

И. И. КУДИШ

УПРУГО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЯЖЕЛО НАГРУЖЕННОГО КОНТАКТА КАЧЕНИЯ

В работе исследуется плоская изотермическая упруго-гидродинамическая задача для тяжело нагруженного контакта качения двух бесконечно длинных цилиндров, разделенных тонким слоем вязкой жидкости. Смазка считается несжимаемой ньютоновской жидкостью.

Минимальная толщина слоя смазки является одной из наиболее важных характеристик упруго-гидродинамического контакта. Определению толщины слоя смазки посвящено большое количество работ, из которых первыми являются работы [1, 2, 3].

В тяжело нагруженном контакте толщина слоя смазки мала, а область контакта близка к герцевской. Поэтому почти во всей области контакта, за исключением малых зон входа и выхода из нее, основной вклад в решение вносит упругое взаимодействие цилиндров; при этом давление в указанной области весьма близко к герцевскому. Это означает, что в рассматриваемой области смазочный слой практически не оказывает влияния на величину и характер распределения давления. В зонах же входа и выхода вклад смазочного слоя соизмерим с вкладом сил упругости, поэтому пренебрегать первым из них уже нельзя. При дальнейшем удалении от герцевской зоны основной вклад в решение начинает вносить смазочный слой. Как будет показано ниже, толщина слоя, в основном, определяется поведением решения в зонах входа и выхода, существенно меньших герцевской площадки контакта. Поэтому очень важно детально изучить поведение смазки именно в этих малых зонах. Однако, обычно применяемые методы решения поставленной задачи как, например, метод сквозных численных расчетов, обходят этот вопрос и лишь весьма приближенно выявляют механизм образования масляной пленки.

Наиболее эффективным методом решения поставленной задачи является метод сращиваемых асимптотических разложений [4, 5], позволяющий подробно исследовать поведения смазки в каждой из перечисленных зон и их влияние на толщину слоя смазки. Этот метод использован при решении данной задачи. Получена система асимптотически справедливых уравнений, разрешенных численно. Для толщины слоя смазки найдены асимптотические оценки.

1. Как известно [1, 2], поставленная задача сводится к системе уравнений

$$\frac{dp}{dx} = 12 u \nu \frac{h - h_l}{h^3}, \quad h = h_l + \frac{x^2 - x_l^2}{R} + \frac{4}{\pi E'} \int_{x_l}^{x_l} p(t) \ln \frac{x_l - t}{|x - t|} dt$$

$$\nu = \nu_0 e^{\alpha p^m}, \quad m > 0 \quad (1.1)$$

$$p(x_l) = p(x_r) = 0, \quad \int_{x_l}^{x_r} p(x) dx = F \quad (1.2)$$

При этом x — пространственная переменная, отсчитываемая поперек полоски контакта в направлении движения смазки; x_l, x_r — координаты точек входа и выхода из области контакта; $p(x)$ и $h(x)$ — распределения давления и зазора между цилиндрами; $\mu(x)$ — динамическая вязкость смазки; μ_0 — вязкость смазки при атмосферном давлении и температуре контакта; α — пьезокоэффициент вязкости; m — показатель степени; $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ — полусумма линейных скоростей поверхностей цилиндров; h_l — толщина слоя смазки в точке выхода из области контакта; $R = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$ — приведенный радиус цилиндров; E' — приведенный модуль упругости материалов цилиндров $\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$; F — погонная нагрузка.

2. С помощью безразмерных величин

$x' = x/b_H$, $p' = p/p_H$, $h' = h/h_l$, $\nu' = \nu/\nu_0$, $a = x_l/b_H$, $c = x_r/b_H$ преобразуем уравнения (1.1) и (1.2) к виду (штрихи опущены)

$$\frac{dp}{dx} = \frac{V}{H_0^2} \frac{h-1}{h^3} e^{Q p^m}, \quad m > 0 \quad (2.1)$$

$$H_0(h-1) = x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt \quad (2.2)$$

$$p(a) = p(c) = 0 \quad (2.3)$$

$$\int_a^c p(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (2.4)$$

Здесь b_H и p_H , соответственно, полуширина герцевской площадки контакта и максимальное герцевское давление.

$$Q = 2p_H^m, \quad V = \frac{\nu}{Q^{1/m}}, \quad \nu = \frac{3u\nu_0 E'^3 \alpha^{4/m}}{2R}, \quad H_0 = \frac{h_l R}{b_H^2} \quad (2.5)$$

Задача состоит в отыскании величин $c, H_0, p(x)$ и $h(x)$.

Условимся называть контакт тяжело нагруженным, когда

$$Q \gg 1$$

Применение метода сращиваемых асимптотических разложений к задаче (2.1)–(2.4) при $Q \gg 1$ осложняется ее нелокальным характером, что проявляется во взаимном влиянии решений в зонах входа и выхода в приближениях одного порядка.

Согласно терминологии [4] под внешней областью будем понимать зону, для которой $x \pm 1 = O(1)$, а под внутренними областями — зоны входа и выхода, характерными размерами которых являются величины $\varepsilon_r = \varepsilon_r(V, Q, m)$ — для зоны входа и $\varepsilon_l = \varepsilon_l(V, Q, m)$ — для зоны выхода. При этом $x + 1 = O(\varepsilon_r)$, $x - 1 = O(\varepsilon_l)$ и $O(\varepsilon_r, \varepsilon_l) \ll 1$ при $Q \gg 1$.

