

Р. К. АЛЕКСАНЯН, С. А. МЕЛИК-САРКИСЯН

О КРУЧЕНИИ АНИЗОТРОПНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО
 СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ
 ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СЕКТОРОВ

Решению задачи о кручении анизотропных стержней посвящены работы [1—6].

В настоящей работе строится точное решение задачи о кручении призматического стержня, составленного из двух призматических анизотропных тел с поперечными сечениями в виде эллиптических секторов, зависящих от анизотропии материалов. Материалы стержня обладают различными свойствами упругой анизотропии прямолинейного вида.

1. Поместим начало прямолинейной декартовой системы координат в точке пересечения линии раздела и контура поперечного сечения составного призматического стержня, направляя ось x по линии раздела. Через α и β обозначим углы между осью x и радиальными частями контура области, а через Γ_1 и Γ_2 — замыкающие эллиптические части контура области поперечного сечения (фиг. 1), которые определяются коэффициентами анизотропии материалов.

Напряжения $\tau_{yz}^{(k)}, \tau_{xz}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) определяются формулами

$$\tau_{xz}^{(k)} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial y}, \quad \tau_{yz}^{(k)} = -\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \quad (1.1)$$

где $\Phi_k(x, y)$ — функции напряжений, удовлетворяющие дифференциальному уравнению [3]

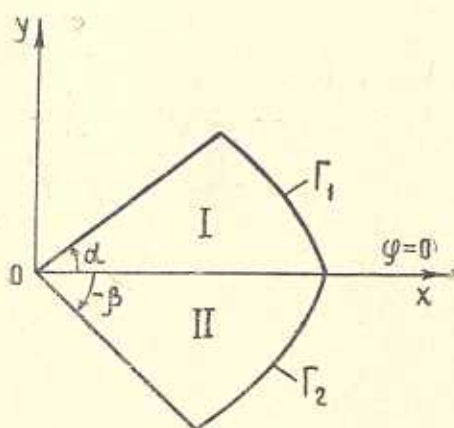
$$A[\Phi_k] = a_{44}^{(k)} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} - 2a_{45}^{(k)} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x \partial y} + a_{55}^{(k)} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} = -2\tau \quad (1.2)$$

Здесь $a_{44}^{(k)}, a_{45}^{(k)}, a_{55}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) — упругие постоянные материалов, а τ — относительный угол закручивания составного стержня.

Функции Φ_k на ветвях контура области и на линии раздела удовлетворяют следующим условиям:

$$\Phi_1(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = \Phi_2(r \cos \beta, -r \sin \beta) = 0 \quad (1.3)$$

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_2(x, 0) \quad (1.4)$$



Фиг. 1.

$$-a_{45}^{(1)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + a_{55}^{(1)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = -a_{45}^{(2)} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + a_{55}^{(2)} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

2. Решение уравнения (1.2) представим в виде

$$\Phi_k(x, y) = F_k(x, y) + \Phi_{0k}(x, y) \quad (k = 1, 2) \quad (1.5)$$

Частное решение $\Phi_{0k}(x, y)$ уравнения (1.2) будем искать в виде

$$\Phi_{0k}(x, y) = L_k x^2 + M_k y^2 + N_k xy \quad (k = 1, 2) \quad (2.1)$$

Удовлетворяя уравнению (1.2) и условиям (1.3), (1.4), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{44}^{(1)} L_1 - a_{45}^{(1)} N_1 + a_{55}^{(1)} M_1 &= -\tau \\ a_{44}^{(2)} L_2 - a_{45}^{(2)} N_2 + a_{55}^{(2)} M_2 &= -\tau \\ L_1 \cos^2 \alpha + M_1 \sin^2 \alpha + N_1 \sin \alpha \cos \alpha &= 0 \\ L_2 \cos^2 \beta + M_2 \sin^2 \beta - N_2 \sin \beta \cos \beta &= 0 \\ L_1 - L_2 &= 0 \\ -2a_{45}^{(1)} L_1 + a_{55}^{(1)} N_1 + 2a_{45}^{(2)} L_2 - a_{55}^{(2)} N_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из системы (2.2) можно определить коэффициенты L_k, M_k, N_k ($k = 1, 2$). Определитель системы (2.2) может обращаться в нуль лишь при частных комбинациях упругих постоянных материалов и углов α и β . В этих случаях частное решение (2.1) можно получить соответствующим подбором коэффициентов L_k, M_k, N_k ($k = 1, 2$) или предельным переходом.

Легко заметить, что напряжения, определяемые частным решением (2.1), в начале координат исчезают.

