ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա XXXI, № 2, 1978 Механика

М. Н. М. АЛЛАМ, Б. Е. ПОБЕДРЯ

К РЕШЕНИЮ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

1. Рассмотрим линейную вязкоупругую анизотропную среду, для которой связь между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} имеет вид [1]

$$\sigma_{ij}=\int_0^t R_{ijkl}(t-\tau)\,d\varepsilon_{kl}(\tau) \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{ij}=\int_0^t \Pi_{ijkl}(t-\tau)\,d\sigma_{kl}(\tau) \tag{1.2}$$

Тензоры ядер релаксации $R_{ijkl}(t)$ и ядер ползучести $\Pi_{ijkl}(t)$ являются взаимообратными. Это означает, что если нам известен один из этих тензоров, например, $R_{ijkl}(t)$, то тензор ядер ползучести получается из решения следующих интегральных уравнений:

$$\int_0^t R_{ijkl}(t-\tau)\,d\Pi_{klmn}(\tau)=\Delta_{ijmn}-R_{ijkl}(t)\,\Pi_{klmn}(0) \tag{1.3}$$

где

$$\Delta_{ijmn}\equiv\frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{in}\delta_{jm}) \tag{1.4}$$

И обратно, если задан тензор ядер ползучести $\Pi_{ijkl}(t)$, то для тензора ядер релаксации имеем

$$\int_0^t \Pi_{ijkl}(t-\tau)\,dR_{klmn}(\tau)=\Delta_{ijmn}-\Pi_{ijkl}(t)\,R_{klmn}(0) \tag{1.5}$$

Экспериментально замечено [1], что для большинства реальных вязкоупругих материалов объем изменяется по упругому закону. Из соотношений (1.2) для изменения объема $\theta=\varepsilon_{ii}$ имеем

$$\theta=\int_0^t \Pi_{iikl}(t-\tau)\,d\sigma_{kl}(\tau) \tag{1.6}$$

и каков бы ни был тензор σ_{kl}

$$\sigma_{kl} = \sigma^0_{kl} h(t) \tag{1.7}$$

где σ^0_{kl} — тензор-константа, а $h(t)$ — единичная функция Хевисайда, величина θ не должна зависеть от времени. Это означает, что не должен зависеть от времени тензор $B_{kl} \equiv \Pi_{iikl}$, то есть

$$B_{kl} \equiv \Pi_{iikl} = \Pi_{iikl}(0) \tag{1.8}$$

Умножая левую и правую части (1.5) на δ_{ij} и производя суммирование по i и j, получим

$$B_{kl} R_{klmn}(t) = \delta_{mn} \tag{1.9}$$

то есть левая часть этого равенства также не должна зависеть от времени.

2. Частным видом анизотропии является так называемая структурная анизотропия. Пусть материал составлен из двух компонентов, один из которых (армировка) является изотропным упругим материалом с модулем Юнга E_a и коэффициентом Пуассона ν_a, а другой (заполнитель) — изотропным вязкоупругим материалом с модулем сжатия $K_з$ и ядром $\omega(t)$, то есть связь между напряжениями и деформациями для заполнителя имеет вид (индексы а и з, если это не вызывает недоразумений, мы будем опускать, то есть будем считать, что если индекс отсутствует, $\nu = \nu_a$, $E = E_a$, $K = K_з$)

$$s_{ij} = 3K \int\limits_0^t \omega(t-\tau)\, de_{ij}(\tau) \equiv 3K \overset{*}{\omega} e_{ij}; \quad \sigma = K\theta \tag{2.1}$$

где

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk} \tag{2.2}$$

и обратно

$$e_{ij} = \frac{1}{3K} \int\limits_0^t \pi(t-\tau)\, dS_{ij}(\tau) = \frac{1}{3K} \overset{*}{\pi} S_{ij}; \qquad \theta = \frac{\sigma}{K} \tag{2.3}$$

