

Г. Г. ЕГИЯН, В. Б. КОЛМАНОВСКИЙ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ  
 ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ  
 СИСТЕМАМИ

1. В работе рассматриваются три задачи оптимального управления стохастической системой вида

$$\dot{x} = u + \sqrt{2\sigma} \dot{\xi} \quad (1.1)$$

где  $u$  — управление,  $|u| \leq b$ ,  $b = \text{const}$ ,  $\xi$  — скалярный стандартный винеровский процесс,  $\sigma$  — некоторое постоянное число, характеризующее интенсивность шума.

Система (1.1) описывает движение материальной точки под действием случайных сил. Уравнение Беллмана, соответствующее рассмотренным ниже задачам, содержит частные производные по двум фазовым координатам и времени. Численное решение уравнений с большим числом независимых переменных лимитируется возможностями современной вычислительной техники. Движение материальной точки будем рассматривать в фазовом пространстве  $(x, \dot{x})$ . Систему (1.1) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u + \sqrt{2\sigma} \dot{\xi} \end{cases} \quad (1.2)$$

Первая из изучаемых задач состоит в следующем. Имеются две прямые  $x=0$  и  $x=q_1$ . Требуется выбором управления  $u$  максимизировать вероятность достичь прямую  $x=0$  раньше, чем  $x=q_1$ . Задача решается при помощи метода динамического программирования. Обозначим через  $\alpha$  момент первого выхода системы (1.2) из области  $0 \leq x \leq q_1$ , а через  $V(x, y)$  — функцию Беллмана сформулированной задачи. Тогда

$$V(x, y) = \sup_u P(x(\alpha) = 0)$$

Соответствующее уравнение Беллмана имеет вид

$$y \frac{\partial V}{\partial x} + \sup_u \frac{\partial V}{\partial y} u + \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \quad V(0, y) = 1, \quad (1.3)$$

$$y \leq 0; \quad V(q_1, y) = 0, \quad y > 0$$

Из постановки задачи и (1.2) видно, что оптимальным будет управление  $u_0 = -b$ . Подставив  $u_0$  в (1.3), получим

$$y \frac{\partial V}{\partial x} - b \frac{\partial V}{\partial y} + \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \quad V(0, y) = 1, \quad y \leq 0;$$

$$V(q_1, y) = 0, \quad y > 0$$

Если в полученном уравнении сделать замены переменных  $y=c_1y_1$  и  $x=c_2x_1$ , то, потребовав  $c_1=c/b$  и  $c_2=s^2/b^3$ , получим уравнение, не содержащее  $b$  и  $s$ . Запишем это уравнение с прежними обозначениями  $x, y, V$

$$y \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \quad V(0, y) = 1, y \leq 0; \quad (1.4)$$

$$V(q, y) = 0, y > 0, q = q_1 c_2^{-1}$$

Непосредственное решение разностного аналога уравнения (1.4) сводится к обращению матрицы, что затруднительно при большом числе точек сетки. Вместо этого аппроксимируем решение задачи (1.4) решением  $V(t, x, y)$  задачи

$$\frac{\partial V}{\partial t} + y \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.5)$$

$$V(t, 0, y) = 1, y \leq 0; \quad V(t, q, y) = 0, y > 0$$

Здесь  $T$  — параметр. Отметим, что при  $T \rightarrow \infty$  будет  $V(t, x, y) \rightarrow V(x, y)$ . Действительно, решение задачи (1.5) есть максимальная вероятность достичь прямую  $x=0$  раньше, чем  $x=q$  за время  $T$ . Поэтому при  $T \rightarrow \infty$  решение задачи (1.5) будет сходиться к решению задачи (1.4). Следовательно, решение задачи (1.4) можно построить с помощью итераций по  $T$  решений задачи (1.5).

Прежде чем перейти к разностной аппроксимации уравнения (1.5), построим ограниченную область на фазовой плоскости  $(x, y)$ , в которой будем искать решение исходной задачи и зададим соответствующие граничные условия.

Обрежем симметрично относительно начала координат ось  $y$ . Получим прямоугольную область, которая показана на фиг. 1. Согласно постановке задачи и закону (1.2) на границах полученной области должны быть выставлены следующие условия: на линии  $OAD$  (фиг. 1) функция  $V(t, x, y) = 1$ , на линии  $BCF$  (фиг. 1) функция  $V(t, x, y) = 0$ . Так как (это видно из (1.2)) граница области на отрезках  $OB$  и  $FD$  недостижима, то на указанных отрезках граничные условия не выставляются. Недостижимая граница на фиг. 1 заштрихована. В указанной прямоугольной области строится равномерная сетка.

Обозначим через  $V_{i,j}^k$  значение функции  $V(t, x, y)$  в точке фазовой плоскости с координатами  $x = il, y = jh$  в момент времени  $t = k\tau$ , где  $l, h$  и  $\tau$  — соответственно шаги аппроксимации по координатам  $x, y$  и  $t$ , а  $i, j$  и  $k$  — соответствующие индексы, меняющиеся в пределах  $0 \leq i \leq S, -N \leq j \leq N$  и  $0 \leq k \leq K$ . Граничные условия на отрезках  $BC$  и  $AD$  (фиг. 1) будем задавать в форме

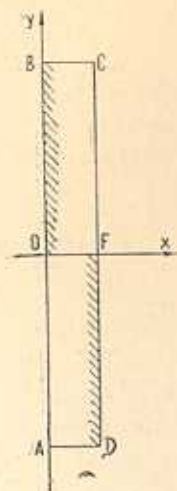
$$V_{i,N}^k = 0, \quad 1 \leq i \leq S-1, \quad K \geq k \geq 0 \quad (1.6)$$

$$V_{i,-N}^k = 1, \quad 1 \leq i \leq S-1, \quad K \geq k \geq 0 \quad (1.7)$$



При разностной аппроксимации уравнения (1.5) будем использовать для случая  $j \leq 0$  левую производную [2], аппроксимирующую  $\partial V/\partial x$ , и правую производную [2] в случае  $j > 0$ .