Введем внутренние переменные следующим образом:

$$r = \frac{x + 1}{\varepsilon_r}, \quad s = \frac{x - 1}{\varepsilon_l}$$

Предположим, что координата a точки входа представима в виде

$$a = -1 + \alpha_1 \varepsilon_r, \quad \alpha_1 \sim 1 \quad (2.6)$$

тогда во внешней области ($x \pm 1 = O(1)$ и $p = O(1)$ при $Q \gg 1$) при ограниченной величине H_0 получим из уравнения (2.1) с экспоненциальной точностью

$$h - 1 = 0 \quad (2.7)$$

Перейдем в (2.2), (2.6) и (2.7) к пределу $Q \rightarrow \infty$; учитывая, что $\varepsilon_r \rightarrow 0$ при $Q \rightarrow \infty$, получим

$$x^2 - 1 + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \ln \frac{1-t}{|x-t|} dt = 0 \quad (2.8)$$

решением которого является герцевское давление

$$p_0(x) = \sqrt{1-x^2} \theta(1-x^2) \quad (2.9)$$

Так как внутренние асимптотические представления решения должны сращиваться с $p_0(x)$, порядки главных членов этих представлений равны $\varepsilon_r^{1/2}$ — в зоне входа и $\varepsilon_l^{1/2}$ — в зоне выхода.

3. Рассмотрим случай масляного голодания, когда

$$\varepsilon_r \ll Q^{-2/m} \quad (3.1)$$

Зная порядки решения в зонах входа и выхода, на основании (2.9) будем искать решение в виде асимптотических рядов: в зоне входа

$$p(x) = \varepsilon_r^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{rk} (V, Q, m) p_{rk}(r), \quad p_{rk}(r) = O(1), \quad \gamma_{r0} = 1 \quad (3.2)$$

и в зоне выхода

$$p(x) = \varepsilon_l^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{lk} (V, Q, m) p_{lk}(s), \quad p_{lk}(s) = O(1), \quad \gamma_{l0} = 1 \quad (3.3)$$

В герцевской зоне ($x \pm 1 = O(1)$) будем иметь

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k (V, Q, m) p_k(x), \quad p_k(x) = O(1), \quad \mu_0 = 1 \quad (3.4)$$

Величины c и H_0 будем искать в виде

$$c = 1 - \varepsilon_l \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k (V, Q, m) \beta_k, \quad \beta_k = O(1), \quad \delta_1 \ll 1 \quad (3.5)$$

$$H_0 = H_{00}(V, Q, m) \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k (V, Q, m) \gamma_k, \quad \gamma_k = O(1), \quad \tau_0 = \gamma_0 = 1$$

При этом $\{\mu_k\}$, $\{\gamma_{rk}\}$, $\{\gamma_{lk}\}$, $\{\delta_k\}$ и $\{\tau_k\}$ представляют собою асимптотические последовательности функций большого параметра Q .

Ограничимся в дальнейшем исследовании почти всюду главных членов асимптотических представлений (3.2)—(3.5).

Перейдем к решению задачи (2.1)—(2.4) при заданных a , V и $Q \gg 1$. Заменяя интеграл, входящий в (2.2), суммой интегралов по зонам входа, выхода и герцевской зоне, с помощью (2.2), (3.2)—(3.5) получим равномерно-пригодное асимптотическое представление для $h(x)$

$$\begin{aligned} H_0(h-1) = & H_0(h_H(x) - h_H(c)) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \int_{-1}^1 p_k(t) \ln \left| \frac{c-t}{x-t} \right| dt + \\ & + \frac{2}{\pi} \varepsilon_r^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \gamma_{rk} \int_{r_1}^{\infty} p_{rk}(r) \ln \left| \frac{c+1-r\varepsilon_r}{x+1-r\varepsilon_r} \right| dr - \mu_k \varepsilon_r^{-1/2} \int_0^{\infty} p_k(-1+r\varepsilon_r) \times \right. \\ & \times \ln \left| \frac{c+1-r\varepsilon_r}{x+1-r\varepsilon_r} \right| dr \left. + \frac{2}{\pi} \varepsilon_l^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \gamma_{lk} \int_{-\infty}^{\varepsilon_l} p_{lk}(s) \ln \left| \frac{c-1-s\varepsilon_l}{x-1-s\varepsilon_l} \right| ds - \right. \right. \\ & \left. \left. - \mu_k \varepsilon_l^{-1/2} \int_{-\infty}^0 p_k(1+s\varepsilon_l) \ln \left| \frac{c-1-s\varepsilon_l}{x-1-s\varepsilon_l} \right| ds \right\} \right\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

где

$$H_0(h_H(x) - 1) = [|x| \sqrt{x^2 - 1} - \ln(|x| + \sqrt{x^2 - 1})] \theta(x^2 - 1) \quad (3.7)$$

при этом $\theta(x)$ — функция Хэвисайда.

