при $\varepsilon \to 0$ будем иметь

$$\tau_1(x, y) = -\Delta\theta\varkappa i\,[e^{-i\varkappa(1+x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1+x)} + \operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1+x)} +$$
$$+ e^{-i\varkappa(1-x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1-x)} + \operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1-x)} - 1]\, y \tag{1.7}$$

$$\tau_2(x, y) = \Delta\theta\varkappa i\left[\left(x - \frac{1}{2}i\varkappa\right) e^{-i\varkappa(1+x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1+x)} +\right.$$

$$+ x\operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1+x)} + \left(x + \frac{1}{2}i\varkappa\right) e^{-i\varkappa(1-x)}/\sqrt{i\pi\varkappa(1-x)} +$$

$$\left. + x\operatorname{erf}\sqrt{i\varkappa(1-x)} - x\right], \quad \left(\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2} ds\right)$$

Далее определим реактивный момент, действующий на штамп со стороны полупространства, отнесенный к единице длины

$$M_\varkappa = \frac{1}{2b}\int_{-1}^{1} dx \int_{-b}^{b} [x\tau_2(x, y) - y\tau_1(x, y)]\, dy = M_1 + iM_2 \tag{1.8}$$

Подставляя (1.7) в (1.8), получим

$$M_z = \Delta\theta[(1+4\varkappa i)\operatorname{erf}\sqrt{2\varkappa i} + 2\sqrt{2\varkappa i}\, e^{-2\varkappa i}/\sqrt{\pi} - 2\varkappa i]/3 \qquad (1.9)$$

$$(M_z = M_z'/b^2, \quad M_z = M_1 + iM_2)$$

В формулах (1.8) и (1.9) учтено, что штамп не бесконечно длинный, а имеет конечную, но достаточно большую длину.

§ 2. Получим формулы для подсчета угла сдвига фаз φ и модуля комплексной амплитуды колебания штампа θ_0. Запишем уравнение вращательного движения штампа относительно оси z

$$J_z \frac{d^2}{dt^2}(\theta e^{i\omega t}) = M_0 e^{i\omega t} - M_z e^{i\omega t} \qquad (2.1)$$

где

$$\operatorname{Jm} M_0 = 0, \ J_z = J_z'/b^2, \ M_0 = M_0'/b^2$$

J_z' — момент инерции штампа относительно оси z.

Выполнив дифференцирование в (2.1) и произведя разделение действительной и мнимой частей, получим, принимая во внимание (1.9)

$$M_0 = \theta_1(A_{11} - J_z\omega^2) + A_{12}\theta_2, \quad 0 = \theta_1 A_{21} + \theta_2(A_{22} - J_z\omega^2) \qquad (2.2)$$

Решая систему (2.2) относительно θ_1 и θ_2, найдем

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \theta_2/\theta_1 = A_{21}^*(\varkappa^2 J_z^* - A_{22}^*)^{-1}$$

$$\theta_0^* = [(\varkappa^2 J_z^* - A_{11}^*)^2 + (A_{12}^*)^2]^{-1/2} \qquad (2.3)$$

Здесь

$$J_z^* = J_z(a\rho)^{-1}, \quad A_{nj}^* = A_{nj}/\Delta, \quad (n, j = 1, 2)$$

$$M_1 = (A_{11}\theta_1 + A_{12}\theta_2)\Delta, \quad M_2 = (A_{21}\theta_1 + A_{22}\theta_2)\Delta \qquad (2.4)$$

$$A_{22} = A_{11}, \quad A_{21} = -A_{12}, \quad \theta_0^* = \theta_0\Delta/M_0, \quad \theta_0 = (\theta_1^2 + \theta_2^2)^{1/2}$$

Результаты вычисления величин

$$\tau_{11}(0, 1)/\Delta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2, \quad \tau_{12}(0, 1)/\Delta = -a_2\theta_1 + a_1\theta_2$$

$$\tau_1(1, 1)/\Delta[\theta_1 - \theta_2 + i(\theta_1 + \theta_2)] = a_3, \quad \tau_{21}^*(1, 1)/\Delta = b_1\theta_1 + b_2\theta_2$$

$$\tau_{22}^*(1, 1)/\Delta = -b_2\theta_1 + b_1\theta_2, \quad \tau_j^*(1, 1) = \lim_{x\to 1}\tau_j(x, 1)\sqrt{1-x}$$

$$M_1/\Delta = c_1\theta_1 + c_2\theta_2, \quad M_2/\Delta = -c_2\theta_1 + c_1\theta_2$$

$$c_1 = A_{11}, \quad c_2 = A_{12}$$

произведенные по найденным в п. 1 асимптотическим формулам, сведены в табл. 1, 2.