Это делается из-за недостижимости границы области. При этом вычисления для случая  $j \leq 0$  идут слева направо с использованием граничных условий на отрезке  $OA$ , а в случае  $j > 0$  — справа налево с использованием граничных условий на отрезке  $CF$  (фиг. 1).



Фиг. 1.

Поэтому, применив для аппроксимации уравнения (1.5) метод дробных шагов [1], получим

$$(V_{i,j}^k - V_{i,j}^{k-0.5})/\tau + (V_{i+1,j}^{k-0.5} - V_{i,j}^{k-0.5})hj/l = 0, \quad j > 0 \quad (1.8)$$

$$(V_{i,j}^k - V_{i,j}^{k-0.5})/\tau + (V_{i,j}^{k-0.5} - V_{i-1,j}^{k-0.5})hj/l = 0, \quad j \leq 0 \quad (1.9)$$

$$(V_{i,j}^{k-0.5} - V_{i,j}^{k-1})/\tau - (V_{i,i+1}^{k-1} - V_{i,j-1}^{k-1})/2h + \\ + (V_{i,i+1}^{k-1} - 2V_{i,j}^{k-1} + V_{i,j-1}^{k-1})/h^2 = 0 \quad (1.10)$$

Отметим [1], что указанный выше метод абсолютно устойчив и дает погрешность порядка  $h^2$  и  $\tau$  соответственно по фазовым координатам и по времени.

Для того, чтобы система уравнений (1.8), (1.9), (1.10) была разрешима, необходимо помимо граничных условий (1.6), (1.7) и граничных условий

$$V_{0,j}^k = 1, \quad -N \leq j \leq 0, \quad K \geq k \geq 0 \quad (1.11)$$

$$V_{S,j}^k = 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad K \geq k \geq 0 \quad (1.12)$$

задать начальное значение  $V_{i,i}^K$  в момент времени  $t=T$  во всех внутренних точках заданной сетки. Подчеркнем, что вычисления производятся в обратном времени, начиная с момента  $t=T$  и кончая моментом времени  $t=0$ .

В момент времени  $t=T$  следует задавать во всех внутренних точках сетки, исходя из постановки задачи, следующее начальное условие:

$$V_{i,j}^K = 0, \quad 1 \leq i \leq S-1, \quad -N+1 \leq j \leq N-1 \quad (1.13)$$

Таким образом, имея граничные условия (1.6), (1.7), (1.11), (1.12) и начальное условие (1.13), можно разрешить систему уравнений (1.8), (1.9) и (1.10) и определить значения функции Беллмана на заданной нами сетке в любой момент времени  $t=kt$ .

Из уравнений (1.8), (1.9) вытекают следующие две рекуррентные формулы для определения значений функции Беллмана:

$$V_{i,j}^{k-0.5} = (V_{i-1,j}^{k-0.5}\tau jh - lV_{i,j}^k)/(\tau jh - l), \quad j \leq 0 \quad (1.14)$$

$$V_{i,j}^{k-0.5} = (V_{i+1,j}^{k-0.5}\tau jh + lV_{i,j}^k)/(\tau jh + l), \quad j > 0 \quad (1.15)$$

В вычислениях по формулам (1.14) и (1.15) используются соответственно граничные условия (1.11), (1.12) и на первом этапе вычислений начальное условие (1.13), а затем на последующих этапах берутся значения функции  $V_{i,j}^k$ , полученные в результате текущих вычислений. Подставив результаты вычислений по формулам (1.14) и (1.15) в (1.10) и используя граничные условия (1.6), (1.7), мы получим разностную трехточечную схему, которую решим методом прогонки [2] при помощи рекуррентных формул. Для полноты изложения приведем эти формулы.

Из (1.10) имеем следующее основное уравнение прогонки, которое получается приведением подобных членов в (1.10):

$$(2\tau + \tau h) V_{i,j-1}^{k-1} - (2h^2 + 4\tau) V_{i,j}^{k-1} + (2\tau - \tau h) V_{i,j+1}^{k-1} = -2h^2 V_{i,j}^{k-0.5} \quad (1.16)$$

$i = \text{const}$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A &= 2\tau + \tau h, & C &= 4\tau + 2h^2 \\ B &= 2\tau - \tau h, & F_j &= 2h^2 V_{i,j}^{k-0.5} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Тогда уравнение (1.16) примет вид

$$AV_{i,j-1}^{k-1} - CV_{i,j}^{k-1} + BV_{i,j+1}^{k-1} = -F_j, \quad i = \text{const} \quad (1.18)$$

Граничные условия для этой системы имеют вид (1.6), (1.7).