Пользуясь соотношениями (3.1)–(3.5), а также формальными разложениями в ряды Тейлора, представим (2.3) и (2.4) в виде

$$p_{rk}(x_1) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nu_{ln} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} p_{ln}^{(m)}(0) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \beta_k \right)^m = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \int_{-1}^1 p_k(t) dt + \varepsilon_r^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \nu_{rk} \int_{\alpha_1}^{\infty} p_{rk}(r) dr - \mu_k \varepsilon_r^{-1/2} \int_0^{\infty} p_k(-1 + r\varepsilon_r) dr \right\} + \\ & + \varepsilon_l^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \nu_{lk} \int_{-\infty}^0 p_{lk}(s) ds + \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{i+1} \int_0^{-\delta_{i+1}} p_{lk} \left(\delta_{i+1} s - \sum_{j=1}^i \delta_j \beta_j \right) ds \right\} - \\ & - \mu_k \varepsilon_l^{-1/2} \int_{-\infty}^0 p_k(1 + s\varepsilon_l) ds \Big\} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$p_{lk} \left(\delta_{i+1} s - \sum_{j=1}^i \delta_j \beta_j \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} p_{lk}^{(m)}(0) \left[\delta_{i+1} s - \sum_{j=1}^i \delta_j \beta_j \right]^m \quad (3.9)$$

Из сравнения порядка членов в уравнении (2.1) в зонах входа и выхода, используя соотношения (3.2)–(3.9), получим асимптотические оценки

$$O(\varepsilon_r) = O(\varepsilon_l) = \varepsilon, \quad H_{00} = A(V\varepsilon^2)^{1/3}, \quad A = A(\alpha_1, m) = O(1) \quad \text{при } Q \gg 1 \quad (3.10)$$

а также систему уравнений для определения $p_{r0}(r)$, $p_{l0}(s)$, A и β_1

$$\begin{aligned} \frac{dp_{r0}}{dr} = A^{-3} & \left\{ -\frac{4\sqrt{2}}{3} r \sqrt{-r} \theta(-r) + \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\infty} (p_{l0}(t) - \sqrt{2t}) \ln t dt - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{\alpha_1}^{\infty} (p_{r0}(t) - \theta(t) \sqrt{2t}) \ln |r-t| dt \right] \right\} e^{\gamma p_{l0}^m}, \quad r > \alpha_1 \quad (\alpha_1 < 0) \end{aligned}$$

$$p_{r0}(\alpha_1) = 0, \quad \int_{\alpha_1}^{\infty} [p_{r0}(t) - \theta(t) \sqrt{2t}] dt = \frac{\pi}{3} \beta_1$$

$$\frac{dp_{10}}{dr} = -\frac{2}{\pi} A^{-3} \int_0^{\infty} [p_{10}(t) - V\sqrt{2t}] \ln \frac{t}{|r-t|} dt e^{\gamma p_{10}^m}, \quad r > 0 \quad (3.11)$$

$$p_{10}(0) = 0, \quad \int_0^{\infty} [p_{10}(t) - V\sqrt{2t}] dt = \frac{\pi}{3} \beta_1, \quad \beta_1 < 0$$

$$\gamma = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon \ll Q^{-2/m} \\ 1 & \text{при } \varepsilon = Q^{-2/m} \end{cases}$$

где произведена замена переменной s на $r = -s$.

Интегральные условия в (3.11) получены из рассмотрения (2.1), (3.6)–(3.10) в зоне входа и герцевской зоне с учетом срачивания $p_{r0}(r)$ и $p_{10}(r)$ с $V\sqrt{2r}$ при $r \rightarrow \infty$ [4, 5]. Кроме того, получено [6]

$$\beta_1 = \varepsilon^{3/2}, \quad \delta_1 = \varepsilon^{1/2}, \quad p_1(x) = -\frac{2}{3} \beta_1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \beta_1 < 0 \quad (3.12)$$

При выводе системы (3.11) предполагалось, что $\varepsilon^{3/2} \ll H_0$, что имеет место в силу (3.1) и (3.10).

Таким образом, получена система двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (3.11) относительно главных членов асимптотик давления $p_{r0}(r)$ в зоне входа и $p_{10}(r)$ в зоне выхода, а также величин A и β_1 при заданных α_1 , m и η . Решив систему (3.11) и задавшись, кроме того, определенным ε , удовлетворяющим (3.1), из (2.5) и (3.10) получим формулу для толщины слоя смазки

$$h_l = A(\alpha_1, m) (V\varepsilon^2)^{1/3} \frac{b_H^2}{R} \quad (3.13)$$

Исследуем систему (3.11). Если при $\eta = 0$ известно решение A^* , β_1^* , $p_{r0}^*(r)$ и $p_{10}^*(r)$ для $\alpha_1 = -1$, то для любого α_1 ($\alpha_1 < 0$) решение (3.11) имеет вид

$$A = A^* |\alpha_1|^{2/3}, \quad \beta_1 = \beta_1^* |\alpha_1|^{3/2}, \quad p_{r0}(r) = |\alpha_1|^{1/2} p_{r0}^*\left(\frac{r}{|\alpha_1|}\right) \quad (3.14)$$

$$p_{10}(r) = |\alpha_1|^{1/2} p_{10}^*\left(\frac{r}{|\alpha_1|}\right)$$

Очевидно, что при $\eta = 1$ для главных членов решения системы (3.11) при $|\alpha_1| \ll 1$ ($\alpha_1 < 0$) также справедливы соотношения (3.14).