Решение соответствующего однородного уравнения

$$A[F_k] = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (2.3)$$

представим в виде [7]

$$F_k(x, y) = (x + \delta_k y)^\lambda \quad (2.4)$$

где δ_k и λ — постоянные.

Относительно δ_k получаем уравнение [3]

$$a_{44}^{(k)} - 2a_{45}^{(k)} \delta_k + a_{55}^{(k)} \delta_k^2 = 0 \quad (2.5)$$

Из условия

$$a_{44}^{(k)} a_{55}^{(k)} - (a_{45}^{(k)})^2 > 0$$

следует, что корни уравнения (2.5) комплексные и сопряженные, то есть $\delta_{k2} = \bar{\delta}_{k1} = \sigma_k - i\nu_k$ ($k = 1, 2$) [3]. Поэтому решение уравнений (2.3) представится в виде

$$F_k(x, y) = A_k(x + \delta_k y)^\lambda + B_k(x + \bar{\delta}_k y)^\lambda \quad (2.6)$$

где A_k и B_k — комплексные постоянные.

Удовлетворяя условиям (1.3) и (1.4), получаем систему

$$\begin{aligned} A_1(\cos \alpha + \delta_1 \sin \alpha)^\lambda + B_1(\cos \alpha + \bar{\delta}_1 \sin \alpha)^\lambda &= G \\ A_2(\cos \beta - \delta_2 \sin \beta)^\lambda + B_2(\cos \beta - \bar{\delta}_2 \sin \beta)^\lambda &= 0 \\ A_1 + B_1 - A_2 - B_2 &= 0 \\ \mu(A_1 - B_1) - A_2 + B_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\mu = \frac{d_1}{d_2}$, а $d_k = [a_{44}^{(k)} a_{55}^{(k)} - (a_{45}^{(k)})^2]^{1/2}$ ($k = 1, 2$).

Из условия существования нетривиального решения однородной системы (2.7) относительно λ получаем уравнение

$$(1 + \mu) \sin \lambda(\varphi_1 + \varphi_2) + (1 - \mu) \sin \lambda(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (2.8)$$

где

$$\varphi_1 = \arg(\cos \alpha + \delta_1 \sin \alpha), \quad \varphi_2 = \arg(\cos \beta - \delta_2 \sin \beta)$$

Решения уравнения (2.8) являются собственными значениями трехточечной самосопряженной краевой задачи дифференциального уравнения второго порядка. Все корни уравнения (2.8) действительны. В случае положительных простых корней, пронумерованных по порядку их возрастания, общее решение уравнения (1.2) представляется в виде

$$\Phi_k(x, y) = \sum_{(\lambda_n)} [A_{kn}(x + \delta_k y)^{\lambda_n} + B_{kn}(x + \bar{\delta}_k y)^{\lambda_n} + \Phi_{0k} \quad (2.9)$$

где сумма распространена на все положительные корни λ_n характеристического уравнения (2.8). Необходимость отбрасывания отрицательных корней вытекает из условия конечности накопленной потенциальной энергии деформации в конечном объеме стержня в окрестности конца линии раздела [8].

Однородные решения, соответствующие кратным корням, строятся при помощи присоединенных функций [9].

Решение (2.9) в полярной системе координат (r, φ) представляется в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2iB_{n1} \cos \lambda_n \varphi_1}{\cos \lambda_n \varphi_1 + i \sin \lambda_n \varphi_1} r_2^{\lambda_n} (\sin \lambda_n \varphi - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \varphi) + \Phi_{01} \\ \Phi_2 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2iB_{n1} \cos \lambda_n \varphi_1}{\cos \lambda_n \varphi_1 + i \sin \lambda_n \varphi_1} r_2^{\lambda_n} (\mu \sin \lambda_n \theta - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \theta) + \Phi_{02} \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$r_k^2 = [(\cos \varphi + \sigma_k \sin \varphi)^2 + \nu_k^2 \sin^2 \varphi] r^2 = r^2 \rho_k^2$$

Так как $\Phi_n(r, \varphi)$ — действительные функции, то комплексные постоянные B_{nl} выбираем следующим образом:

$$B_{nl} = - \frac{\cos \lambda_n \varphi_1 + i \sin \lambda_n \varphi_1}{2i \cos \lambda_n \varphi_1} B'_{nl}$$

где B'_{nl} — действительные постоянные.