Метод прогонки состоит из следующего алгоритма:

$$V_{i,j}^{k-1} = k_{j+1} V_{i,j+1}^{k-1} + \beta_{j+1}; \quad j = N-1, N-2, \dots, 1-N \quad (1.19)$$

$$V_{i,N}^{k-1} = (\tau_2 + r_2 \beta_N) / (1 - r_2 k_N) \quad (1.20)$$

$$k_{j+1} = B / (C - k_j A); \quad \beta_{j+1} = (A \beta_j + F_j) / (C - k_j A) \quad (1.21)$$

где  $k_{-N+1} = 0$ ;  $\beta_{-N+1} = 1$ .

Сначала вычисляются значения  $k_j$  и  $\beta_j$  при помощи рекуррентных формул (1.21). Далее вычисляется по формуле (1.20) значение  $V_{i,N}^{k-1}$ . Затем по формуле (1.19) рекуррентно вычисляются значения функции Беллмана  $V_{i,j}^{k-1}$ . Эта процедура повторяется для всех  $i = 1, 2, \dots, S-1$ .

Устойчивость вычислений обеспечивается условиями [2]

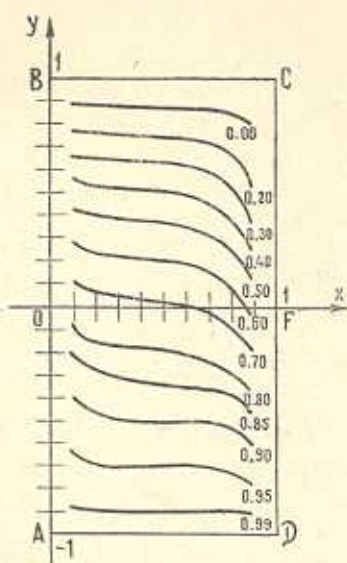
$$A > 0, B > 0, C \geq A + B \quad (1.22)$$

Значения функции Беллмана  $V_{i,j}^0$ , вычисленные в момент времени  $t = 0$ , запоминаются на каждой итерации по параметру  $T$ . Если разность между значениями функции Беллмана  $V_{i,j}^0$  для нескольких заранее выделенных контрольных точек заданной сетки на предыдущей и последующих итерациях по  $T$  не превышает заданной нами точности вычислений, то процесс счета заканчивается, и машина выдает значения искомой нами функции  $V(x, y)$  в момент времени  $t = 0$  во всех внутренних точках заданной нами сетки на последней итерации.



Задача считалась на машине БЭСМ-3М. Исходные параметры задачи:  $q=1$ ,  $OB=OA=1$ ; 2 (фиг. 1). Параметр  $T$  принимал следующие значения: 2, 4, 6, 8, 10. Параметры сетки следующие:  $l=h=0.1$ . Шаг по времени  $\tau=0.01$ . Точность вычислений  $\Delta=0.01$ . Все константы задачи в безразмерных единицах. В качестве контрольных были взяты следующие четыре точки:  $x_1=0.3$ ,  $y_1=-0.4$ ,  $x_2=0.3$ ,  $y_2=0.4$ ,  $x_3=0.6$ ,  $y_3=-0.4$ ,  $x_4=0.6$ ,  $y_4=0.4$ .

Результаты счета задачи для трех вариантов полосы  $ABCD$  (фиг. 1) показаны в виде линий уровня функции Беллмана на фиг. 2, 3, 4. На фиг. 2 дана картина линий уровня функции  $V(x, y)$  для полосы  $ABCD$  с параметрами  $q=1$ ,  $OB=OA=1$ , на фиг. 3 — для полосы  $ABCD$  с параметрами  $q=1$ ,  $OB=OA=2$ , на фиг. 4 — для полосы  $ABCD$  с параметрами  $q=1$ ,  $OB=OA=3$ . На указанных фигурах в правом конце каждой линии уровня



Фиг. 2.

указано соответствующее значение функции Беллмана.

Процесс счета задачи для первого варианта полосы  $ABCD$  (фиг. 2) сходился на второй итерации по  $T$  ( $T=4$ ), для второго варианта полосы  $ABCD$  (фиг. 3) — на третьей итерации по  $T$  ( $T=6$ ), для третьего варианта полосы  $ABCD$  (фиг. 4) — на четвертой итерации по  $T$  ( $T=10$ ).

Как видно из фиг. 2, 3, 4, значения функции Беллмана в области  $OADF$  близки к единице, а в области  $OBCF$  значения функции Беллмана, в основном, не превосходят 0.5. Кроме того, видно, что функция  $V(x, y)$  убывает как с увеличением  $x$  при  $y = \text{const}$ , так и с увеличением  $y$  при  $x = \text{const}$ . Из сравнения фиг. 2 и фиг. 3 замечаем, что с увеличением длины полосы  $ABCD$  линии

уровня становятся более крутыми. Сравнение фиг. 3, 4 показывает, что при  $T=10$ ,  $OB=3$  имеет место сходимость к решению задачи (1.3).

2. В этом параграфе рассматривается задача о максимизации вероятности успокоения системы (1.2). Формулировка задачи следующая. Пусть система (1.2) начинает движение при  $t=0$  из внутренней точки области  $R$ , ограниченной квадратами  $ABCD$  и  $abcd$  (фиг. 5). Выбором управления требуется максимизировать вероятность достижения квадрата  $abcd$  раньше, чем линии  $ABCD$  за время  $T$ .