В работе [7] показано, что в случае неньютоновской жидкости Ри-Эйринга при $Q \gg 1$ и $u_1 = u_2$ при использовании метода срашиваемых асимптотических разложений задача также сводится к системе (3.11).

Изложенный метод решения может быть распространен на задачи с различными зависимостями вязкости масла от давления.

4. Рассмотрим случай недостаточной и обильной смазки. Недостаточной смазкой будем называть режимы, для которых выполняются соотношения

$$\varepsilon_r \gg Q^{-2/m}, \quad \varepsilon_r^{3/2} \ll H_0 \quad (4.1)$$

а при обильной смазке

$$\varepsilon_r \gg Q^{-2/m}, \quad \varepsilon_r^{3/2} \sim H_0 \quad (4.2)$$

Полагая в (3.11) $\alpha_1 = \alpha_1 \varepsilon_r Q^{2/m}$ и учитывая соотношения $p_{r_0}(r) = O(1)$ и $p_{i_0}(r) = O(1)$, из сравнения порядка членов в уравнении для $p_{r_0}(r)$ системы (3.11) при $r = O(\alpha_1)$ получим

$$A \sim (\varepsilon_r Q^{2/m})^{5/6} \quad (4.3)$$

а из интегрального условия будем иметь

$$\beta_1 \sim \varepsilon_r Q^{2/m} \quad (4.4)$$

Положив $\varepsilon = Q^{-2/m}$ в формуле (3.10) для H_0 , с помощью (3.5), (3.12), (4.3) и (4.4) получим

$$H_0 \sim \varepsilon_r^{5/6} (VQ^{1/m})^{1/3}, \quad c-1 \sim \varepsilon_r Q^{-1/m} \quad (4.5)$$

Последние соотношения справедливы как для режимов недостаточной смазки, так и для режимов обильной смазки.

В случае обильной смазки будем иметь

$$\varepsilon_r \sim (VQ^{1/m})^{1/2}, \quad H_0 \sim (VQ^{1/m})^{3/4}, \quad c-1 \sim (VQ^{-1/m})^{1/2} \quad (4.6)$$

Асимптотика H_0 в (4.6) несколько отличается от величины H_0 , полученной в [3] иным путем.

Оценки H_0 , аналогичные (3.10), (4.5) и (4.6), могут быть получены и в случае пространственной изотермической упруго-гидродинамической задачи для ньютоновской смазки.

5. В силу сращивания функций $p_{r_0}(r)$ и $p_{i_0}(r)$ при $r \rightarrow \infty$ с герцевским давлением $\theta(r)\sqrt{2r}$ из (3.11) получим

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\alpha_1}^{\infty} [p_{r_0}(t) - \theta(t)\sqrt{2t}] \ln|r-t| dt = \\ & = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} [p_{r_0}(t) - \sqrt{2t}] \ln|r-t| dt = \int_0^{\infty} [p_{r_0}(t) - \sqrt{2t}] \ln t dt \end{aligned} \quad (5.1)$$

Продифференцируем уравнения (3.11) по r и добавим граничные условия $p_{r_0}(r), p_{i_0}(r) \rightarrow \theta(r)\sqrt{2r}$ при $r \rightarrow \infty$. Будем иметь

$$\frac{A^2}{2} \frac{d}{dr} \left(e^{-\gamma p_{r0}^m} \frac{dp_{r0}}{dr} \right) = -\sqrt{-2r\theta}(-r) + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\infty} \frac{p_{r0}(t) - \theta(t) \sqrt{2t}}{t-r} dt$$

$$p_{r0}(\alpha_1) = 0, \quad p_{r0}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{2r}$$

$$\int_{\alpha_1}^{\infty} [p_{r0}(t) - \theta(t) \sqrt{2t}] dt = \frac{\pi}{3} \beta_1$$

$$\frac{A^2}{2} \frac{d}{dr} \left(e^{-\gamma p_{r0}^m} \frac{dp_{r0}}{dr} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p_{r0}(t) - \sqrt{2t}}{t-r} dt \quad (5.2)$$

$$p_{r0}(0) = 0, \quad p_{r0}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{2r}$$

$$\int_0^{\infty} [p_{r0}(t) - \sqrt{2t}] dt = \frac{\pi}{3} \beta_1$$

$$\beta_1 \leq 0, \quad \eta = \begin{cases} 1, & \varepsilon = Q^{-2/m} \\ 0, & \varepsilon \ll Q^{-2/m} \end{cases}$$

Системы (3.11) и (5.2) эквивалентны при условии существования и единственности решения системы (3.11) и единственности решения системы (5.2).

Уравнения (5.2) имеют более простой вид по сравнению с (3.11) и более удобны для численного решения. При численной реализации (5.2) решение регуляризуется членами типа вторых производных от искомых функций [8].