Тогда различными способами можно ввести так называемые эффективные ядра релаксации $R_{ijkl}(t)$ или ползучести $\Pi_{ijkl}(t)$. При этом эти ядра имеют вид [2]

$$\begin{gathered} R_{ijkl}(t) = \sum_{\alpha=1}^{V} R^{(\alpha)}_{ijkl} \psi_\alpha(t) \\ \Pi_{ijkl}(t) = \sum_{\beta=1}^{U} \Pi^{(\beta)}_{ijkl} \chi_\beta(t) \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $R^{(\alpha)}_{ijkl}$ и $\Pi^{(\beta)}_{ijkl}$ — тензоры-константы, зависящие от ν_a, E_a, $K_з$, процентного содержания компонентов γ, геометрии армировки и т. п.;

$\psi_2(t)$ — функция, представляющая собой или единицу, или $\omega(t)$, или ядро А. А. Ильюшина $g_\beta(t)$ [1]

$$\dot{g}_\beta = \frac{1}{1+\beta\dot{\omega}} \tag{2.5}$$

$\chi_\beta(t)$ — функция, являющаяся или единицей, или $\pi(t)$, или ядром (2.5).

В литературе известны эффективные модули упругости, построенные на основе различных подходов. Например, для слоистого композита, отношение толщины слоя армировки в котором к толщине всего пакета, из которых составлен материал, равно γ, эффективные ядра ползучести могут быть построены на основании эффективных модулей упругости [3]

$$\Pi_{ijkl}(t) = \Pi^{(1)}_{ijkl} + \Pi^{(2)}_{ijkl} g_{\beta_1}(t) + \Pi^{(3)}_{ijkl} g_{\beta_2}(t) + \Pi^{(4)}_{ijkl}\pi(t) \tag{2.6}$$

где

$$\Pi^{(1)}_{1111} = \Pi^{(1)}_{2222} = \Pi^{(1)}_{1122} = \frac{1-\nu}{\gamma\beta_1 E} \equiv L$$

$$\Pi^{(1)}_{1133} = \Pi^{(1)}_{2233} = \frac{(1-\gamma)(1-\nu)-2\gamma\nu}{\gamma\beta_1 E}$$

$$\Pi^{(1)}_{3333} = \frac{2\gamma\nu-(1-\gamma)(1-\nu)}{\gamma(1-\nu)\beta_1 E} + \frac{\gamma(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}$$

$$\Pi^{(1)}_{1313} = \Pi^{(1)}_{2323} = \frac{1(1+\nu)\gamma}{E}$$

$$\Pi^{(2)}_{1111} = \Pi^{(2)}_{2222} = \frac{2\beta_2(1-\nu)-(\beta_1-2)}{\gamma(\beta_2-\beta_1)E} - \frac{\beta_2(1-\nu)}{\gamma\beta_1(\beta_2-\beta_1)E} \equiv M_1$$

$$\Pi^{(2)}_{1122} = \frac{\nu(\beta_1-2)+\beta_2(1-\nu)}{\gamma(\beta_2-\beta_1)E} - \frac{\beta_2(1-\nu)}{\gamma\beta_1(\beta_2-\beta_1)E} \equiv M_2$$

$$\Pi^{(2)}_{1133} = \Pi^{(2)}_{2233} = \frac{2\gamma\nu-(1-\gamma)(1-\nu)}{\gamma\beta_1 E} - \frac{\gamma\nu+(1-\gamma)(1-\nu)}{\gamma E}$$

$$\Pi^{(3)}_{1111} = \Pi^{(3)}_{2222} = \frac{1}{\gamma E} - L - M_1$$

$$\Pi^{(3)}_{1122} = -\frac{\nu}{\gamma E} - L - M_2$$

$$\Pi^{(3)}_{1212} = \frac{2(1+\nu)}{\gamma E}$$

$$\Pi^{(4)}_{1313} = \Pi^{(4)}_{2323} = \frac{2(1-\gamma)}{3K} \tag{2.7}$$

$$\beta_1 = 2 + \frac{9K}{E}\frac{1-\gamma}{\gamma}(1-\nu)$$

$$\beta_2 = \frac{3K}{E}\frac{1-\gamma}{\gamma}(1+\nu) \tag{2.8}$$

В соотношениях (2.7) выписаны только отличные от нуля компоненты тензоров структурных постоянных с учетом симметрии [1]:

$$\Pi_{ijkl} = \Pi_{klij} = \Pi_{jikl} = \Pi_{ijlk} \tag{2.9}$$

3. Подставляя в (1.7) выражение эффективных ядер ползучести в виде (2.4), получим вместо тензора-константы B_{kl} выражение

