

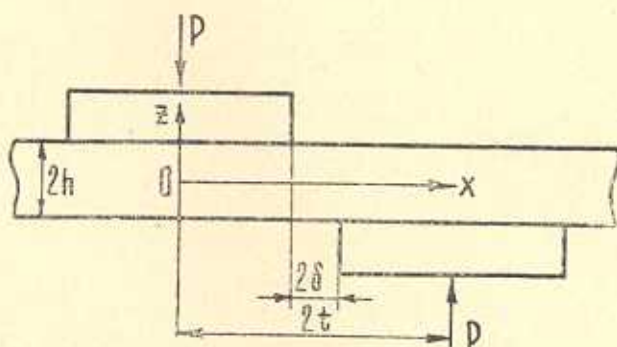
В. В. ДРОБЯЗКО, В. Н. НИКИТЕНКО, А. Ф. УЛИТКО

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
 С ТРЕНИЕМ НА УПРУГОЙ ПОЛОСЕ

Для обеспечения надежной работы твердосплавного инструмента, широко используемого в разделительных операциях листовой штамповки (в частности, в таких операциях как резка, вырубка и пробивка), необходимо тщательное изучение как силовых нагрузок инструмента, так и процесса деформирования обрабатываемого металла в локальных зонах разделения. Напряженность твердосплавного инструмента, который с высокой степенью точности можно считать идеально упругим телом высокой жесткости (штампом) ($E \sim 6.0 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$), естественно, зависит от характера контактного взаимодействия и деформации обрабатываемого материала в зоне разделения. К настоящему времени отсутствует строгая теория этого сложного процесса [1, 2, 3, 4, 5].

Ниже представлено решение чисто упругой контактной задачи на полосе, моделирующей наиболее характерные особенности указанных процессов на упругой стадии деформирования. Заметим, что для тонколистовых материалов ($\sim 1 \text{ мм}$) качественные и количественные данные для напряжений контактного взаимодействия, полученные на основе упругого решения, верны вплоть до критических значений нагрузок разделительных операций.

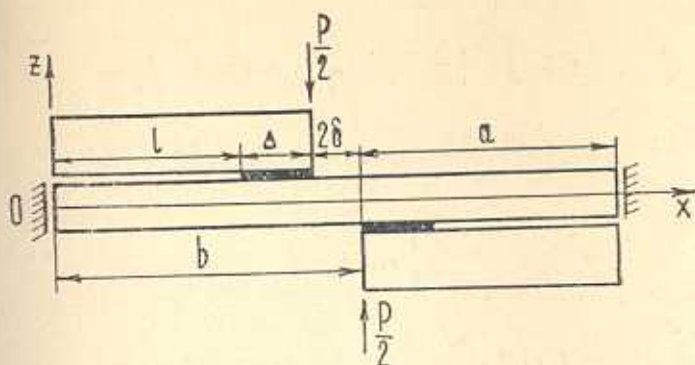
Рассмотрим упругую полосу толщины $2h$, на верхней и нижней гранях которой расположены периодические системы штампов. Геометрические размеры штампов и их взаимное расположение указаны на фиг. 1. Все



Фиг. 1.

штампы нагружены центрально одинаковыми прижимающими силами P . Учет сил трения, возникающих в зонах контакта штампов с полосой, ниже осуществляется по гипотезе Кулона с коэффициентом трения f_0 .

Периодический характер расположения штампов позволяет рассматривать участок полосы длиной $2l = a + b$ с условиями симметрии по торцам полосы (фиг. 2). Руководствуясь физическими соображениями, с самого начала полагаем, что контакт штампов с полосой в процессе нагружения имеет место не по всей подошве штампов, а лишь у их краев на участках длины Δ . По классификации контактных задач, используемой в работах [6, 7, 8], рассматриваемая задача относится к классу задач с уменьшающейся площадкой контакта. Более того, как будет показано в работе, для весьма тонких полос исходная площадка контакта ненагруженных штампов, совпадающая с их длиной, в процессе нагружения скачком изменяется до участков постоянной длины Δ у краев штампов. Заметим, что контактные задачи с уменьшающейся областью контакта обсуждались, кроме указанных работ, также в статьях [9, 10, 11, 12 и др.].