Функции напряжений окончательно представляются в виде

$$\Phi_k(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n (r \rho_k)^{\lambda_n} (\mu^{\lambda_n - 1} \sin \lambda_n \gamma - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \gamma) + \Phi_{0k} \quad (2.11)$$

где

$$\gamma = \arg(\cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi + i \nu_2 \sin \varphi) \quad \text{при} \quad -\beta < \varphi < 0$$

$$\gamma = \arg(\cos \varphi + \sigma_1 \sin \varphi + i \nu_1 \sin \varphi) \quad \text{при} \quad 0 < \varphi < \alpha$$

Если собственные числа являются корнями уравнения $\cos \lambda_n \varphi_1 = 0$, то в (2.11) появляется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\lambda_n} \cos \lambda_n \gamma$ [10].

3. Рассмотрим семейства кривых, являющихся частями замыкающих контура рассматриваемой области

$$r \rho_1 = c, \quad r \rho_2 = c$$

В декартовой системе координат имеем

$$\begin{aligned} (x + \sigma_1 y)^2 + \nu_1^2 y^2 &= c^2 \\ (x + \sigma_2 y)^2 + \nu_2^2 y^2 &= c^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Эти кривые являются дугами эллипсов с совпадающими центрами в начале координат.

Для неопределенных коэффициентов B'_n , входящих в (2.11), из условий

$$\Phi_k|_{\Gamma_k} = 0$$

получаем уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} B'_n c^{\lambda_n} (\sin \lambda_n \gamma - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \gamma) &= f_1(\gamma) \\ \sum_{n=1}^{\infty} B'_n c^{\lambda_n} (\mu \sin \lambda_n \gamma - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \gamma) &= f_2(\gamma) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $f_k(\gamma)$ — значения $-\Phi_k(x, y)$ при $M(x, y) \in \Gamma_k$.

Рассмотрим систему функций

$$u_n = \begin{cases} u_{1n}(\gamma) = \sin \lambda_n \gamma - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \gamma & \text{при } 0 < \gamma < \varphi_1 \\ u_{2n}(\gamma) = \mu \sin \lambda_n \gamma - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \gamma & \text{при } -\varphi_2 < \gamma < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Система (3.3) является полной ортогональной системой в интервале $-\varphi_2 < \gamma < \varphi_1$ с кусочно-постоянным весом

$$d(\gamma) = \begin{cases} d_1 = [a_{44}^{(1)} a_{55}^{(1)} - (a_{45}^{(1)})^2]^{1/2} & \text{при } 0 < \gamma < \varphi_1 \\ d_2 = [a_{44}^{(2)} a_{55}^{(2)} - (a_{45}^{(2)})^2]^{1/2} & \text{при } -\varphi_2 < \gamma < 0 \end{cases}$$

как система собственных функций самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка

$$u_k'' + \lambda_k^2 u_k = 0 \quad (k = 1, 2)$$

с граничными и контактными условиями

$$\begin{aligned} u_1|_{\gamma=\varphi_1} &= 0, & u_2|_{\gamma=-\varphi_2} &= 0 \\ u_1|_{\gamma=0} &= u_2|_{\gamma=0}, & \mu \frac{du_1}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} &= \frac{du_2}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} \end{aligned}$$

Разложим функцию

$$f(\gamma) = \begin{cases} f_1(\gamma), & \text{если } M(x, y) \in \Gamma_1 \\ f_2(\gamma), & \text{если } M(x, y) \in \Gamma_2 \end{cases}$$

в ряд по функциям (3.3)

$$f(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(\gamma)$$

На основании (3.2) для коэффициентов B_n имеем

$$B_n' = b_n c^{-\lambda_n} \quad (3.4)$$

где

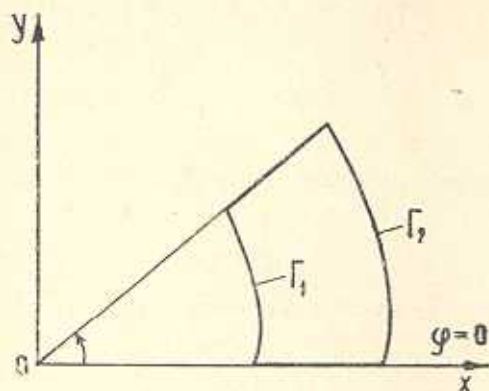
$$b_n = \frac{\int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} d(\gamma) f(\gamma) u_n(\gamma) d\gamma}{\int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} d(\gamma) u_n^2(\gamma) d\gamma}$$

Подставляя (3.4) в (2.11), получаем

$$\Phi_k(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{r \rho_k}{c} \right)^{\lambda_n} (\mu^{k-1} \sin \lambda_n \gamma - \operatorname{tg} \lambda_n \varphi_1 \cos \lambda_n \gamma) + \Phi_{0k} \quad (3.5)$$