$$B^*_{kl}(t) = \sum_{\beta=1}^{U} \Pi^{(\beta)}_{iikl}\chi_\beta(t) \tag{3.1}$$

Тензор $B^*_{kl}(t)$ отличен от постоянного тензора B_{kl} и совпадает с ним только в случае $\gamma = 0$, $\gamma = 1$ или при любом γ, если $K_в = K_и$ $(E = 3K(1-2\nu))$. За меру отклонения тензора $B^*_{kl}(t)$ от тензора-константы B_{kl} можно взять величину ξ, отнесенную к какой-нибудь величине, имеющей размерность упругой податливости:

$$\xi = \left(\sum_{q=1}^{U_1} \Pi^{(q)}_{iikl}\Pi^{(q)}_{jjkl}\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

где суммирование ведется по всем q, для которых $\chi_q(t)$ отлично от тождественной постоянной, $U_1 \leqslant U$.

Для рассмотренного в предыдущем пункте примера имеем

$$\xi = \sqrt{\eta_{(2)} + \eta_{(3)} + \eta_{(4)}} \tag{3.3}$$

где

$$\eta_{(\alpha)} \equiv \Pi^{(\alpha)}_{iikl}\Pi^{(\alpha)}_{jjkl}, \quad (\alpha = 2, 3, 4) \tag{3.4}$$

Компоненты тензора $B^*_{kl}(t)$ имеют вид

$$B^*_{11} = B^*_{22} = P_1 + \left(\frac{1-2\nu}{E} - P_1\right) g_{\beta_1}(t)$$

$$B^*_{33} = P_2 + P_3 g_{\beta_1}(t) \tag{3.5}$$

где β_1 для ядра $g_{\beta_1}(t)$ дается формулой (2.8), а постоянные P_1, P_2, P_3

$$P_1 = \frac{1}{\gamma\beta_1 E}[3(1-\nu) - \gamma(1+\nu)]$$

$$P_2 = \frac{\gamma(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} + \frac{(1-\gamma)(1-\nu) - 2\gamma\nu}{1-\nu} P_1$$

$$P_3 = \left[\frac{9(1-\gamma)\beta_1}{2-\beta_1} + \frac{(1-\gamma)(1-\nu) - 2\gamma\nu}{1-\nu}\right]\left[\frac{1-2\nu}{E} - P_1\right] \tag{3.6}$$

Следовательно, величина ξ имеет вид

$$\xi = \left| \frac{1-2\nu}{E} - P_1 \right| \left[2 + \left(\frac{9(1-\gamma)\beta_1}{2-\beta_1} + \frac{(1-\gamma)(1-\nu)-2\gamma\nu}{1-\nu} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{3.7}$$

Вычисления показывают, что ξ не превосходит $\dfrac{1}{E}$.

4. При решении квазистатических задач линейной теории вязкоупругости для композитов может быть использован метод сведения неоднородной задачи изотропной вязкоупругости к последовательности задач однородной анизотропной теории вязкоупругости аналогично тому, как это сделано в упругом случае [2]. При этом для решения в каждом приближении задачи однородной анизотропной теории вязкоупругости благодаря специальному виду эффективных ядер релаксации и ползучести (2.4) может быть использовано некоторое обобщение метода аппроксимаций [1].

Суть этого обобщения заключается в следующем. Пусть получено решение соответствующей упругой задачи для анизотропной среды и пусть в этом решении встречается выражение типа $\bar{f}(\cdot)Q$, где Q — известная величина, $\bar{f}(\cdot)$ означает функцию от модулей анизотропной упругости. Подставляя вместо этих модулей их выражения через величины ν_a, E_a, K_a и ω, получим функцию $f=f(\omega)$, которую аппроксимируем с помощью ядер $\psi_\alpha(t)$ и $\chi_\beta(t)$, входящих в представление (2.4):

$$f(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{V} A_{(\alpha)}\psi_\alpha + \sum_{\beta=1}^{U} B_{(\beta)}\chi_\beta \equiv \sum_{\alpha=1}^{U+V} C_{(\alpha)}\varphi_\alpha \tag{4.1}$$

где $\varphi_\alpha(t)$ представляет собой единицу или ядра $\omega(t)$, $\pi(t)$ или $g_\beta(t)$, определяемые соотношением (2.5).

