

Г. А. БАБАДЖАНЯН

ТЕЧЕНИЕ РЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ С ПРОНИЦАЕМОМИ СТЕНКАМИ

В последние годы проявляется большой интерес к задачам о течении жидкостей (несжимаемой и сжимаемой) вблизи проницаемых поверхностей. Подобные задачи связаны с многочисленными явлениями в различных отраслях современной техники, промышленности и сельского хозяйства.

При решении вышеуказанных задач теоретически существуют три основных направления. Первое из них можно назвать гидравлическим, за основу исследования которого берутся идеи гидравлики. Одним из первых исследований в этом направлении явились известные работы Л. С. Лейбензона [1]. В дальнейшем появились работы других исследователей [2], [3].

Второе направление развивалось на основе полных уравнений Навье-Стокса [4], [5], [6]. В третьем — за основу исследований берутся уравнения пограничного слоя [7], [8].

Имеются, конечно, и многочисленные экспериментальные работы [9], [10].

Нужно отметить, что почти во всех перечисленных теоретических исследованиях применялись или приближенные методы интегрирования, или решения численным методом.

Ясно, что точность решенных задач строго зависела от выбора того или иного метода. В смысле точного интегрирования дифференциальных уравнений движения некоторое преимущество имеет первое направление, согласно которому падение напора по течению полностью расходуется на преодоление силы трения от вязкости жидкости. В работе [2] учтено изменение давления, соответствующее изменению скоростного напора. Но при движении капельной жидкости в длинных трубопроводах с дозвуковыми скоростями обычно оказывается возможным пренебречь этим изменением. Это обстоятельство еще более усиливается при малых дозвуковых скоростях. Уравнение движения в этом случае будет иметь следующий вид:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\xi \rho u^2}{8\delta} \quad (0.1)$$

где p , u и ρ — средние по сечению трубы давление, скорость и плотность жидкости, ξ — коэффициент сопротивления трения, δ — гидравлический радиус трубы, x — направление потока. Второе уравнение получается, исходя из закона сохранения масс втекающей и вытекающей жидкости в рассматриваемом объеме. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + D\rho(p - p_*) = 0 \quad (0.2)$$

здесь D — постоянная, зависящая от геометрических характеристик трубы и от степени пористости стенки. Для плоской трубы

$$D = \frac{\alpha}{2h} \quad (0.3)$$

Для цилиндрической

$$D = \frac{2\alpha}{a} \quad (0.4)$$

p_n — в уравнении (0.2) есть внешнее давление. В формулах (0.3), (0.4) α есть коэффициент, показывающий степень пористости стенки, которая вдоль канала принимается непрерывной и постоянной; $2h$ — ширина плоского канала, a — радиус трубы. В работе [2] вместо уравнения (0.2) берутся значения u' в виде Петрова Г. А. [11]. Если в формуле (0.2) $p - p_n > 0$, имеет место отсос жидкости, в случае $p - p_n < 0$ — вдувание. Из (0.2) видно, что скорость отсоса (вдува) через пористые стенки равна $\alpha(p - p_n)$.

1. Предположим, что режим движения жидкости ламинарный, а труба плоская, тогда коэффициент сопротивления трения ξ будет иметь следующее значение:

$$\xi = \frac{12\nu}{hu} \quad (1.1)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Подставляя значение (1.1) в (0.1) и учитывая, что для плоской трубы $\delta = \frac{h}{2}$, получим

$$- \frac{dp}{dx} = bu \quad (1.2)$$

$$\text{где } b = \frac{3\mu}{h^3}$$

Исключая из уравнений (0.2) и (1.2) переменное $p(x)$ и принимая $p = \text{const}$ (жидкость несжимаемая), получим

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\alpha b}{2h} u = 0 \quad (1.3)$$

Решением уравнения (1.3) будет

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} x} \quad (1.4)$$

Для определения постоянных интегрирования c_1 и c_2 зададимся следующими граничными условиями:

$$\text{при } x = 0 \quad u = u_n = \frac{Q_n}{2h}$$

и $p = p_n$ или

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{\alpha(p-p_n)}{2h} \quad (1.5)$$

где u_n и p_n — скорость и давление в начальном сечении трубы, Q_n — начальный расход жидкости.