Таким образом, решение задачи кручения однородного анизотропного и составного анизотропного призматического тела можно получить в замкнутом виде для угловой области, если только замыкающие части контура поперечного сечения являются дугами эллипсов, определяемые формулами (3.1). Каждое семейство кривых (3.1) характеризуется парами чисел (σ_k, ν_k) , определяемыми упругими постоянными соответствующих материалов. В случае изотропного материала, когда $\sigma_k = 0$, а $\nu_k = 1$, эллипсы вырождаются в окружности $x^2 + y^2 = c^2$. Приведенный угол γ совпадает с полярным углом φ . Параметры ρ_1 и ρ_2 , характеризующие растяжение или сжатие полярного радиуса r , приравниваются к единице.

4. В качестве примера рассмотрим задачу кручения анизотропного эллиптического сектора с центральным углом α (фиг. 2), которая ранее была решена вариационным методом в работе [2]. В этом случае предполагается, что материал призматического тела ортотропен, одна из плоскостей упругой симметрии которого нормальна к оси z стержня, а две другие нормальны к осям x и y .



Фиг. 2.

В этом случае функция напряжений $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$L(u) = a_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \quad (4.1)$$

где

$$a_{44} = \frac{1}{G_{xz}}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_{yz}}$$

G_{xz} — модуль сдвига в плоскости, параллельной xoz ,

G_{yz} — модуль сдвига в плоскости, параллельной $yoiz$.

Общее решение уравнения (4.1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x, 0) = u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = 0 \quad (4.2)$$

представляется в виде

$$u_1 = \sum_{(\lambda_n)} B_n r^{\lambda_n} (\cos^2 \varphi + \nu^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{\lambda_n}{2}} \sin \lambda_n \theta + G_{yz} r^2 (\sin \varphi \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha - \sin^2 \varphi) \quad (4.3)$$

где

$$\theta = \arg(x + iy), \quad \nu = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{\theta_1}$$

$$\theta_1 = \arg(\cos \alpha + i\nu \sin \alpha), \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1$$

В случае кольцевого сектора $\alpha = \pi$ имеем $\theta_1 = \pi$, $\lambda_n = n$ ($n=0; \pm 1; \pm 2; \dots$), а общее решение уравнения (4.1) представляется в виде

$$u = -G_{yz} y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n (x^2 + \nu^2 y^2)^{\frac{n}{2}} - B_{-n} (x^2 + \nu^2 y^2)^{-\frac{n}{2}}] \sin n\theta \quad (4.4)$$

или

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n r^n (\cos^2 \varphi + \nu^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{n}{2}} - B_{-n} r^{-n} (\cos^2 \varphi + \nu^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{n}{2}}] - G_{yz} r^n \sin^2 \varphi$$

Решение (4.4) на дугах следующих эллипсов:

$$r^2 (\cos^2 \varphi + \nu^2 \sin^2 \varphi) = c_1^2, \quad (\Gamma_1)$$

$$r^2 (\cos^2 \varphi + \nu^2 \sin^2 \varphi) = 1 \quad (\Gamma_2)$$

удовлетворяет условиям

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad u|_{\Gamma_2} = 0$$

Для коэффициентов B_n и B_{-n} получаем уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} [B_n c_1^n - B_{-n} c_1^{-n}] \sin n\theta = G_{yz} r^2 \sin^2 \varphi|_{\Gamma_1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [B_n - B_{-n}] \sin n\theta = G_{yz} r^2 \sin^2 \varphi|_{\Gamma_2} \quad (4.5)$$

где

$$r^2 \sin^2 \varphi|_{\Gamma_1} = \frac{c_1^2 \sin^2 \theta}{\nu^2}, \quad r^2 \sin^2 \varphi|_{\Gamma_2} = \frac{\sin^2 \theta}{\nu^2}$$

Из (4.5) имеем

$$B_{2k} = B_{-2k} = 0$$

$$B_{2k-1} = -\frac{8G_{yz}}{\pi v^2 (2k-1)[(2k-1)^2-4]} \frac{c_1^{-2k+1} + c_1^2}{c_1^{2k-1} + c_1^{-2k+1}} \quad (4.6)$$

$$B_{-2k-1} = \frac{8G_{yz}}{\pi v^2 (2k-1)[(2k-1)^2-4]} \frac{c_1^{2k-1} - c_1^2}{c_1^{2k-1} + c_1^{-2k+1}}$$