Численное решение (5.2) производилось методом итераций. Полубесконечные отрезки интегрирования $[\alpha_1, \infty]$ и $[0, \infty]$ заменялись конечными отрезками $[\alpha_1, r_{\text{inf}}]$ и $[0, r_{\text{inf}}]$, которые разбивались узлами $r_j, j=0, \dots, N-1$, причем $r_{i_0} = 0$ и $r_{N-1} = r_{\text{inf}}$. Для одновременного определения величин $p_{r0}(r)$ и A , а также величин $p_{r0}(r)$ и β_1 , организуем итерационный процесс следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{A_k^2}{2} \frac{d}{dr} \left\{ \exp[-\gamma (p_{r0}^k)^m] \frac{dp_{r0}^{k+1}}{dr} \right\} + \\ & + \frac{3}{2} A_k^2 (A_{k+1} - A_k) \frac{d}{dr} \left\{ \exp[-\gamma (p_{r0}^k)^m] \frac{dp_{r0}^k}{dr} \right\} = \\ & = -\sqrt{-2r\theta}(-r) + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{r_{\text{inf}}} \frac{p_{r0}^{k+1}(t) - \theta(t) \sqrt{2t}}{t-r} dt \end{aligned}$$

$$p_{r_0}^{k+1}(z_1) = 0, \quad p_{r_0}^{k+1}(r_{inf}) = \sqrt{2r_{inf}}$$

$$\int_{r_i}^{\infty} [p_{r_0}^{k+1}(t) - \theta(t) \sqrt{2t}] dt = \frac{\pi}{3} \beta_i^k \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{2} A_{k+1}^3 \frac{d}{dr} \left\{ \exp[-\gamma_i (p_{r_0}^k)^m] \frac{dp_{r_0}^{k+1}}{dr} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{r_{inf}} \frac{p_{r_0}^{k+1}(t) - \sqrt{2t}}{t-r} dt$$

$$p_{r_0}^{k+1}(0) = 0, \quad p_{r_0}^{k+1}(r_{inf}) = \sqrt{2r_{inf}}$$

$$\int_0^{\infty} [p_{r_0}^{k+1}(t) - \sqrt{2t}] dt = \frac{\pi}{3} \beta_i^{k+1}$$

где индекс k означает номер итерации.

Заменив интегралы, входящие в (5.3), суммами с помощью квадратурных формул [9], а производные — конечно-разностными отношениями, получим две системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_{ij}^k p_{r_0}^{k+1}(r_j) + a_{iN}^k (A_{k+1} - A_k) = f_i^k, \quad i = 0, \dots, N \quad (5.4)$$

$$\sum_{j=i_0}^{N-1} b_{ij}^k p_{r_0}^{k+1}(r_j) = g_i^k, \quad i = i_0, \dots, N-1 \quad (5.5)$$

где

$$a_{0j}^k = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}, \quad a_{N-1j}^k = \begin{cases} 1, & j=N-1 \\ 0, & j \neq N-1 \end{cases}, \quad a_{Nj}^k = \begin{cases} 0, & j=N \\ \Delta_j, & j \neq N \end{cases}, \quad j=0, \dots, N$$

$$a_{iN}^k = \frac{3}{A_k} \frac{\varphi_{i+1}^k p_{r_0}^k(r_{i+1}) - (\varphi_i^k + \varphi_{i+1}^k) p_{r_0}^k(r_i) + \varphi_i^k p_{r_0}^k(r_{i-1})}{\Delta_i}, \quad i = 1, \dots, N-2$$

$$a_{ii-1}^k = -\omega_{ii-1} + \frac{\varphi_i^k}{\Delta_i}, \quad a_{ii}^k = -\omega_{ii} - \frac{\varphi_i^k + \varphi_{i+1}^k}{\Delta_i}$$

$$a_{ii+1}^k = -\omega_{ii+1} + \frac{\varphi_{i+1}^k}{\Delta_i}, \quad i = 1, \dots, N-2 \quad (5.6)$$

$$a_{ij}^k = -\omega_{ij} \quad (j \neq i-1, i, i+1; i = 1, \dots, N-2; j = 0, \dots, N-1)$$

$$f_0^k = 0; \quad f_{N-1}^k = \sqrt{2r_{inf}}; \quad f_N^k = \frac{\pi}{3} \beta_1^k + \sum_{j=i_0+1}^{N-1} \Delta_j \sqrt{2r_j}$$

$$f_i^k = -\sqrt{-2r_i \theta(-r_i)} - \sum_{j=i_0+1}^{N-1} \omega_{ij} \sqrt{2r_j}, \quad i = 1, \dots, N-2$$

Далее

$$b_{i,j}^k = \begin{cases} 1, & j = i_0, \\ 0, & j \neq i_0 \end{cases} \quad b_{N-1,j}^k = \begin{cases} 1, & j = N-1, \\ 0, & j \neq N-1 \end{cases}, \quad j = i_0, \dots, N-1$$

$$b_{i,i-1}^k = \omega_{i,i-1} + \frac{\psi_i^k}{\Delta_i}, \quad b_{i,i}^k = \omega_{i,i} - \frac{\psi_i^k + \psi_{i+1}^k}{\Delta_i}, \quad b_{i,i+1}^k = \omega_{i,i+1} + \frac{\psi_{i+1}^k}{\Delta_i} \quad (5.7)$$

$$b_{i,j}^k = \omega_{i,j} \quad (j \neq i-1, i, i+1; \quad i = i_0 + 1, \dots, N-2; \quad j = i_0, \dots, N-1)$$

$$g_{i_0}^k = 0; \quad g_{N-1}^k = \sqrt{2r_{\text{inf}}}; \quad g_i^k = \sum_{j=i_0+1}^{N-1} \omega_{i,j} \sqrt{2r_j}, \quad i = i_0 + 1, \dots, N-2$$