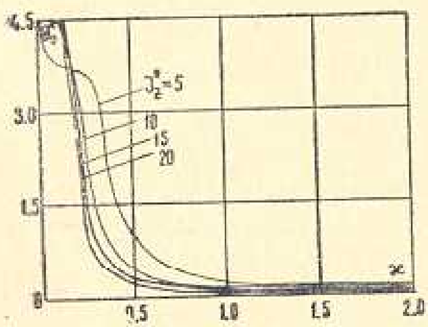
Таблица 1

$\varkappa$	a_1	a_2	b_1	b_2
0.25	−0.3036	0.2526	0.598	0.199
0.50	−0.3077	0.3672	0.564	0.000
0.75	−0.2458	0.5132	0.576	−0.115
1.00	−0.1542	0.6982	0.598	−0.199
1.25	−0.0524	0.9213	0.624	−0.268
1.50	0.0469	1.1781	0.651	−0.326
1.75	0.1348	1.4628	0.678	−0.377
2.00	0.2054	1.7690	0.705	−0.423
2.25	0.2549	2.0897	0.731	−0.465
2.50	0.2817	2.4182	0.757	−0.505

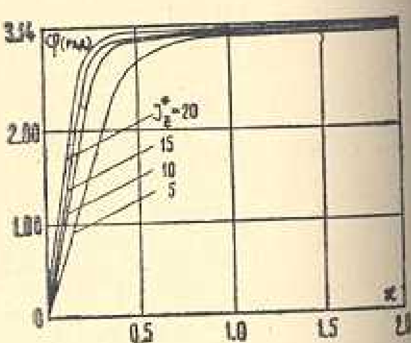
Таблица

$\varkappa$	a_3	c_1	c_2
0.25	−0.199	0.3168	−0.2750
0.50	−0.282	0.3745	−0.3908
0.75	−0.345	0.3825	−0.5139
1.00	−0.399	0.3703	−0.6532
1.25	−0.446	0.3517	−0.8078
1.50	−0.489	0.3345	−0.9741
1.75	−0.528	0.3226	−1.1477
2.00	−0.564	0.3170	−1.3244
2.25	−0.598	0.3172	−1.5007
2.50	−0.631	0.3215	−1.6745

На фиг. 2, 3 изображены зависимости величин φ и θ_0^* от безразмерной частоты $\varkappa$ при различных значениях безразмерного момента инерции J_z^*.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Видно, что для значений $\varkappa \geqslant 0.25$ модуль комплексной амплитуды уменьшается с увеличением $\varkappa$ и J_z^*, а угол сдвига фаз φ увеличивается с увеличением $\varkappa$ и J_z^*, что вполне соответствует физическому смыслу задачи.

Ростовский государственный
университет
Ворошиловградский
машиностроительный институт

Поступила 29 XII 1976

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Վ. Գ. ԲՈՒՐՅԱԿ

ԴՐՈՇՄՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՈԼՈՐՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՈՉ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է առաձգական կիսատարածության և դրոշմի համատեղ տատանման վերաբերյալ ոչ առանցքասիմետրիկ խնդիրը, երբ դրոշմի վրա կիրառվել է ըստ ժամանակի հարմոնիկ օրենքով փոփոխվող ոլորող մոմենտ։

Խնդրի լուծումը բերվել է երկչափանի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի։

Ցույց է տրված, որ տատանումների բավականաչափ մեծ հաճախականության դեպքում այդ հավասարումները կարելի է լուծել միմյանցից անկախ։

Վիներ-Խոպֆի մեթոդի օգնությամբ ստացվել է ասիմպտոտական լուծում պլանում խիստ ձգված ուղղանկյունաձև դրոշմի տատանումների համար։

THE AXIASYMMETRIC DYNAMIC PROBLEM ON STAMP TORSION OF A RESILIENT SEMISPACE

V. M. ALEXANDROV, V. G. BURYAK

Summary

The axiasymmetric dynamic problem on joint vibration of a resilient semispace and stamp is considered.

Torque changable by harmonic law dependent of time is applied to the stamp. The problem is reduced to a system of two two-dimensional integral equations of the first kind. It is shown that at a sufficiently great frequency of vibration these equations may be solved irrespective of each other. By the Wiener-Hopf method an asymptotic solution in an analytic space is obtained for the case of vibration of the stamp of a strongly expanded rectangular shape in plane.

All the major characteristics of the problem are examined numerically.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М., «Наука», 1976.
3. *Александров В. М., Буряк В. Г.* Динамическая смешанная задача деформации чистого сдвига для упругого полупространства. Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 4.