Фиг. 2.

Общее решение задачи, схематически представленной на фиг. 2, строится известными методами [13, 14] в виде рядов Фурье по декартовой координате x . Для компонентов вектора перемещений имеем

$$\begin{aligned}
 2Gu_x = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{sh} \lambda_n z + B_n \operatorname{ch} \lambda_n z + \right. \\
 & + C_n \left(\frac{3m-4}{m} \operatorname{sh} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{ch} \lambda_n z \right) + \\
 & \left. + D_n \left(\frac{3m-4}{m} \operatorname{ch} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{sh} \lambda_n z \right) \right] \sin \lambda_n x \\
 2Gu_z = & zD_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \lambda_n z + B_n \operatorname{sh} \lambda_n z + \\
 & + C_n \lambda_n z \operatorname{sh} \lambda_n z + D_n \lambda_n z \operatorname{ch} \lambda_n z) \cos \lambda_n x
 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{2l}$, G — модуль сдвига, m — число Пуассона.

В виде аналогичных рядов Фурье представляются и выражения для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{1}{m-2} D_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[A_n \operatorname{sh} \lambda_n z + B_n \operatorname{ch} \lambda_n z + \right. \\ & + C_n \left(\frac{3m-2}{m} \operatorname{sh} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{ch} \lambda_n z \right) + \\ & \left. + D_n \left(\frac{3m-2}{m} \operatorname{ch} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{sh} \lambda_n z \right) \right] \cos \lambda_n x \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{m-1}{m-2} D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[A_n \operatorname{sh} \lambda_n z + B_n \operatorname{ch} \lambda_n z + \right. \\ & + C_n \left(\frac{m-2}{m} \operatorname{sh} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{ch} \lambda_n z \right) + \\ & \left. + D_n \left(\frac{m-2}{m} \operatorname{ch} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{sh} \lambda_n z \right) \right] \cos \lambda_n x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[A_n \operatorname{ch} \lambda_n z + B_n \operatorname{sh} \lambda_n z + \right. \\ & + C_n \left(2 \frac{m-1}{m} \operatorname{ch} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{sh} \lambda_n z \right) + \\ & \left. + D_n \left(2 \frac{m-1}{m} \operatorname{sh} \lambda_n z + \lambda_n z \operatorname{ch} \lambda_n z \right) \right] \sin \lambda_n x \end{aligned}$$

Записанные выражения автоматически удовлетворяют условиям симметрии ($u_x = 0$, $\tau_{xz} = 0$) при $x = 0$ и $x = 2t$.

Введем в рассмотрение неизвестные нормальные и касательные напряжения в зонах контакта штампов.

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=h} = \sigma^+(x), \quad \tau_{xz}|_{z=h} = -f_0 \sigma^+(x), \quad (l \leq x < a) \\ \sigma_z|_{z=-h} = \sigma^-(x), \quad \tau_{xz}|_{z=-h} = -f_0 \sigma^-(x), \quad (b < x \leq 2t-l) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Представим эти напряжения в виде рядов Фурье в соответствии с разложениями (1.2)

$$\begin{aligned} \sigma^+(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x, \quad -f_0 \sigma^+(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \\ \sigma^-(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \lambda_n x, \quad -f_0 \sigma^-(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \lambda_n x \end{aligned} \quad (1.4)$$

При этом коэффициенты рядов a_n и b_n находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{2t} \int_{\gamma}^{\alpha} \sigma^+(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{t} \int_{\gamma}^{\alpha} \sigma^+(x) \cos \lambda_n x dx$$

$$b_n = -\frac{f_0}{t} \int_{\gamma}^{\alpha} \sigma^+(x) \sin \lambda_n x dx \quad (1.5)$$