при этом

$$\psi_i^k = \frac{(A_k)^2}{2} \frac{\exp \left\{ -\gamma_i \left[\frac{p_{r_0}^k(r_i) + p_{r_0}^k(r_{i-1})}{2} \right]^m \right\}}{r_i - r_{i-1}}$$

$$\psi_i^k = \frac{(A_{k+1})^2}{2} \frac{\exp \left\{ -\gamma_i \left[\frac{p_{r_0}^k(r_i) + p_{r_0}^k(r_{i-1})}{2} \right]^m \right\}}{r_i - r_{i-1}} \quad (5.8)$$

$$\psi_{i,j}^k = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{2r_i - r_{j+1} - r_j}{2r_i - r_j - r_{i-1}} \right|, \quad \Delta_i = \frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{2}$$

На каждой итерации методом Гаусса решалась система (5.4), (5.6) и (5.8) относительно $p_{r_0}^{k+1}(r_j)$ ($j = 0, \dots, N-1$) и A_{k+1} . После этого с известным уже коэффициентом A_{k+1} методом Гаусса решалась система (5.5), (5.7) и (5.8) относительно $p_{r_0}^{k+1}(r_j)$ ($j = i_0, \dots, N-1$); по найденным $p_{r_0}^{k+1}(r_j)$ вычислялось новое β_i^{k+1} с помощью соотношения

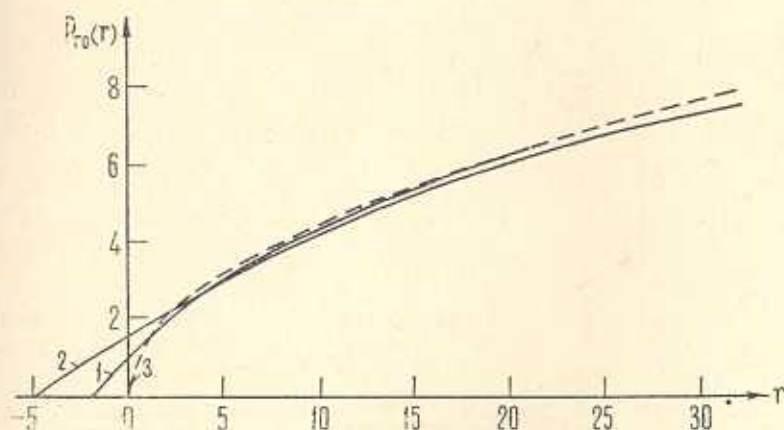
$$\beta_i^{k+1} = \frac{3}{\pi} \sum_{j=i_0+1}^{N-1} \Delta_j [p_{r_0}^{k+1}(r_j) - \sqrt{2r_j}] \quad (5.9)$$

и итерационный процесс возобновлялся. Проверка сходимости процесса осуществлялась с помощью интегральных характеристик A и β_i . Граница r_{inf} выбиралась в зависимости от величин α_1 , η и m таким образом, чтобы ошибка, обусловленная заменой полубесконечных интервалов конечными, была малой.

1. Случай $\gamma_i = 1$ ($\varepsilon = Q^{-2m}$).

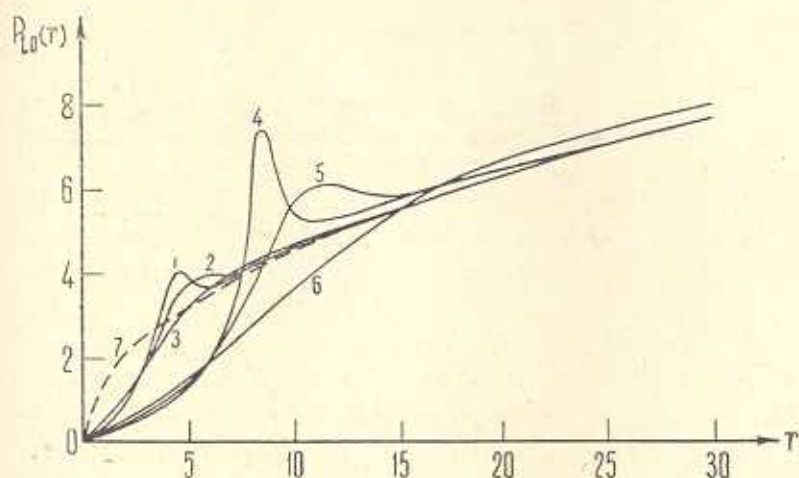
В области $\alpha_1 < r < r_{\text{inf}}$ выбиралась равномерная сетка с шагом $\Delta r = 0.5$. Получены решения системы (5.2) для $m = 0.25; 0.75; 1$; для $\alpha_1 = -2$ и $\alpha_1 = -5$; при этом r_{inf} , соответственно, равны 40 и 50. На фиг. 1 дана эпюра $p_{r_0}(r)$ и давление по Герцу в зоне входа, из которой видно, что давление на входе монотонно растет в увеличением r .

На фиг. 2 даны эшоры $p_{10}(r)$ и давление по Герцу в области выхода для некоторых сочетаний α_1 и m . Из фиг. 2 видно, что при $m=0.25$ давление на выходе по мере уменьшения r монотонно падает, а при $m=0.75$



Фиг. 1. Распределение давления в зоне входа. 1. $\alpha_1 = -2, m = 0.25$; 2. $\alpha_1 = -5, m = 0.25$; 3. по Герцу $\frac{1}{2} \sqrt{2r}$.