Выпишем начальные условия

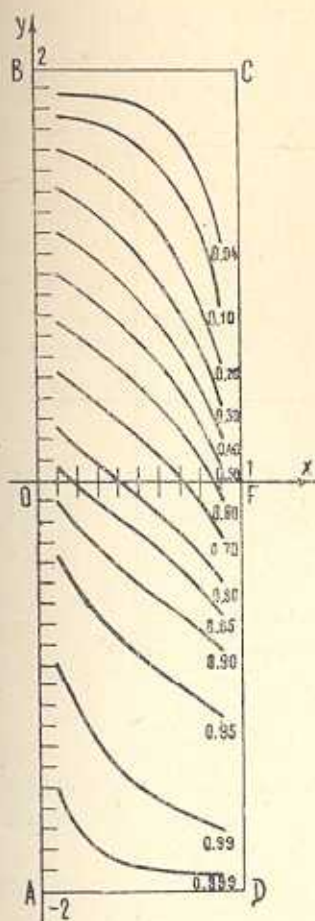
$$V(T, x, y) = 0; \quad x, y \in R \quad (2.1)$$

и соответствующее уравнение Беллмана в виде, не содержащем параметров  $b$  и  $\tau$ , аналогично уравнению (1.5) ( $t \rightarrow \tau b^{-2}t$ )

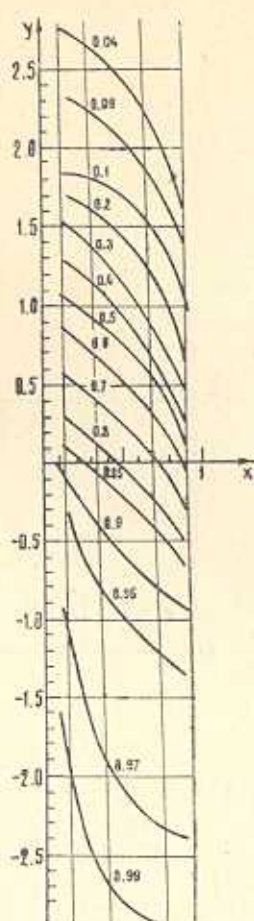
$$\frac{\partial V}{\partial t} + y \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \operatorname{sign} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

$$0 \leq t \leq T$$

где  $\operatorname{sign}(L)$  означает знак выражения  $L$ .



Фиг. 3.

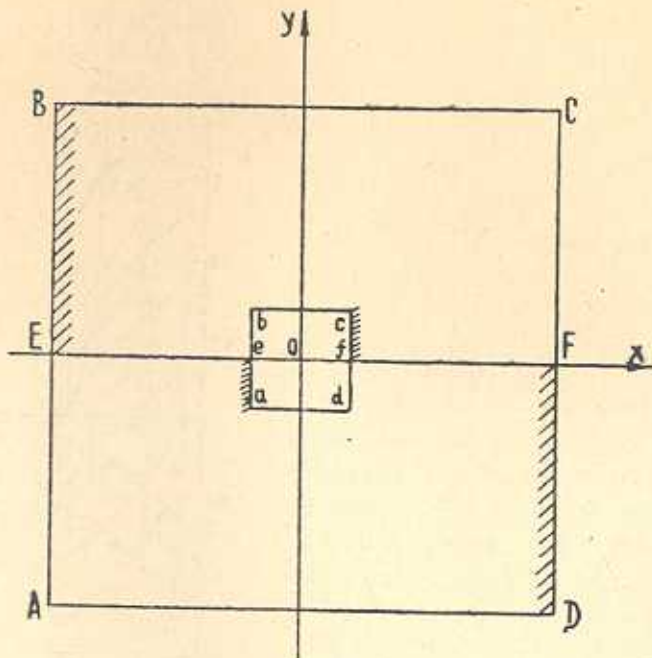


Фиг. 4.

Уравнение (2.2) так же, как и уравнение (1.5) в § 1, решается с помощью разностной аппроксимации и метода дробных шагов. Для указанной на фиг. 5 области построим равномерную сетку. В этом разделе будем придерживаться тех же обозначений, что и в § 1. Дополнительно покажем границы изменения индексов  $i$  и  $j$ :  $-S \leq i \leq S$  при  $n \leq j \leq N$  или  $-N \leq j \leq n$ ;  $-S \leq i \leq -m$  при  $-N \leq j \leq N$ ;  $m \leq i \leq S$  при  $-N \leq j \leq N$ , где индекс  $S$  соответствует  $x \in CD$ ,  $m$  соответствует  $x \in cd$ ,  $N$  и  $n$  соответствуют  $y \in BC$  и  $y \in bc$  (фиг. 5). Индекс  $k$  пробегает значения  $0 \leq k \leq K$ , где  $K = T/\tau$ . Индексы  $i$ ,  $j$  и  $k$  целочисленны.



Из уравнения (1.2) и постановки задачи видно, что внешняя и внутренняя граница области в четырех участках  $EB$ ,  $FD$ ,  $ae$  и  $fc$  (фиг. 5) недостижимы. Так как шаг по времени  $\tau$  будем брать малым ( $\tau=0.01$ ), то при разностной аппроксимации вместо  $\text{sign}(V_{i,j+1}^{k-1} - V_{i,j-1}^{k-1})/2h$  будем брать знак производной с предыдущего (половинчатого) слоя по времени, то есть  $\text{sign}(V_{i,j+1}^{k-0.5} - V_{i,j-1}^{k-0.5})/2h$ .



Фиг. 5.