а коэффициенты c_n и d_n выражаются через a_n и b_n зависимостями

$$c_0 = a_0, \quad c_n = (-1)^n a_n, \quad d_n = -(-1)^n b_n \quad (1.6)$$

Постоянные интегрирования, входящие в решение (1.2), легко могут быть выражены через неизвестные коэффициенты разложений (1.4), удовлетворяя граничные условия для нормальных и касательных напряжений на поверхностях полосы $z = \pm h$. При этом оказывается, что постоянные $A_{2k} = C_{2k} = B_{2k-1} = D_{2k-1} = 0$. После подстановки найденных значений для постоянных интегрирования в (1.1) и использования интегральных равенств (1.5) находим выражение для нормальных перемещений точек верхней грани полосы ($z=h$)

$$2Gu_z^+ = \frac{1}{t} \int_{\gamma}^{\alpha} \sigma^+(\xi) \left\{ \frac{m-2}{2(m-1)} h + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k-1} \Delta_{2k-1}} \left[2 \frac{m-1}{m} \times \right. \right.$$

$$\times \left. \text{ch}^2(\lambda_{2k-1} h) \cos(\lambda_{2k-1} \xi) - f_0 \left(\frac{m-2}{m} \text{sh}(\lambda_{2k-1} h) \text{ch}(\lambda_{2k-1} h) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\lambda_{2k-1} h) \sin(\lambda_{2k-1} \xi) \right] \cos(\lambda_{2k-1} x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k} \Delta_{2k}} \left[2 \frac{m-1}{m} \text{sh}^2(\lambda_{2k} h) \cos(\lambda_{2k} \xi) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - f_0 \left(\frac{m-2}{m} \text{sh}(\lambda_{2k} h) \text{ch}(\lambda_{2k} h) - (\lambda_{2k} h) \sin(\lambda_{2k} \xi) \right] \cos(\lambda_{2k} x) \right\} d\xi \quad (1.7)$$

где

$$\Delta_{2k-1} = \text{sh}(\lambda_{2k-1} h) \text{ch}(\lambda_{2k-1} h) - \lambda_{2k-1} h$$

$$\Delta_{2k} = \text{sh}(\lambda_{2k} h) \text{ch}(\lambda_{2k} h) + \lambda_{2k} h \quad (1.8)$$

При вертикальном смещении штампов условие на участке контакта $l \leq x < a$ можно взять в виде [7]

$$\frac{du_z^+}{dx} = 0 \quad (1.9)$$

Это условие приводит к однородному интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно неизвестного контактного давления $\sigma^+(x)$. Выполняя асимптотическое преобразование рядов в ядре интегрального уравнения и используя значения сумм [15]

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \quad (1.10)$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots = -\frac{1}{2} + \pi \delta(x), \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

($\delta(x)$ — дельта-функция Дирака),

находим

$$\begin{aligned} 2tf_0 \frac{m-2}{2(m-1)} \sigma^+(x) + \sin \frac{\pi x}{2t} \int_{-t}^t \frac{\sigma^+(\xi)}{\cos \frac{\pi x}{2t} - \cos \frac{\pi \xi}{2t}} d\xi = \\ = - \int_{-t}^t \sigma^+(\xi) K(x, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.11)$$

причем

$$\begin{aligned} K(x, \xi) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda_{2k-1}h}}{\bar{\Delta}_{2k-1}} [(1 + 2\lambda_{2k-1}h + e^{-2\lambda_{2k-1}h}) \cos(\lambda_{2k-1}\xi) - \\ - f_0 2\lambda_{2k-1}h \sin(\lambda_{2k-1}\xi)] \sin(\lambda_{2k-1}x) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda_{2k}h}}{\bar{\Delta}_{2k}} [(1 + 2\lambda_{2k}h - e^{-2\lambda_{2k}h}) \cos(\lambda_{2k}\xi) - \\ - f_0 2\lambda_{2k}h \sin(\lambda_{2k}\xi)] \sin \lambda_{2k}x \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{2k-1} &= \frac{1}{4} (1 - e^{-4\lambda_{2k-1}h}) - \lambda_{2k-1}h e^{-2\lambda_{2k-1}h} \\ \bar{\Delta}_{2k} &= \frac{1}{4} (1 - e^{-4\lambda_{2k}h}) + \lambda_{2k}h e^{-2\lambda_{2k}h} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Уравнению (1.11) можно придать стандартный вид сингулярных интегральных уравнений второго рода, если ввести замены