Неизвестные постоянные $C_{(\alpha)}$ можно определить, например, методом наименьших квадратов. Для этого записывается выражение

$$J \equiv \int_{\omega'}^{\omega''} \left[f(\omega) - \sum_{\alpha=1}^{U+V} C_{(\alpha)}\varphi_\alpha \right]^2 d\omega \tag{4.2}$$

где ω' и ω'' — границы изменения ядра $\omega(t)$, $0 \leqslant \omega' < \omega'' \leqslant 1$, например,

$$\omega'' = \omega_0 = \omega(0), \quad \omega' = \omega_\infty = \lim_{t\to\infty} \omega(t) \tag{4.3}$$

Приравнивая нулю производные $\dfrac{\partial J}{\partial C_{(\alpha)}}$, получаем систему алгебраических уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial C_{(\beta)}} \equiv -2 \int_{\omega'}^{\omega''} \left[f(\omega) - \sum_{\alpha=1}^{U+V} C_{(\alpha)}\varphi_\alpha \right] \varphi_\beta d\omega = 0$$

$$\beta = 1, \ldots, U+V \tag{4.4}$$

для определения величин $C_{(\alpha)}$. После этого искомое вязкоупругое решение получается расшифровкой выражения $f(\cdot)Q$ в следующем виде:

$$\sum_{\alpha=1}^{U+V} C_{(\alpha)} \int_0^t \varphi_\alpha (t-\tau)\, dQ(\tau) \tag{4.5}$$

Если пределы ω' и ω'' заранее неизвестны и удобно вести интегрирование в (4.2) от 0 до 1, иногда, чтобы исключить возможность появления сингулярностей, полезно в подынтегральное выражение вводить некоторую положительную весовую функцию $\Omega(\omega)$:

$$J = \int_0^1 \Omega(\omega) \left[f(\omega) - \sum_{\alpha=1}^{U+V} C_{(\alpha)} \varphi_\alpha \right]^2 d\omega \tag{4.6}$$

5. В качестве примера рассмотрим задачу о растяжении силой P в направлении оси x бесконечной ортотропной пластинки. Из решения упругой задачи [4] следует, что максимальное напряжение σ_θ возникает на контуре окружности в точках пересечения оси x, проходящей через центр окружности, и равно

$$(\sigma_\theta)_{max} = (1 + \varkappa_1 + \varkappa_2)\, P \tag{5.1}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — корни бигармонического уравнения.

$$\frac{\varkappa^4}{E_x} - \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x}\right)\varkappa^2 + \frac{1}{E_y} = 0 \tag{5.2}$$

причем

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = \sqrt{2\left(\sqrt{\frac{E_x}{E_y}} - \nu_{xy}\right) + \frac{E_x}{G_{xy}}} \tag{5.3}$$

где E_x, E_y, G_{xy}, ν_{xy} — модули упругости ортотропной пластинки [4].

В работе [2] для плоско-напряженного состояния даны выражения тензора эффективных ядер ползучести. Компоненты этого тензора выражаются через операторы 1, $\breve{g}_3$, $\breve{\pi}$, где

$$\breve{g}_3 = \frac{1}{1+\beta\omega}, \quad \beta = \frac{1}{2}\left(1 + 9M\frac{1-\gamma}{\gamma}\right), \quad M = \frac{K_a}{E_a} \tag{5.4}$$

Подставляя в (5.3) вместо модулей упругости соответствующие операторы, получим

$$F(\omega) = \varkappa_1 + \varkappa_2 = 2\left\{1 - m(1-\nu) + \sqrt{1 + \frac{m[2+(1-9M)\omega]^2}{9M\omega(2+\omega)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{m}{3M}\, \frac{2 + (1-9M)\omega + 27M^2(1+\nu)\omega^2}{\omega(2+\omega)}\right\}^{1/2} \tag{5.5}$$

где

$$m \equiv \gamma(1-\gamma) \tag{5.6}$$

Запишем аппроксимацию функции $F(\omega)$ в виде

$$F(\omega) = A_1 + A_2\pi + A_3 g_\beta \tag{5.7}$$

Чтобы иметь возможность интегрировать в (4.6) от 0 до 1, введем весовую функцию $\Omega=\omega$. Тогда

$$\omega F(\omega) = B_1 + B_2\omega + B_3 g_\beta \tag{5.8}$$

где

$$B_1 = A_2 + \frac{A_3}{\beta}, \quad B_2 = A_1, \quad B_3 = -\frac{A_3}{\beta} \tag{5.9}$$