С учетом § 1 работы и сказанного выше, уравнение (2.2) после разностной аппроксимации и применения метода дробных шагов преобразуется в следующие три разностных уравнения:

$$(V_{i,j}^k - V_{i,j}^{k-0.5})/\tau + (V_{i+1,j}^{k-0.5} - V_{i,j}^{k-0.5})hj/l = 0, \quad j \geq 0 \quad (2.3)$$

$$(V_{i,j}^k - V_{i,j}^{k-0.5})/\tau + (V_{i,j}^{k-0.5} - V_{i-1,j}^{k-0.5})hj/l = 0, \quad j < 0 \quad (2.4)$$

$$(V_{i,j}^{k-0.5} - V_{i,j}^{k-1})/\tau + (V_{i,j+1}^{k-1} - V_{i,j-1}^{k-1}) \text{sign}(V_{i,j+1}^{k-0.5} - V_{i,j-1}^{k-0.5})/2h + \\ + (V_{i,j+1}^{k-1} - 2V_{i,j}^{k-1} + V_{i,j-1}^{k-1})/h^2 = 0 \quad (2.5)$$

Уравнения (2.3)–(2.5) должны решаться совместно на интервале  $K \geq k \geq 0$ . С учетом сказанного в § 1 и постановки задачи, граничные условия задаются следующим образом:

$$V_{s,j}^k = 0, \quad 0 \leq j \leq N; \quad V_{m,j}^k = 1, \quad -n \leq j \leq -1 \\ V_{-m,j}^k = 1, \quad 0 \leq j \leq n; \quad V_{-s,j}^k = 0, \quad -N \leq j \leq -1 \quad (2.6) \\ K \geq k \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 (V_{i,N}^k + V_{i,N-1}^k)/2 = 0, \quad -S+1 \leq i \leq S-1; \quad (V_{i,n}^k + V_{i,n+1}^k)/2 = \\
 = 1, \quad -m \leq i \leq m; \quad (V_{i,-n}^k + V_{i,-n+1}^k)/2 = 1, \quad -m \leq i \leq m \quad (2.7) \\
 (V_{i,-N}^k + V_{i,-N+1}^k)/2 = 0, \quad -S+1 \leq i \leq S-1 \\
 K \geq k \geq 0
 \end{aligned}$$

Согласно постановке задачи начальные условия следовало бы задать в виде  $V_{i,j}^K = 0$  во всех внутренних точках построенной сетки. Но при этом, как видно из уравнений (2.3) и (2.4), на временном слое  $K-0.5$  значения функции Беллмана при  $j = \text{const}$  получаются одинаковыми для каждого  $i$ , а это приводит к тому, что под знаком  $\text{sign}$  стоит нуль, то есть ЭВМ не может анализировать выражение  $\text{sign}(V_{i,j+1}^{K-0.5} - V_{i,j-1}^{K-0.5})$  и вместо знака минус или плюс выдает нуль.

Установим, однако, что малому изменению начальных условий (2.1) соответствует малое изменение решений уравнения (2.2) при неизменных граничных условиях. Обозначим через  $V_\varepsilon(t, x, y)$  решение уравнения (2.2) с начальным условием  $V_\varepsilon(T, x, y) = \varepsilon$  и прежними граничными условиями, а через  $Q_\varepsilon(t, x, y)$  — функцию, определенную равенствами

$$\begin{aligned}
 Q_\varepsilon(t, x, y) &= 1 && \text{при } t < T; \quad x, y \in \text{ebcUadf} \\
 Q_\varepsilon(t, x, y) &= 0 && \text{при } t < T; \quad x, y \in \text{BCFU EAD} \\
 Q_\varepsilon(T, x, y) &= \varepsilon; && x, y \in R
 \end{aligned}$$

Пусть далее  $\alpha_\varepsilon(t, x, y)$  — момент первого выхода из области  $R \times [t, T]$  системы (1.2), рассматриваемой на отрезке  $[t, T]$ , при управлении  $u_\varepsilon = \text{sign}(\partial V_\varepsilon / \partial y)$  и начальном условии  $x(t) = x, y(t) = y$ . Тогда имеем ( $M$  — знак математического ожидания)

$$\begin{aligned}
 V_\varepsilon(t, x, y) &\geq MQ_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(t, x, y), x(\alpha_\varepsilon), y(\alpha_\varepsilon)) + \\
 &+ MQ_0(\alpha_\varepsilon(t, x, y), x(\alpha_\varepsilon), y(\alpha_\varepsilon)) - MQ_0(\alpha_\varepsilon(t, x, y), x(\alpha_\varepsilon), \\
 &y(\alpha_\varepsilon)) \geq V_0(t, x, y) - \varepsilon
 \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается противоположное неравенство

$$\begin{aligned}
 V_0(t, x, y) &\geq MQ_0(\alpha_\varepsilon(t, x, y), x(\alpha_\varepsilon), y(\alpha_\varepsilon)) + \\
 &+ MQ_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(t, x, y), x(\alpha_\varepsilon), y(\alpha_\varepsilon)) - MQ_\varepsilon(\alpha_\varepsilon(t, x, y), \\
 &x(\alpha_\varepsilon), y(\alpha_\varepsilon)) \geq V_\varepsilon(t, x, y) - \varepsilon
 \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$|V_0(t, x, y) - V_\varepsilon(t, x, y)| \leq \varepsilon$$

то есть решение  $V_\varepsilon$  уравнения (2.2) отличается от решения  $V_0$  не более, чем на  $\varepsilon$ . Зададим поэтому для численного решения уравнения (2.2) начальное условие в виде

$$V_{i,j}^K = 0.01 \quad (2.8)$$

во всех внутренних точках построенной нами сетки.