Из (1.5) для c_1 и c_2 получим

$$c_1 = \frac{u_n}{2} - \frac{p_n - p_n}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{2hb}}; \quad c_2 = \frac{u_n}{2} + \frac{p_n - p_n}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{2hb}}$$

Подставляя значения c_1 и c_2 в выражение $u(x)$ и производя некоторые математические преобразования, получим закон изменения скорости в следующем виде:

$$u(x) = u_n \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} x - (p_n - p_n) \sqrt{\frac{\alpha}{2hb}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} x \quad (1.6)$$

Из (0.2) получим закон изменения давления

$$p(x) = p_n + (p_n - p_n) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} x - u_n \sqrt{\frac{2bh}{\alpha}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} x \quad (1.7)$$

Предельная длина участка отсоса или вдувания определяется из (1.7), если принять $p(x) = p_n$

$$L_{\text{пред.}} = \sqrt{\frac{2h}{\alpha b}} \operatorname{arctg} \frac{p_n - p_n}{u_n} \sqrt{\frac{\alpha}{2bh}} \quad (1.8)$$

Продольный расход изменяется по следующему закону:

$$G_{\text{пр}} = \rho s u = 2h \rho u L_1 \quad (1.9)$$

Расход жидкости через стенку канала определяется по формуле

$$G_{\text{ст}} = \alpha(p - p_n) \rho L_1 \cdot 1 \quad (1.10)$$

Здесь L_1 — ширина канала в поперечном направлении.

Если плоская труба заканчивается закрытым концом, то есть граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 & \quad u = u_n \\ \text{при } x = L & \quad u = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

то для постоянных интегрирования c_1 и c_2 получим

$$c_1 = -\frac{u_n \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} L\right)}{2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} L}, \quad c_2 = \frac{u_n \exp\left(\sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} L\right)}{2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\alpha b}{2h}} L}$$

В этом случае законы изменения скорости и давления будут

$$u(x) = \frac{u_n}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{ab}{2h}} L} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{ab}{2h}} (L-x) \quad (1.12)$$

$$p(x) = p_* + \sqrt{\frac{2hb}{a}} \frac{u_n}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{ab}{2h}} L} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{ab}{2h}} (L-x) \quad (1.13)$$

Продольный и поперечный расходы будут определяться по формулам (1.9) и (1.10) соответственно.

В случае цилиндрической трубы вместо уравнения (1.3) получим

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2ab_1}{a} u = 0 \quad (1.14)$$

$$\text{где } b_1 = \frac{32\mu}{d^2}.$$

Если учесть граничные условия (1.5), значения скорости и давления в этом случае будут

$$u(x) = u_n \operatorname{ch} \sqrt{\frac{2ab_1}{a}} x - \sqrt{\frac{2a}{ab_1}} (p_n - p_*) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2ab_1}{a}} x \quad (1.15)$$

$$p(x) = p_* + (p_n - p_*) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{2ab_1}{a}} x - u_n \sqrt{\frac{ab_1}{2a}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2ab_1}{a}} x \quad (1.16)$$

Предельная длина отсоса (вдува) будет

$$L = \sqrt{\frac{a}{2ab_1}} \operatorname{arc th} \frac{p_n - p_*}{u_n} \sqrt{\frac{2a}{ab_1}} \quad (1.17)$$

Продольный расход жидкости определится по формуле

$$G_{\text{пр}} = \pi a^2 \rho u(x) \quad (1.18)$$

Расход жидкости через стенки будет

$$G_{\text{ст}} = 2\pi a r \alpha (p - p_*) \quad (1.19)$$

В случае закрытого конечного конца, то есть при граничных условиях (1.11) для значений скорости и давления получим

$$u(x) = \frac{u_n \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2ab_1}{a}} (L-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{2ab_1}{a}} L} \quad (1.20)$$

$$p(x) = p_n + u_n \sqrt{\frac{ab_1}{2a}} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2ab_1}{a}} (L-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{2ab_1}{a}} L} \quad (1.21)$$

Продольный и поперечный расходы определяются соответственно по формулам (1.18) и (1.19).