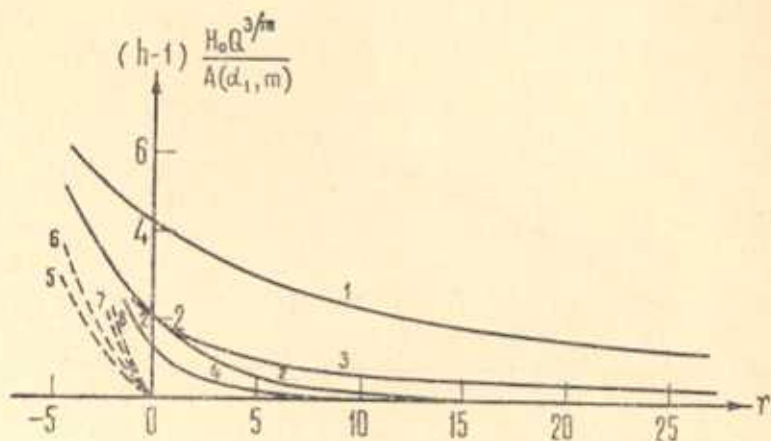
функция $p_{10}(r)$ имеет локальный максимум и минимум, причем при увеличении $|\alpha_1|$ ($\alpha_1 < 0$) максимум растет и смещается в сторону центра области контакта. При уменьшении m максимум давления уменьшается, а про-



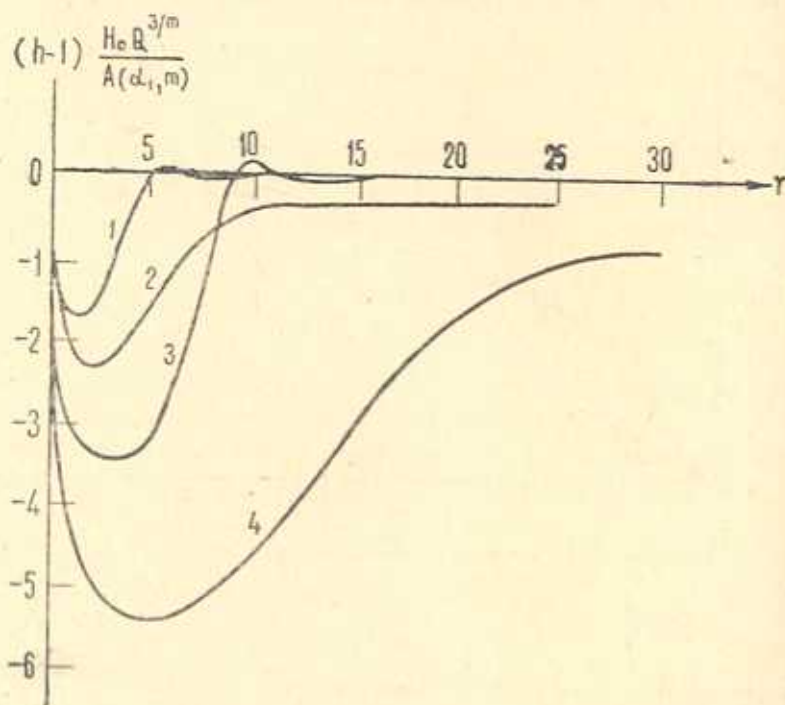
Фиг. 2. Распределение давления в зоне выхода. 1. $\alpha_1 = -2, m = 1$; 2. $\alpha_1 = -2, m = 0.75$; 3. $\alpha_1 = -2, m = 0.25$; 4. $\alpha_1 = -5, m = 1$; 5. $\alpha_1 = -5, m = 0.75$; 6. $\alpha_1 = -5, m = 0.25$; 7. по Герцу $\frac{1}{2} \sqrt{2r}$.

тяженность зоны, примыкающей к максимуму, увеличивается. При одном и том же α_1 и различных m более медленный выход на герцевское решение наблюдается при меньших m , что объясняется более сильным влиянием гидродинамических эффектов.

На фиг. 3, 4 изображены профили $h_{r0}(r)$, $h_{r0}(r)$ и $h_{Hr0}(r) = \frac{2(-2r)^{3/2}}{3A(\alpha_1, m)} \theta(-r)$, связанные с зазором h между цилиндрами соотношениями



Фиг. 3. Профиль зазора между цилиндрами в зоне выхода. 1. $\alpha_1 = -2$, $m = 1$; 2. $\alpha_1 = -2$, $m = 0.25$; 3. $\alpha_1 = -5$, $m = 1$; 4. $\alpha_1 = -5$, $m = 0.25$; Зазор по Герцу: 5. $\alpha_1 = -2$, $m = 1$; 6. $\alpha_1 = -2$, $m = 0.25$; 7. $\alpha_1 = -5$, $m = 1$; 8. $\alpha_1 = -5$, $m = 0.25$.



Фиг. 4. Профиль зазора между цилиндрами в зоне выхода. 1. $\alpha_1 = -2$, $m = 1$; 2. $\alpha_1 = -2$, $m = 0.25$; 3. $\alpha_1 = -5$, $m = 1$; 4. $\alpha_1 = -5$, $m = 0.25$.