Для решения уравнений (2.3), (2.4) разобьем область  $R$  на четыре прямоугольника, продолжив прямые  $bc$  и  $ad$  до пересечения с прямыми  $AB$  и  $CD$  (фиг. 5). В каждом из этих прямоугольников уравнения (2.3) и (2.4) решаются при помощи рекуррентных формул (1.14), (1.15) с граничными условиями (2.6) и начальными условиями (2.8). Уравнение (2.5) приводится к виду

$$A_j V_{i,j-1}^{k-1} - C V_{i,j}^{k-1} + B_j V_{i,j+1}^{k-1} = -F_j, \quad i = \text{const} \quad (2.9)$$

$$A_j = 2\tau - u_{i,j} \tau h, \quad C = 2h^2 + 4\tau, \quad B_j = 2\tau + u_{i,j} \tau h \quad (2.10)$$

$$u_{i,j} = \text{sign}(V_{i,j+1}^{k-0.5} - V_{i,j-1}^{k-0.5})$$

Разобьем область  $R$  на четыре прямоугольника, продолжив прямые  $ab$  и  $cd$  до пересечения с  $BC$  и  $AD$  (фиг. 5). В каждом из прямоугольников уравнение (2.9) решается методом прогонки с использованием граничных условий (2.7) и результатов решения уравнений (2.3), (2.4). Прогоночные формулы такие же, как и в первом параграфе, только вместо  $A$  и  $B$  используются соответственно  $A_j$  и  $B_j$ . Устойчивость метода прогонки обеспечивается условиями (1.22), где вместо  $A$  и  $B$  используются соответственно  $A_j$  и  $B_j$ .

Задача решена на машине БЭСМ-3М. Помимо значений функции Беллмана дается и синтез оптимального управления — машина выдает значения оптимального управления, равного

$$\text{sign}(V_{i,j+1}^{k-0.5} - V_{i,j-1}^{k-0.5}), \quad K-1 > k \geq 0 \quad (2.11)$$

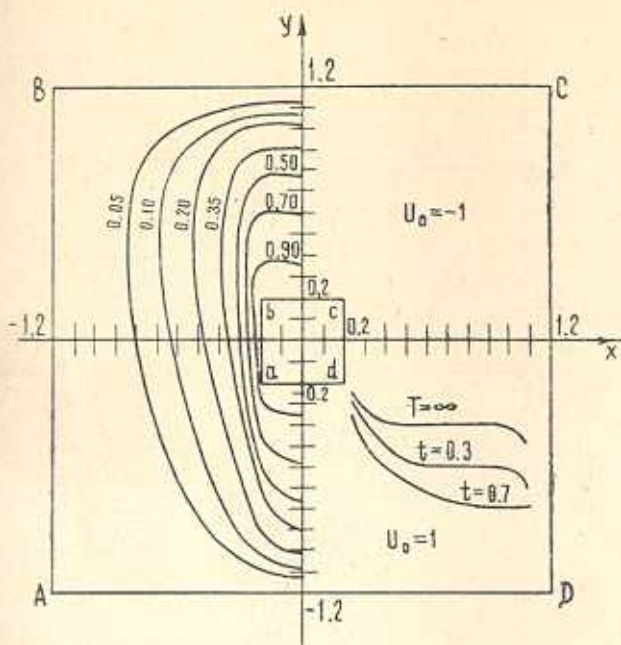
во всех внутренних точках построенной сетки. Ниже приводятся параметры задачи в безразмерных единицах  $T=1$ ,  $\tau=0.01$ ,  $h=l=0.1$ ,  $S=N=12$ ,  $m=n=2$ .

Решения выдаются для следующих десяти моментов времени  $t=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, \dots, 0.9$ .

Результаты счета показывают, что с уменьшением  $t$  в фиксированных точках области  $R$  наблюдается монотонное возрастание функции  $V(t, x, y)$ , то есть существует стационарное решение рассматриваемой задачи при  $T \rightarrow \infty$ . Это стационарное решение  $V(x, y)$  было найдено так же, как и в § 1, итерацией решения уравнения (2.2) по параметру  $T$ . Параметр  $T$  при этом принимал значения 2, 4, 6, 8, 10. Решения в трех фиксированных точках  $R$  сравнивались на предыдущей и последующей итерациях с точностью  $\Delta=0.01$ . Процесс сошелся уже на второй итерации ( $T=4$ ).

Поскольку уравнение (2.2) обладает центральной симметрией, то линии уровня функции Беллмана и линии переключения оптимального управления симметричны относительно начала координат фазовой плоскости  $(x, y)$ . Поэтому на фиг. 6 совместно показаны соответственно для двух половин области  $R$  линии уровня функции Беллмана для стационарного случая, то есть при  $T=\infty$ , и линии переключения оптимального управления для моментов времени  $t=0.7$  и  $t=0.3$  при  $T=1$  и для стационарного слу-

чая ( $T = \infty$ ). Выше соответствующей линии переключения и над отрезком  $bc$  оптимальное управление равно  $-1$ . Ниже соответствующей линии переключения и под отрезком  $ad$  оптимальное управление равно  $+1$  (фиг. 6). Отметим, что линия переключения в каждый момент времени единственна.