Для нахождения величин $B_i (i = 1, 2, 3)$ имеем систему алгебраических уравнений

$$L_{ij} B_j = N_i \tag{5.10}$$

где

$$L_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j d\omega, \quad N_i = \int_0^1 \omega F(\omega)\, \varphi_i d\omega$$

$$\varphi_1 \equiv 1, \quad \varphi_2 \equiv \omega, \quad \varphi_3 \equiv g_\beta \tag{5.11}$$

После решения системы (5.10) получим, учитывая (5.9) для коэффициента концентрации $k \equiv \frac{(\sigma_\theta)_{max}}{P}$

$$k = 1 + A_1 + A_2\pi(t) + A_3 g_\beta(t) \tag{5.12}$$

В частности, для ядра $\omega(t)$ в виде

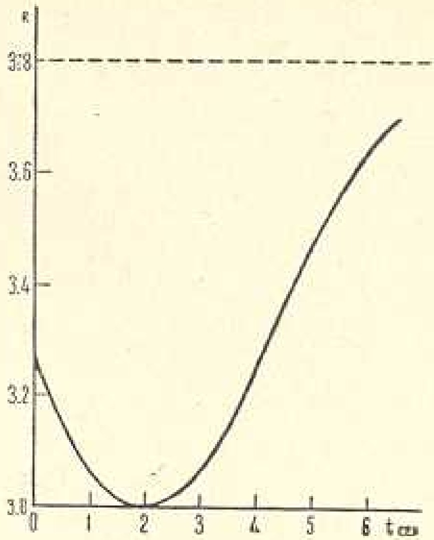
$$\omega(t) = a + be^{-\alpha t} \tag{5.13}$$

имеем

$$k = 1 + A_1 + A_2\left[\frac{1}{a} - \frac{b}{a(a+b)} e^{-\frac{\alpha a}{a+b}t}\right] +$$

$$+ A_3\left[\frac{1}{1+\beta a} - \frac{\beta b}{(1+\beta a)(1+\beta a+\beta b)} e^{-\frac{\alpha(1+\beta a)}{1+\beta a+\beta b}t}\right] \tag{5.14}$$

На фиг. 1 показана зависимость $k(t)$ при следующих параметрах:



Фиг. 1.

$$\nu_a = 0.4, \quad E_a = 10^6 \ \frac{кг}{см^2}, \quad K_a = 10^5 \frac{кг}{см^2}, \quad m = 0.1$$

$$a = 0.01, \quad b = 0.99, \quad \alpha = 1$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 27 V 1977

Մ. Ն. Մ. ԱԼԱՄ, Բ. Ե. ՊՈԲԵԴՐՅԱ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՄԱԾՈՒՑԻԿՈԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՔՎԱԶԻՍՏԱՏԻԿ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Աշխատանքում քննարկվում է բաց կառուցվածքի անիզոտրոպ մածուցիկոառաձգական միջավայրերի ծավալային դեֆորմացիան։

Այդպիսի միջավայրերի համար քվազիստատիկ խնդիրների լուծման համար առաջարկվում է եղանակ, որը հիմնված է ապրոքսիմացիայի եղանակի ընդհանրացման վրա։ Տրվում է թվային օրինակ։

ON SOLUTION OF QUASI-STATICAL PROBLEMS IN THE NONISOTROPIC THEORY OF VISCOELASTICITY

M. N. M. ALLAM, B. E. POBEDRYA

S u m m a r y

The volumetric deformations of structural nonisotropic media are discussed. A method of solution based on a generalization of the approximation method is suggested for the solution of quasi-statical problems. A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970, 280 с.
2. *Победря Б. Е.* О структурной анизотропии в вязкоупругости. Механика полимеров, 1976, № 4, с. 622—626.
3. *Победря Б. Е., Горбачев В. И.* О статических задачах упругих композитов. Вестник Моск. университета, сер. 1, 1977, № 6.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.—Л., 1947, 356 с.