$$x = \frac{2t}{\pi} \arccos \vartheta, \quad \xi = \frac{2t}{\pi} \arccos \varphi, \quad \frac{\sigma^+(\vartheta)}{\sqrt{1-\vartheta^2}} = \Psi(\vartheta) \quad (1.14)$$

В результате можем записать

$$f_0 \frac{m-2}{2(m-1)} \Psi(\vartheta) - \frac{1}{\pi} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\Psi(\varphi)}{\varphi - \vartheta} d\varphi = - \frac{1}{\pi} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \Psi(\varphi) K^*(\vartheta, \varphi) d\varphi \quad (1.15)$$

Здесь $\vartheta_0 = \cos \frac{\pi a}{2t}$, $\vartheta_1 = \cos \frac{\pi l}{2t}$ ($0 < \vartheta_0 < \vartheta_1 < 1$), а ядро $K^*(\vartheta, \varphi)$ вычисляется с использованием (1.12) по формуле

$$K^*(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-\vartheta^2}} K\left(\frac{2t}{\pi} \arccos \vartheta, \frac{2t}{\pi} \arccos \varphi\right) \quad (1.16)$$

Предполагая, что неизвестная длина области контакта $\Delta = a - l$ порядка толщины слоя и что сам слой имеет малую относительную толщину ($\frac{h}{t} < \frac{1}{10}$), численным анализом был установлен практически линейный характер зависимости ядра $K^*(\vartheta, \varphi)$ от координаты φ и независимость его от ϑ , то есть

$$K^*(\vartheta, \varphi) \approx \beta(\vartheta_1) + \gamma(\vartheta_1) \varphi \quad (1.17)$$

Аппроксимация (1.17) позволяет записать точное решение уравнения (1.15). Учитывая равенство

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \Psi(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2t} \int_0^{\pi} \varphi^+(x) dx = - \frac{\pi}{2t} \frac{P}{2}, \quad (P > 0) \quad (1.18)$$

и временно полагая

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \Psi(\varphi) \varphi d\varphi = M \quad (1.19)$$

можем записать (1.15) в виде

$$f_0 \frac{m-2}{2(m-1)} \Psi(\vartheta) - \frac{1}{\pi} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\Psi(\varphi)}{\varphi - \vartheta} d\varphi = C(\vartheta_1) \quad (1.20)$$

где

$$C(\vartheta_1) = \frac{1}{2t} \frac{P}{2} \beta(\vartheta_1) - \frac{\gamma(\vartheta_1)}{\pi} M$$

Решение уравнения (1.20) в классе функций, имеющих интегрируемые особенности в концах интервала $[\vartheta_0, \vartheta_1]$, приведено в [16]. Используя его, запишем

$$\Psi(\vartheta) = C(\vartheta_1) \cos \pi \alpha \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta - \vartheta_0} \right)^{\frac{1}{2} + \alpha} + \frac{D}{(\vartheta - \vartheta_0)^{\frac{1}{2} + \alpha} (\vartheta_1 - \vartheta)^{\frac{1}{2} - \alpha}} \quad (1.21)$$

$$\alpha = - \frac{1}{\pi} \arctg \left(f_0 \frac{m-2}{2(m-1)} \right)$$

Постоянная D находится через $C(\vartheta_1)$ после подстановки $\Psi(\vartheta)$ в (1.18), а неизвестная M исключается по равенству (1.19). После этого уравнение для определения площадки контакта (то есть значения ϑ_1) получается из условия обращения в ноль контактных давлений при $\vartheta = \vartheta_1$ ($\sigma^+(l) = \Psi(\vartheta_1) = 0$) и записывается в виде равенства

$$(\vartheta_1 - \vartheta_0) \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \left[\beta(\vartheta_1) + \left(\vartheta_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) (\vartheta_1 - \vartheta_0) \right) \gamma(\vartheta_1) \right] + 1 = 0 \quad (1.22)$$