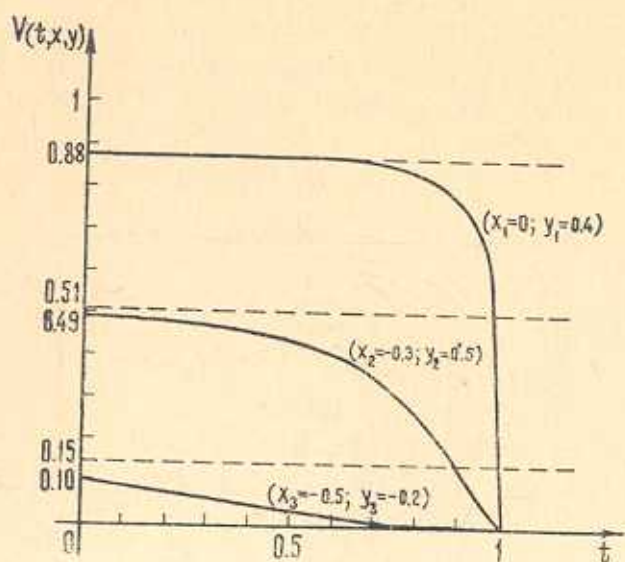
Фиг. 6.

На фиг. 7 приведена зависимость функции  $V(t, x, y)$  от времени для трех фиксированных точек с координатами:  $x_1=0, y_1=0.4, x_2=-0.3, y_2=0.5$  и  $x_3=-0.5, y_3=0.2$  на интервале  $0 \leq t \leq 1$ . Пунктирными прямыми, параллельными оси  $t$ , которые являются асимптотами для кривых, соответствующих определенной фиксированной точке, показаны значения функции Беллмана в данной точке для стационарного случая ( $T = \infty$ ).

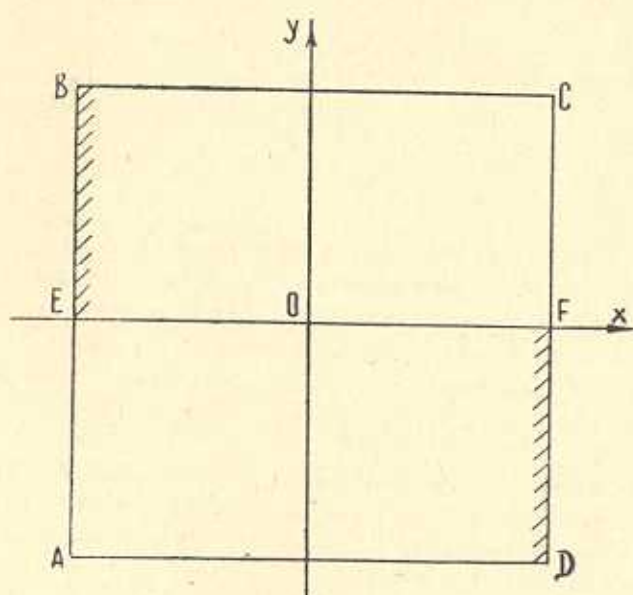
3. В этом разделе рассмотрим задачу максимизации вероятности удержания материальной точки, двигающейся по закону (1.2), в некоторой квадратной области фазовой плоскости  $(x, y)$  за промежуток времени  $0 \leq t \leq T$ .

Все обозначения и константы, фигурирующие в разделе 2, сохраним и для этого параграфа. В упомянутой выше области (фиг. 8) строим равномерную сетку с параметрами  $h$  и  $l$  ( $h=l$ ). Так же, как и в предыдущих параграфах, недостижимые участки границы области ( $EB$  и  $FD$ ) на фиг. 8 заштрихованы. Уравнение Беллмана для сформулированной выше задачи будет в точности совпадать с уравнением (2.2) параграфа 2. После разностной аппроксимации уравнения Беллмана данной задачи и применения метода дробных шагов получим такие же, как и в разделе 2, три уравнения (2.3), (2.4), (2.5).





Фиг. 7.



Фиг. 8.

Граничные условия, согласно постановке задачи, имеют вид

$$V_{-s, j}^k = 0, \quad -N \leq j \leq -1; \quad V_{s, j}^k = 0, \quad 0 \leq j \leq N \quad (3.1)$$

$$K \geq k \geq 0$$

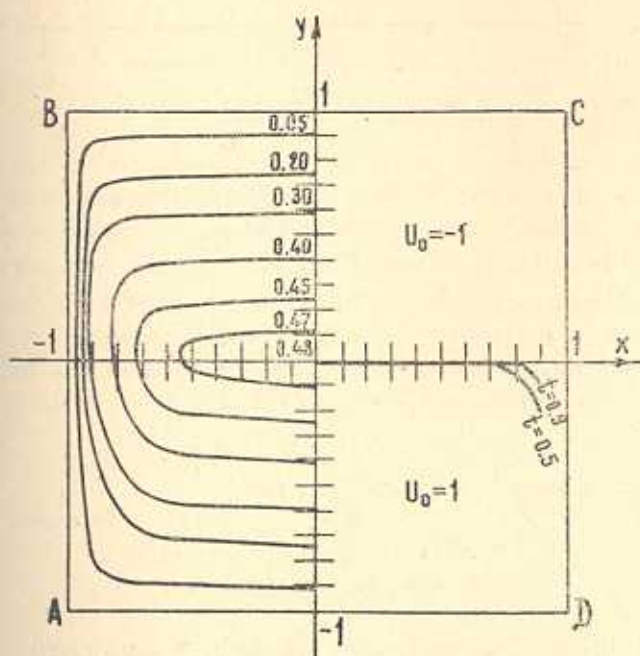
$$\begin{aligned}
 (V_{i,N}^k + V_{i,N-1}^k)/2 &= 0, \quad -S+1 \leq i \leq S-1 \\
 (V_{i,-N}^k + V_{i,-N+1}^k)/2 &= 0, \quad -S+1 \leq i \leq S-1 \\
 K > k > 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Начальное условие имеет вид

$$V_{i,j}^K = 1, \quad -S+1 \leq i \leq S-1, \quad -N+1 \leq j \leq N-1 \tag{3.3}$$

Уравнения (2.3) и (2.4) решаются рекуррентно с помощью формул (1.14), (1.15), граничных условий (3.1) и начального условия (3.3). Уравнение 2.5 так же, как и в разделе 2, приводится к виду (2.9) и решается с помощью соответствующих прогоночных формул, граничных условий (3.2) и результатов решения уравнений (2.3), (2.4), полученных выше.