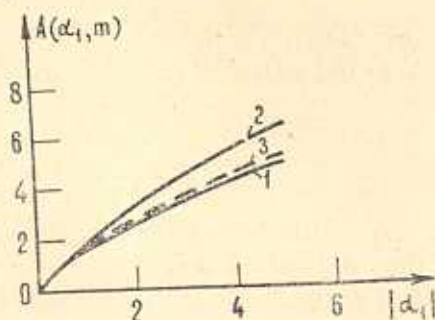
$$h(x) = 1 + \frac{\varepsilon^{3/2}}{H_{00}} A(\alpha_1, m) \begin{cases} h_{r0} & \text{при } x + 1 \sim \varepsilon \\ h_{l0} & \text{при } x - 1 \sim \varepsilon \end{cases}$$

$$h_H(x) = 1 + \frac{\varepsilon^{3/2}}{H_{00}} A(\alpha_1, m) h_{Hr0}(r) \quad (5.10)$$

Функции $h_{r0}(r)$ и $h_{l0}(r)$ легко вычисляются по найденным $p_{r0}(r)$, $p_{l0}(r)$ и A по формулам, вытекающим из (3.11)

$$h_{r0} = A^2(\alpha_1, m) e^{-\gamma p_{r0}^m} \frac{dp_{r0}}{dr}, \quad h_{l0} = -A^2(\alpha_1, m) e^{-\gamma p_{l0}^m} \frac{dp_{l0}}{dr} \quad (5.11)$$

Из фиг. 3 видно, что в зоне входа зазор монотонно уменьшается с увеличением r , причем скорость уменьшения существенно зависит от m . Поведение зазора в зоне выхода зависит от m (фиг. 4).



Фиг. 5. Зависимость $A = A(\alpha_1, m)$
 1. $m = 1$; 2. $m = 0.25$; 3. $\eta = 0$.

На фиг. 5 даны кривые $A = A(\alpha_1, m)$ для различных m , из которых видно, что при изменении m от 0 до 1 коэффициент A (а, следовательно, толщина слоя смазки) изменяется в пределах 30%.

2. Случай $\eta = 0$ ($\varepsilon \ll Q^{-2/m}$).

В данном случае систему (5.2) достаточно решить для $\alpha_1 = -1$; расчеты выполнены при $\Delta r = 0.25$ и $r_{inf} = 40$. Эпюра давления и профиль зазора в зонах входа и выхода весьма близки к полученным при $\eta = 1$ и $m = 0.25$. Кривая $A = A^0 |\alpha_1|^{2/3}$ показана на фиг. 5 пунктирной линией.

Как показали численные эксперименты с вдвое меньшим шагом Δr и большей областью интегрирования r_{inf} ошибка в величине A не превышает 1%.

Настоящая работа доложена и обсуждена на объединенном заседании семинаров «Контактная прочность» и «Гидроаэроупругость» Ростовского государственного университета.

Ի. Ի. ԿՈՒՊԻՇ

ԾԱՆՐ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ԳՆՈՐՄԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՀԱՄԱՐ
ԱՌԱՋԳԱՆ-ՉԻԳՐՈՒԹՅԱՄԻԿԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ասիմպտոտիկան վերլուծությունների միացման մեթոդով ուսումնասիրվել է նյութանյան հեղուկի համար հարթ իզոթերմիկ խնդիրը գլորման կոնտակտի ծանր բեռնավորման դեպքում:

Յուղման կարիքի և լիսոսա յուղման սեծիմների համար ստացվել են ասիմպտոտական գնահատականներ յուղման շերտի հաստության համար:

Յուղման կարիքի դեպքում ստացվել են հավասարումներ և նրանք լուծվել են շնչման ասիմպտոտիկայի գլխավոր անդամների համար խնդրի պարամետրների տարբեր արժեքների դեպքում:

Յուլց է արված, որ յուղման շերտի հաստությունը որոշվում է ինչպես մուտքի այնպես էլ ելքի զսնաններով:

AN ELASTO-HYDRODYNAMIC PROBLEM FOR A
HEAVY-LOADED ROLLING CONTACT

I. I. KUDISH

S u m m a r y

A plane isothermal elasto-hydrodynamic problem for newtonian liquid is studied by the method of matched asymptotic expansions in case of a heavy-loaded contact. Asymptotic estimations for lubricant film thickness are obtained for lubricant deficiency and abundant lubrication conditions. In case of deficiency conditions equations for major members of pressure asymptotics are derived and numerically solved for various values of the problem parameters.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петрусевич А. И. Основные выводы из контактно-гидродинамической теории смазки. Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 2.
2. Кудиш И. И. Контактная гидродинамика смазки деталей машин, М., изд. «Машиностроение», 1976.
3. Грубин А. Н. Основы гидродинамической теории смазки тяжело нагруженных цилиндрических поверхностей. Сб. «Исследование контакта деталей машин», ЦНИИТМАШ, кн. 30, М., Машгиз, 1949.
4. Ван-Дойк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., изд. «Мир», 1967.
5. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., изд. «Мир», 1972.
6. Галик Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ, 1953.
7. Кудиш И. И. Определение толщины слоя смазки в условиях масляного голодания для линейного контакта. «Труды института», № 1 (91). М., Спецформцентр ВНИИП, 1976, 10—14.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., изд. «Наука», 1974.
9. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. La solution approchée du problème de Dirichlet. Докл. АН СССР, 1929, 11.