2. В случае турбулентного режима движения значение коэффициента сопротивления можно принять постоянным и зависящим только от гидравлического радиуса трубы. Если жидкость движется в плоской трубе, то из уравнений (0.1) и (0.2) получим

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = Au^2 \quad (2.1)$$

где

$$A = \frac{\xi \rho a}{8h^3}$$

Обозначая $u'(x) = z(x)$, из (2.1) будем иметь

$$z = - \sqrt{\frac{2}{3} Au^3 + c} = \frac{du}{dx} \quad (2.2)$$

Перед корнем берем знак минус, так как $\frac{du}{dx} < 0$. Если граничные условия возьмем в виде (1.5), то для c получим значение

$$c = \frac{1}{2} \frac{x^2 (p_n - p_n)^2}{4h^2} - \frac{Au_n^3}{3} \quad (2.3)$$

Из (2.2) получим

$$- \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{3} Au^3 + c}} = x + c_1 \quad (2.4)$$

На основании граничных условий (1.5) получим

$$x = \int_u^{u_n} \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{3} Au^3 + c}} \quad (2.5)$$

Из формулы (2.5) следует, что функция $u(x)$ выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса $\gamma(x)$.

Для нахождения инвариант функции Вейерштрасса g_2, g_3 преобразуем (2.5). Обозначая $c = -\frac{Ag_2}{6}$ и производя общеизвестные математические операции, получим окончательно

$$u(x) = \gamma \left(x \sqrt{\frac{A}{6}} + c_1 \right) \quad (2.6)$$

где

$$c_1 = \int_{u_n}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_3}} \quad (2.7)$$

Имея значения u_n , по таблице можем вычислить c_1 .

В нашем случае первый инвариант g_2 равен нулю, а из теории эллиптических функций известно, что в этом случае имеет место следующее соотношение:

$$\gamma(t; 0; g_3) = \sqrt[3]{g_3} \gamma(\sqrt[6]{g_3}t; 0; 1) \quad (2.8)$$

Для функции $\gamma(t; 0; 1)$ составлены таблицы, из которых можно вычислить значение самой функции и значение ее первой производной.

Давление жидкости в трубе в этом случае определится из выражения

$$p(x) = p_n - \frac{2h}{a} \sqrt{\frac{A}{6}} \gamma' \left(\sqrt{\frac{A}{6}} x + c \right) \quad (2.9)$$

Максимальная длина участка отсоса (вдува) определится из выражения

$$\gamma' \left(\sqrt{\frac{A}{6}} L + c_1 \right) = 0 \quad (2.10)$$

Продольный и поперечный расходы жидкости определяются согласно формулам (1.9) и (1.10).

В случае цилиндрической трубы коэффициент A в уравнении (2.1) будет иметь значение

$$A = \frac{\xi \rho a}{2a^2}$$

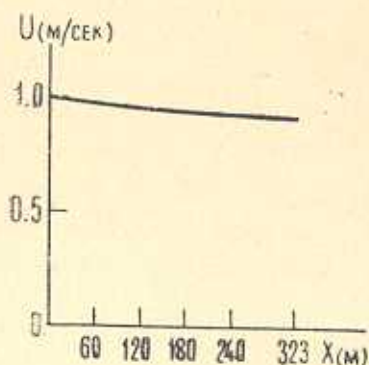
Примеры расчета

В случае ламинарного движения жидкости в цилиндрической трубе возьмем следующие данные:

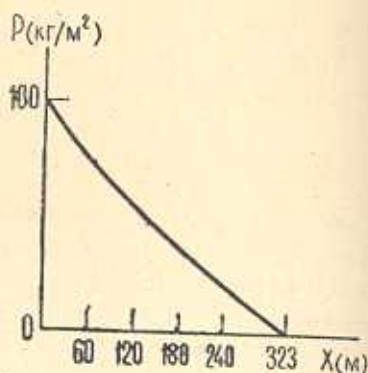
$$u_n = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м/сек}, \quad a = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad z = 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{кгсек}}$$

$$p_n = 10^2 \frac{\kappa \Gamma}{\text{м}^2}, \quad p_a = 0, \quad \mu = 10^{-4} \frac{\kappa \Gamma \text{сек}}{\text{м}^2}, \quad \rho = 102 \frac{\kappa \Gamma \text{сек}^2}{\text{м}^4}.$$

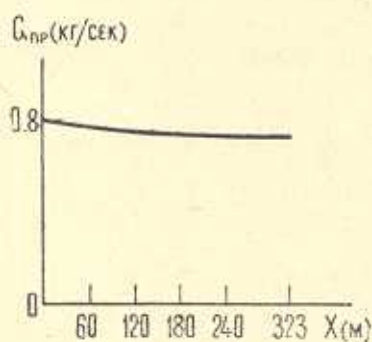
Законы изменения скорости, давления, продольного и поперечного расхода, вычисленные по формулам (1.15), (1.16), (1.18), (1.19), представлены на фиг. 1, 2, 3, 4. Предельная длина отсоса пористой трубы, вычисленная по формуле (1.17), будет $L = 323.5$ м. В случае турбулентного дви-



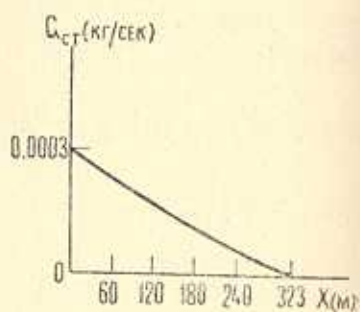
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

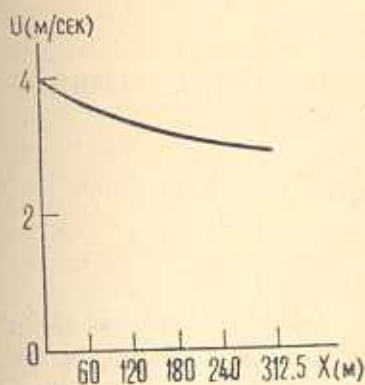
жения жидкости в цилиндрической трубе конкретный численный пример подсчитан для следующих данных:

$$u_n = 4 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \quad a = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \alpha = 10^{-8} \frac{\text{м}^2}{\kappa \Gamma \text{сек}}, \quad p_a = 0,$$

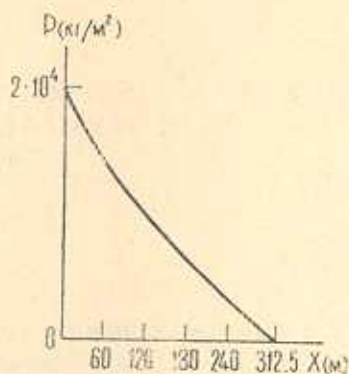
$$p_n = 2 \cdot 10^4 \frac{\kappa \Gamma}{\text{м}^2}, \quad \xi = 0.012, \quad \rho = 102 \frac{\kappa \Gamma \text{сек}^2}{\text{м}^4}$$

Законы изменения скорости, давления, продольного и поперечного расхода жидкости, вычисленные по формулам (2.6), (2.9), (1.18) и (1.19), представлены на фиг. 5, 6, 7, 8.