Условия устойчивости метода прогонки сохраняются такими же, как и в разделе 2. Задача считалась на машине БЭСМ-3М для следующих параметров:  $T=1$ ,  $h=l=0.1$ ,  $\tau=0.01$ ,  $S=N=10$ . Все параметры даны в безразмерных единицах. Кроме значений функции Беллмана, то есть максимальной вероятности удержания в области за время  $0 \leq t \leq T$ , машина выдает по формуле (2.11) синтез оптимального управления во всех внутренних точках построенной сетки для следующих десяти моментов времени  $t=0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ .

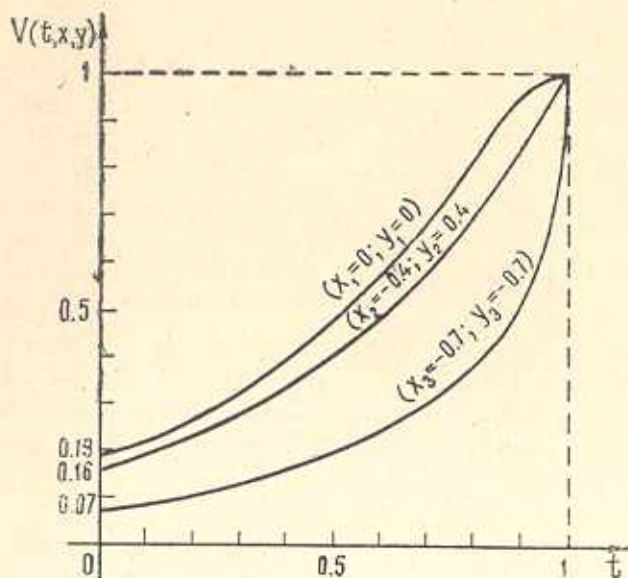


Фиг. 9.

На фиг. 9 совместно, в силу центральной симметрии уравнения (2.2), показаны картина линий уровня функции Беллмана в момент времени  $t=0.5$  и линии переключения оптимального управления в моменты времени  $t=0.9$  и  $t=0.5$  для соответствующих половин фазовой области  $(x, y)$ .



Значения оптимального управления в точках, лежащих над соответствующей линией переключения, равны  $-1$ , а в точках, лежащих под соответствующей линией переключения, оптимальное управление равно  $+1$  (фиг. 9). Следует подчеркнуть, что линия переключения оптимального управления в каждый момент времени единственна. Функция Беллмана



Фиг. 10.

принимает максимальные значения в точках, лежащих на оси  $y=0$ . Глобальный максимум функции  $V(t, x, y)$  в момент времени  $t=0.5$ , равный  $0.48$ , достигается в начале координат. При возрастании  $|y|$  и фиксированном  $x$  функция Беллмана монотонно убывает (фиг. 9). Аналогичный факт имеет место и для других моментов времени. Функция  $V(t, x, y)$  в фиксированных точках со временем убывает, что можно проследить на фиг. 10, где показана зависимость функции Беллмана от времени для трех фиксированных точек с координатами:  $x_1=0, y_1=0, x_2=-0.4, y_2=0.4, x_3=-0.7, y_3=-0.7$ .

Институт проблем механики  
АН СССР

Поступила 13 VI 1977

Գ. Գ. ԵԳՅԱՆ, Վ. Բ. ԿՈԼՄԱՅՈՎՍԿԻ

ՍՏՈՆԵԱՍՏԻԿ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԹՊՏԻՄԱԿ ԳԵՄԱՎԱՐՄԱՆ  
ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒՄՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Դիտարկվում է պատահական ուժերի ազդեցության տակ նյութական կետի շարժումը նկարագրող զենկավարվող համակարգ: Դրվում են հիշված հա-

մակարդակ օպտիմալ դեկավարման երեք խնդիրներ: Որպես օպտիմալության չափանիշներ ծառայում են համապատասխան հնարավոր ֆունկցիոնալներ: Դիտարկվող խնդիրներից յուրաքանչյուրը բերվում է Բելմանի համապատասխան հավասարման տարբերական անալոզի էՀՄ-ի վրա թվային լուծման: Հաշվումների համար հիմնական ալգորիթմ է ծառայում կոտորակային քայլերի մեթոդը:

## NUMERICAL SOLUTION TO SOME PROBLEMS ON OPTIMAL STOCHASTIC SYSTEM CONTROL

G. G. EGHIAN, V. B. KOLMANOVSKY

### S u m m a r y

Three problems on optimal stochastic system control, describing the motion of a particle under stochastic forces, are examined. The dynamic programming method is applied to solve the problems whose solutions are numerically computerised. The values for Bellman's function and optimal control synthesis are derived.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1962, т. 2, № 5.
2. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.