Общее решение (4.4) окончательно примет вид

$$u = -\frac{8G_{yz}}{\pi v^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin n\theta}{n(n^2-4)} \left[\frac{c_1^{-n} + c_1^2}{c_1^n + c_1^{-n}} (x^2 + v^2 y^2)^{\frac{n}{2}} + \frac{c_1^n - c_1^2}{c_1^n + c_1^{-n}} (x^2 + v^2 y^2)^{-\frac{n}{2}} \right] - G_{yz} y^2$$

В случае, когда призматический стержень имеет поперечное сечение в виде полуэллиптического сектора, ограниченного эллипсом

$$x^2 + v^2 y^2 = 1 \text{ и ось } y = 0$$

на основании (4.3) и из условия ограниченности напряжений в начале координат для напряжений получаем выражения

$$\tau_{xz} = -2G_{yz} y + \frac{8G_{yz}}{\pi v} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{(x^2 + v^2 y^2)^{\frac{n}{2}-1}}{4-n^2} (vy \sin n\theta + x \cos n\theta)$$

$$\tau_{yz} = \frac{8G_{yz}}{\pi v^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{(x^2 + v^2 y^2)^{\frac{n}{2}-1}}{n^2-4} (x \sin n\theta - vy \cos n\theta) \quad (4.7)$$

Напряжения τ_{xz} и τ_{yz} , когда $x = 0$, $y = 0$, принимают значения

$$\tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xz} = \frac{8\sqrt{G_{yz} G_{yz}}}{3\pi} \quad (4.8)$$

Напряжения, получающиеся из приближенной формулы для функции напряжений, приведенной в работе Н. Х. Арутюняна, в середине диаметра эллипса совпадают с напряжениями (4.8).

Ռ. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼԻԿ-ՍԱՐԿԻՍՅԱՆ

ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՍԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՏԵՍՔՈՎ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ
ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՔՎԱԴՐՅԱԼ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՉՈՂԻ ՈՒՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Գիտարկվում է էլիպտական սեկտորի տեսքով հատվածք ունեցող երկու պրիզմատիկ մարմիններից բաղկացած պրիզմատիկ ձողի ուրման խնդիրը: Ձողի նյութերն օժտված են ուղղագիծ առաձգական անիզոտրոպիայի հատկություններով: Ձողի բաղադրիչ մասերը միացված են միմյանց հետ կողմնային մակերևույթի ընդհանուր մասի երկայնույթյամբ: Նյութերի անիզոտրոպիան չորաքանչյուր կետում ունի ձողի կողմնային մակերևույթի ծնիշին ուղղահայաց առաձգական սիմետրիայի հարթություն:

Լարումների ֆունկցիան ներկայացված է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման համար հոսկետ եզրային խնդրի սեփական ֆունկցիաներով շարքի տեսքով: Ձողի անհամասեռության և նրա նյութերի անիզոտրոպիայի հետ կապված լայնական կտրվածքի համար ստացված է փակ լուծում:

TORSION OF A PRISMATIC COMPOSITE ANISOTROPIC BAR
OF ELLIPTICAL SECTOR CROSS-SECTION

R. K. ALEXANIAN, S. A. MELIK-SARKISSIAN

S u m m a r y

The problem on torsion of a prismatic bar consisting of two prismatic bodies, with sections in the form of elliptical sector, made of linear anisotropic materials, is considered. The components of the bar are joined together along the common part of its lateral surface. The anisotropism of the materials at any point has a plane of elastic symmetry perpendicular to the generator of the bar lateral surface.

The stress function is represented by the series over eigen-functions of the three-point boundary problem for a differential equation of the second order. For the cross-section, depending upon the bar non-homogeneity and the material anisotropism, a closed solution is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Симметричная деформация и кручение анизотропного тела вращения с анизотропией частного вида. ПММ, 1940, т. IV, вып. 3.
2. Арутюнян Н. Х. О кручении эллиптического кольцевого сектора. ПММ, 1947, т. XI.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.—Л., Гостехтеориздат, 1950.
4. Геворкян С. Х. Исследование особенностей напряжений в некоторых задачах теории упругости анизотропного тела. Изв. АН Арм. ССР, «Механика», 1968, т. XXI, № 4.

5. Минасян Р. С. О кручении и изгибе анизотропных призматических стержней с поперечным сечением в виде параллелограмма. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. н., 1958, т. 11, № 3.
6. Саркисян В. С. Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Изд. Ер. гос. универ., 1970.
7. Алексанян Р. К. Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела. Докл. АН Арм. ССР, 1975, т. XI, № 4.
8. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. of Appl. Mech., v. 19, 1952.
9. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., Изд. «Наука», 1969.
10. Алексанян Р. К. Стационарное температурное поле в составном круговом секторе. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. XXIV, № 6.