При этом вычисление функций $\beta(\vartheta_1)$ и $\gamma(\vartheta_1)$ для поиска значения ϑ_1 , удовлетворяющего уравнению (1.22), производится по формулам (1.12), (1.16) и используется аппроксимация (1.17).

Формула для вычисления функции контактного давления $\Psi(\vartheta)$ имеет вид

$$\Psi(\vartheta) = -\frac{P}{2} \frac{1}{2t} \frac{\cos \pi \alpha}{\left(\frac{1}{2} + \alpha \right) (\vartheta_1 - \vartheta_0)} \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta - \vartheta_0} \right)^{\frac{1}{2} + \alpha} \quad (1.23)$$

Возвращаясь к исходной координате x , находим

$$\sigma^+(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{P}{\Delta} \frac{\cos \pi \alpha}{\left(\frac{1}{2} + \alpha \right)} \left(\frac{x-l}{a-x} \right)^{\frac{1}{2} + \alpha} \quad (1.24)$$

$$(\Delta = a - l)$$

Если трение отсутствует ($f_0 = 0$, $\alpha = 0$), то

$$\sigma^+(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{P}{\Delta} \left(\frac{x-l}{a-x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.25)$$

Полученное решение позволяет заключить, что величина площадок контакта при нагружении системой периодических штампов упругой полосой не зависит от величины прижимающих штампы сил P и модуля сдвига материала полосы (в (1.12), а, следовательно, и в (1.22) не входят P и G). Для гладкого контакта они не зависят и от коэффициента Пуассона материала полосы, а определяются лишь ее толщиной и расположениями штампов.

С использованием полученного решения были выполнены расчеты площадок контакта для полосы с отношением $\frac{h}{t} = \frac{1}{15}$ и числом Пуассона $m = 3$. Результаты расчетов для $\frac{\Delta}{h}$ (h — полутолщина полосы) в зависимости от безразмерной величины зазора между соседними верхним и

нижним штампами $\frac{\delta}{h}$ (фиг. 2) и коэффициента трения f_0 представлены в табл. 1.

Таблица 1

$\delta/h \backslash f_0$	0	0.1	0.2	0.3
0.025	0.41	0.61	0.87	1.17
0.050	0.37	0.55	0.80	1.08
0.100	0.31	0.45	0.66	0.93
0.150	0.25	0.37	0.54	0.79
0.200	0.21	0.30	0.44	0.65
0.230	0.20	0.27	0.39	0.57

Из данных таблицы следует, что величина площадок контакта существенно зависит от коэффициента трения, увеличиваясь с увеличением f_0 . Уменьшение зазора также приводит к увеличению длины площадок контакта. Характер распределения нормальных напряжений в зонах контакта для всех случаев описывается формулой (1.24). Значения касательных напряжений в зонах контакта получаются умножением правой части (1.24) на коэффициент трения f_0 . Касательные напряжения всегда направлены так, что приводят к сжатию контактирующих поверхностей штампов, то есть к сближению угловых точек контакта штампов. Интересно отметить, что особенность контактных напряжений при подходе к угловым точкам штампов с учетом трения оказывается немного ниже корневой особенности $\frac{1}{2}$ имеющей место в задачах гладкого контакта.

Полученные выше результаты по определению площадок контакта и характера контактных напряжений являются исходными для строгого анализа напряженного состояния у режущих кромок твердосплавных элементов на упругой стадии их работы.