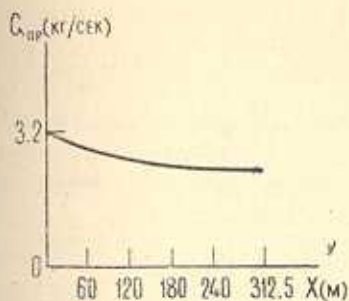
Предельная длина отсоса пористой трубы, вычисленная по формуле (2.10), в этом случае будет $L = 1000$ м.



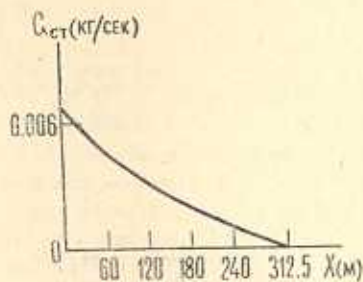
Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Из сопоставления полученных кривых 5, 6, 7, 8 с аналогичными кривыми в работе [2] видно, что между ними имеются качественные совпадения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 2 XII 1976

Գ. Հ. ԲԱԲԱԶՅԱՆՅԱՆ

ԻՐԱԿԱՆ ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿԻ ՀՈՍԱՆՔԸ
ԹԱՓԱՆՅԵԼԻ ՊԱՏԵՐՈՎ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում քննարկվում է հարթ և զլանային ծակոտիկն պատերով խողովակներում հեղուկի միաշափ ստացիոնար, իզոթերմ շարժումը: Դիտարկվում են հեղուկի շարժման լամինար և սուրբուլենտ սեփմաները: Ստացված են շարժման արագության, ճնշման, երկայնական և լայնական ելքերի փո-

փոխման օրինակները: Հաշված են թվաչին օրինակներ և կատարված են գրաֆիկներ որոնելի ֆունկցիաների փոփոխման օրինաչափությունների նկարագրման վերաբերյալ:

THE FLOW OF A REAL NONCOMPRESSIBLE LIQUID IN PERMEABLE WALLED TUBES

G. A. BABAJANIAN

S u m m a r y

One-dimensional isotropic flow of a real liquid in flat and cylindrical permeable tubes is considered. The laws for variation in the rate and the pressure of longitudinal and transverse discharge of liquid for laminar and turbulent conditions of flow are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон А. С. О движении нефтей и газов по каналам с проницаемыми стенками. Собрание трудов, т. 11, М., 1953.
2. Кузнецкий Р. С. О распределении скорости и давления жидкости вдоль трубы с отверстием. Инж.-физич. ж., 1971, т. 20, № 1.
3. Хубларян М. Г. О совместном решении задачи о притоке к дрене и течении жидкости внутри нее. ВНИИГ и М, вып. 2, М., 1974.
4. Леонов А. И. О медленном течении вязкой жидкости в трубе с пористыми стенками. Изв. АН СССР, ОТН, Механика-машиностроение, 1963, № 2.
5. Квейл Ж. П. и Леви Е. К. Ламинарное течение в трубе с оттоком через пористую стенку. Тр. американского общества инженеров-механиков, теплоотдача, 1975, № 1.
6. Бабаджанян Г. А. Течение вязкой жидкости в трубе с пористыми стенками. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1965, т. XVIII, № 4.
7. Шлихтин Г. Теория пограничного слоя. М., ИЛ, 1956, с. 241.
8. Ян Жи У. Влияние постоянной скорости отсоса на пленочную конденсацию при ламинарном течении конденсата на пористой вертикальной стенке. Тр. американского общества инженеров-механиков, Теплопередача, № 2, 1970.
9. Кочнов И. С. и Баранова Л. И. Течение в каналах с проницаемыми стенками. Тепло-массоперенос, т. 1, Минск, 1965.
10. Романенко П. Н. и Веризин И. С. Влияние поперечного потока массы на теплообмен и динамику потока при турбулентном течении нагретого воздуха в осесимметричном диффузоре с проницаемой стенкой. Инж.-физ. журнал, 1973, т. XXV, № 2.
11. Петров Г. А. Движение жидкости с изменением расхода вдоль пути. М.—Л., Гос. изд. строит. литер, 1951.