Институт механики АН УССР

Институт сверхтвердых
материалов АН УССР

Поступила 1 XI 1976

Վ. Վ. ԳՐԻԲՅԱԶԿՈ, Վ. Ե. ԿԵԿՏԵՆՅԱՆ, Ա. Ջ. ՈՒԼԻՍԿԻՆ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ՎՐԱ ՇՓՈՒՄՈՎ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ
ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ներկայացվում է առաձգական շերտի վրա շփումով պարբերական կոն-տակտային խնդրի լուծումը: Այդ խնդիրը մոդելավորում է թերթավոր զրոշման բաժանարար օպերացիաների տեղական դեֆորմացիաների ամենաբնորոշ առանձնահատկությունները ձևափոխման առաձգական փուլում:

Խնդրի լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման, որի ճշգրիտ լուծումը հաջողվել է գրանցել թվային անալիզի օգնությամբ կորիզի աեզուլյար մասի կապակցությունը արդումենտներից զծային օրենքով սահմանելուց հետո:

Որոշվել են գրոշմների անկյունային եզրերի մոտ կոնտակտային զոնաները և կոնտակտային շարունակների բաշխման քնույթը:

Բերվում են տվյալներ կոնտակտային մակերեսների, խնդրի երկրաչափական պարամետրներից և շփման գործակցի մեծությունից, ունեցած կապի մասին:

THE RECURRENT CONTACT PROBLEM WITH FRICTION ON ELASTIC STRIP

V. V. DROBJASKO, V. N. NIKITENKO, A. F. ULITKO

S u m m a r y

The solution of the recurrent contact problem with friction on the elastic strip, modelling the most characteristic features of local deformation of divisional operations of sheet punching in the elastic stage of deformation is presented in this paper.

The exact solution of the singular integral equation to which this problem is reduced is written after determination by numerical analysis of the linear dependence of the regular part of kernel from arguments.

The contact zones near the angular edges of punches and characteristics of distribution of contact stresses are determined.

The results are presented on dependence of contact grounds on geometrical parameters of the problem and on the coefficient of friction.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дурнев В. Д., Казаринова Г. А. О распределении напряжений на упругой стадии процесса вырубки изотропного материала. Изв. АН СССР, Металлы, 1976, № 1.
2. Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки. М., Машиностроение, 1968, с. 238.
3. Сторожева М. В., Попов Е. А. Теория обработки металлов давлением. М., Машиностроение, 1971, с. 424.
4. Фотеев Н. К. Высокоустойчивые штампы. М., Машиностроение, 1965, с. 258.
5. Takashi Giima. The theoretical research on the flanking of the sheet material. Soc. Mechanical Engn., 1962, vol. 28, No. 196, 1719.
6. Дандерс, Ступс. Роль констант упругости в некоторых контактных задачах. Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., сер. Е, 1970, т. 37, № 4.
7. Кур, Дандерс, Цзай. Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве. Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., сер. Е, 1972, т. 39, № 4.
8. Dundurs J. Properties of elastic bodies in contact. The mechanics of the contact between deformable bodies. Proceedings of IUTAM Symposium, Enschede, Netherlands, 20-30, August 1974. Ed-rs A. D. de Pater, J. J. Kalker. Delft University Press, 1975, 54-66.

9. Баблоян А. А., Мелконян М. Г. О контакте двух прямоугольников без сцепления с определенном области контакта. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 5.
10. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Контактная задача теории упругости для слоя, локально прижатого к полупространству. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 2.
11. Приварников А. К. О контакте слоя с упругим полупространством. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 4.
12. Pa S. L., Hussain M. A. Note on the unbonded contact between plates and an elastic half space. Trans. ASME, ser. E., J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 3, pp. 859—861.
13. Улитко А. Ф. Решение некоторых задач теории упругости методом собственных вектор-функций. Прикл. мех., 1960, т. 6, вып. 4.
14. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., Изд. «Наука», 1967, с. 402.
15. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959, с. 470.
16. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963, с. 640.